(b) Im Beweis zu Satz 3.4 haben wir gezeigt, dass die durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto f(re^{it})$$

parametrisierte Kurve, die wegen $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ klarerweise regulär ist, eine Darstellung der Form

$$\gamma(t) = \varrho(t)\, e^{i\omega(t)}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit glatten Funktionen ϱ und ω besitzt. Weiter hatten wir dort gezeigt, dass

$$\dot{\omega}(t) = \mathrm{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \quad \text{für } z = re^{it}$$

gilt. Nach (3.2) ist also

$$\dot{\omega}(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Für die Windungszahl gilt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{\omega(2\pi) - \omega(0)}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\omega}(t)\, dt \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}\, dt \right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \right) \\ &= \#\{ z \in D_r(0) \mid f(z) = 0 \} = 1. \end{aligned}$$

Also ist $\omega : [0, 2\pi] \to [\omega(0), \omega(2\pi)]$ bijektiv mit $\omega(2\pi) - \omega(0) = 2\pi$, so dass γ die Parametrisierung einer Jordan-Kurve sein muss.

Wie im Beweis zu (a) folgt mit Hilfe des Argumentprinzips, dass $f \in \mathcal{S}$ gilt.

$\square$

Wir können nun zeigen:

3.6. Satz (Alexander, 1915):

Eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ gehört genau dann zu $\mathcal{C}$, wenn die Funktion

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto z f'(z)$$

zu $\mathcal{S}^*$ gehört.

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann erhalten wir

$$g'(z) = f'(z) + z f''(z) \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

also einerseits $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ und andererseits für $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$

$$z \frac{g'(z)}{g(z)} = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}. \qquad (3.3)$$

"$\Longrightarrow$": Ist $f \in \mathcal{C}$ und damit nach Satz 3.2 Bedingung (3.1) erfüllt, so besagt (3.3), dass

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{g'(z)}{g(z)}\right) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$$

und damit (3.2) für g erfüllt ist.
Aus Lemma 3.5 (b) folgt $g \in \mathcal{S}$ und
Satz 3.4 liefert schließlich $g \in \mathcal{S}^*$.

"$\Leftarrow$": Gilt umgekehrt $g \in \mathcal{S}^*$, so besagt Satz 3.4, dass (3.2) und damit wegen (3.3)

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

erfüllt ist. Mit Lemma 3.5 (a) folgern wir $f \in \mathcal{S}$ und mit Satz 3.2 schließlich $f \in \mathcal{C}$.

$\square$

3.7 Definition:

Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ nennen wir close-to-convex, falls es eine Funktion $g \in \mathcal{S}^*$ gibt mit

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{f'(z)}{g(z)}\right) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

3.8 Bemerkung:

(a) Nach Satz 3.4 ist jede Funktion $f \in \mathcal{S}^*$ close-to-convex.

(e) Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist genau dann close-to-convex, wenn es eine Funktion $h \in \mathcal{C}$ gilt mit

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{h'(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Es gilt nämlich

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{f'(z)}{g(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{h'(z)}\right)$$

mit

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z\,h'(z)$$

und nach Satz 3.6 ist

$$g \in \mathcal{S}^* \iff h \in \mathcal{C}.$$

3.9. Satz:

Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ close-to-convex, so ist f injektiv.

Beweis:

Nach Bemerkung 3.8 (e) gibt es zu der close-to-convex Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ eine Funktion $h \in \mathcal{C}$ mit

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{h'(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Wir setzen $H := h(\mathbb{D})$ und betrachten

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{C}, \; w \longmapsto f(h^{-1}(w)).$$

Da H konvex ist, können wir für $w_1, w_2 \in H$, $w_1 \neq w_2$ nachrechnen, dass

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\varphi(w_2) - \varphi(w_1)}{w_2 - w_1}\right) = \int_0^1 \operatorname{Re}\Big(\varphi'(w_1 + t(w_2 - w_1))\Big)\, dt$$

$$> 0.$$

Man beachte hierbei, dass gilt

$$\operatorname{Re}(\varphi'(w)) = \operatorname{Re}\left(\frac{f'(h^{-1}(w))}{h'(h^{-1}(w))}\right) > 0$$

für alle $w \in H$

Also ist φ injektiv auf H und damit

$$f = \varphi \circ h$$

injektiv auf $\mathbb{D}$.

$\square$

3.10 Lemma (Carathéodory):

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 1$ und

$$\operatorname{Re}(f(z)) > 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$

gegeben. Dann erfüllen die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

die Bedingung $|c_n| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wir setzen $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$.

Bekanntlich gibt

$$g: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad z \longmapsto \frac{1+z}{1-z}$$

eine biholomorphe Abbildung zwischen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}$ mit $g(0) = 1$.

