② Sei nun $f \in \mathcal{S}$ mit konvexem Bild $f(\mathbb{D})$ gegeben.

Für festes $0 < r < 1$ parametrisiert

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto f(re^{it})$$

den Rand des nach ① konvexen Gebietes $f(D_r(0))$ mit positiver (!) Orientierung.

Aus der Theorie ebener Kurven wissen wir, dass für ihre Krümmung (mit Vorzeichen) $\kappa : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Bedingung $\kappa(t) \geq 0$ mit

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \qquad \begin{pmatrix} x = \mathrm{Re}(\gamma) \\ y = \mathrm{Im}(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\dot{\gamma}(t)}\,\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \right)$$

$$= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \mathrm{Im}\left(\frac{\ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t)} \right)$$

gelten muss. Weiter berechnen wir

$$\dot{\gamma}(t) = i r e^{it} f'(re^{it})$$

$$\ddot{\gamma}(t) = -re^{it} f'(re^{it}) - r^2 e^{2it} f''(re^{it})$$

$$\Longrightarrow \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t)} = i\left(1 + re^{it} \frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right)$$

und erhalten damit

$$0 \leq \operatorname{Im}\left(\frac{\ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t)}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \quad \text{für } z = re^{it}.$$

Also gilt wie behauptet (3.1),

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Man beachte hierbei, dass Gleichheit nach dem Satz von der offenen Abbildung (Satz 1.3) nicht auftreten kann.

③ Nehmen wir umgekehrt an, dass (3.1) erfüllt ist, so liefern unsere Rechnungen in ②, dass alle Gebiete $f(D_r(0))$ für $0 < r < 1$ konvex sind, und die Umkehrung von ① zeigt die Konvexität von $f(\mathbb{D})$.

$\square$

3.3. Definition:

Mit $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{S}$, für die $f(\mathbb{D})$ bezüglich 0 sternförmig ist.

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>sternförmig</u> bezüglich $z_0 \in \Omega$, falls gilt $\{z_0 + t\cdot(z - z_0) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$ für alle $z \in \Omega$.

3.4. Satz:

Eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ gehört genau dann zu $\mathcal{S}^*$, wenn gilt

$$(3.2) \qquad \operatorname{Re}\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

Beweis:

① Behauptung: Ist $f(\mathbb{D})$ für ein $f \in \mathcal{S}$ sternförmig bezüglich 0, so auch die Mengen $f(D_r(0))$ für jedes $0 < r < 1$.

Beweis:

Sei $0 < r < 1$ gegeben. Setzen wir

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto f(rz),$$

so haben wir zu zeigen, dass $g(\mathbb{D})$ sternförmig bezüglich 0 ist.

Wir geben uns dazu $0 < t < 1$ vor und können, da $f(\mathbb{D})$ sternförmig ist, die Funktion

$$u : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \; z \mapsto f^{-1}(t\, f(z))$$

definieren. Weiter definieren wir

$$v : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \; z \mapsto \frac{1}{r}\, u(rz).$$

Die Abbildung v ist in der Tat eine Abbildung nach $\mathbb{D}$, da nach dem Lemma von Schwarz $|u(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt.

Es gilt nun

$$g(v(z)) = f(r v(z)) = f(u(rz))$$
$$= t \cdot f(rz) = t \cdot g(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und damit speziell

$$t\, g(z) \in g(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Somit ist $g(\mathbb{D})$ sternförmig bezüglich 0. $\square$

Offensichtlich gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.

(2) Sei nun $f \in \mathcal{S}$ gegeben, so dass $f(\mathbb{D})$ sternförmig bezüglich 0 ist.
Für $0 < r < 1$ parametrisiert

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto f(re^{it})$$

den Rand des nach (1) sternförmigen Gebietes $f(D_r(0))$.
Wir wählen nun glatte Funktionen

$$\rho : [0, 2\pi] \longrightarrow (0, \infty) \quad \text{und}$$
$$\omega : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $\quad \gamma(t) = \rho(t)\, e^{i\omega(t)}$ für $t \in [0, 2\pi]$

Dann muss $\dot{\omega} \geq 0$ gelten, weil sonst ein Strahl $\{ s f(re^{it}) \mid 0 \leq s \leq 1 \}$ an zwei Stellen γ treffen würde.

Es gilt nun

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\varrho}(t)\, e^{i\omega(t)} + i\,\varrho(t)\,\dot{\omega}(t)\, e^{i\omega(t)}$$

und

$$\dot{\gamma}(t) = i r e^{it} f'(re^{it}).$$

Also ist

$$i r e^{it} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} = \frac{\dot{\varrho}(t)}{\varrho(t)} + i\,\dot{\omega}(t)$$

und somit für $z = re^{it} \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \operatorname{Im}\left(iz\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \dot{\omega}(t) \geq 0,$$

d.h. nach dem Satz von der offenen Abbildung ist (3.2) erfüllt.

③ Ist umgekehrt (3.2) erfüllt, so folgt mit den Rechnungen aus ②, dass $f(D_r(0))$ für alle $0 < r < 1$ sternförmig bezüglich 0 ist. Die Umkehrung von ① zeigt, dass dann auch $f(\mathbb{D})$ sternförmig ist.

$\square$

3.5. Lemma:

(a) Ist (3.1) für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ erfüllt, so gehört f zu $\mathcal{S}$.

(b) Ist (3.2) für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ erfüllt, so gehört f zu $\mathcal{S}$.

Beweis:

(a) Im Beweis zu Satz 3.2 haben wir gesehen, dass für $0 < r < 1$ die Krümmung der durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto f(re^{it})$$

parametrisierten regulären Kurve (man beachte die Voraussetzung $f'(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$) gegeben ist durch

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\dot\gamma(t)|} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{\ddot\gamma(t)}{\dot\gamma(t)}\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Weil wir dort ferner

$$\frac{\ddot\gamma(t)}{\dot\gamma(t)} = i \cdot \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \quad \text{für } z = re^{it}$$

nachgerechnet haben, liefert (3.1), dass gilt

$$\kappa(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Für die Totalkrümmung der Kurve γ ergibt sich nun

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\kappa(t)|\,|\dot\gamma(t)|\,dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{it}\cdot\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right)dt\right)$$

$$= 1+\underbrace{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)}\frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz\right)}_{=0,\ \text{Cauchyscher Integralsatz}}$$

$$= 1,$$

weshalb γ die Parametrisierung einer Jordan-Kurve sein muss.

Insbesondere ist $f|D_r(0)$ injektiv, denn nach dem Argumentprinzip gilt

$$\#\{z\in D_r(0)\mid f(z)=w\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

$$= \mathrm{Ind}_\gamma(w) \in \{0,1\}.$$

Weil wir uns $0<r<1$ beliebig vorgegeben hatten, folgt $f\in\mathcal{S}$.