Damit gilt $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{H} = g(\mathbb{D})$ bzw.

$$\tilde{f}(\mathbb{D}) \subseteq \tilde{g}(\mathbb{D}) =: \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > -1\} =: H$$

für die Funktionen

$$\tilde{f}: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto f(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

$$\tilde{g}: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto g(z) - 1 = \frac{2z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 z^n.$$

Nach Aufgabe 3 (b) von Blatt 2 muss aufgrund der Konvexität von H gelten

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

3.11. Satz:

Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}$ gilt

$$|a_n| \leq 1 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Beweis:

Nach Satz 3.2 erfüllt die Funktion

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

die Bedingung

$$\operatorname{Re}(g(z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

sowie $g(0) = 1$. In der Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

gilt somit nach Lemma 3.10

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir rechnen nach (mit $a_0 := 0$, $a_1 := 1$)

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$$\Rightarrow \quad f''(z) = f'(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) z^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_{n-k+1} \cdot a_{k+1}(k+1)\right) z^n$$

Demnach gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(n+1)(n+2)\, a_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k+1}\, a_{k+1}\, (k+1). \qquad (3.4)$$

Induktiv erhalten wir hieraus

$$|a_n| \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für $n = 0$ liefert (3.4)

$$2a_2 = c_1 \cdot a_1 = c_1$$

$$\Rightarrow \quad 2|a_2| = |c_1| \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad |a_2| \leq 1$$

Ist $|a_k| \leq 1$ für $k = 1, \ldots, n+1$ gezeigt, so liefert (3.4)

$$(n+1)(n+2)\,|a_{n+2}| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_{n-k+1}|\,|a_{k+1}|\,(k+1)$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} (k+1)$$

$$= (n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow \quad |a_{n+2}| \leq 1.$$

$\square$

3.12. Satz (Nevanlinna, 1920)

Für jede Funktion $f \in \mathcal{S}^*$ gilt

$$|a_n| \leq n \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Beweis:

Nach Satz 3.4 erfüllt die Funktion

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} z\,\frac{f'(z)}{f(z)} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$$

(von deren Holomorphie man sich leicht mit Hilfe des Riemannschen Hebbarkeitssatzes überzeugt) die Bedingung

$$\mathrm{Re}(g(z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

In der Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

gilt daher nach Lemma 3.10

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir rechnen nach (mit $c_0 := 1$, $a_0 := 0$, $a_1 := 1$)

$$z f'(z) = f(z)\, g(z)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right) z^n$$

Wir sehen damit für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k}$$

bzw. wegen $c_0 = 1$ für $n \geq 2$

$$(n-1) a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k c_{n-k}. \qquad (3.5)$$

Induktiv erhalten wir nun

$$|a_n| \leq n \qquad \text{für alle } n \geq 2$$

⌜ Ist $|a_k| \leq k$ für $k = 1, \dots, n-1$ gezeigt, so folgt mit (3.5)

$$\begin{aligned} (n-1)|a_n| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \, |c_{n-k}| \\ &\leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= (n-1) \cdot n \end{aligned}$$

$\Rightarrow |a_n| \leq n$ ⌞

□

Da alle Rotationen der Koebe-Funktion sternförmig sind, kann man auch hier zeigen, dass diese die einzigen Funktionen in S^* sind für die in Satz 3.12 Gleichheit gilt.

3.13 Satz (Reade, 1955)

Ist $f \in \mathcal{S}$ close-to-convex, dann gilt

$$|a_n| \leq n \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Beweis:

Da $f \in \mathcal{S}$ close-to-convex ist, gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{S}^*$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Re}\left(z\,\frac{f'(z)}{g(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Damit erfüllt die Funktion

$$h : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} z\,\dfrac{f'(z)}{g(z)}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

(die nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph ist) die Bedingung

$$\mathrm{Re}(h(z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

sowie $h(0) = 1$.

Mit Lemma 3.10 gilt

$$|c_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

in der Potenzreihenentwicklung

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Weiter habe $g \in \mathcal{S}^*$ die Darstellung

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

Wir rechnen nun nach, dass

$$z f'(z) = g(z) k(z)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right) z^n$$

mit $a_1 := 1$, $b_0 := 0$, $b_1 := 1$ und $c_0 := 1$ gilt.
Also haben wir für alle $n \geq 2$

$$n a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$$

$$= b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k c_{n-k} \qquad (3.6)$$

Weil nun nach Satz 3.12

$$|b_n| \leq n \qquad \forall n \geq 2$$

erfüllt ist, erhalten wir aus (3.6) für $n \geq 2$

$$n|a_n| \leq |b_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |b_k| |c_{n-k}|$$

$$\leq n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= n + (n-1) \cdot n$$

$$= n^2$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq n$$

□

Wir schließen dieses Kapitel mit einer überraschenden Anwendung ab.

3.14 Satz:

Für alle $0 < r \leq r_0 := 2 - \sqrt{3}$ wird $D_r(0)$ unter jeder Abbildung $f \in \mathcal{S}$ auf ein konvexes Gebiet abgebildet. Für $r > r_0$ ist dies falsch.

Beweis:

Sei $0 < r \leq r_0$ gegeben. Zu $f \in \mathcal{S}$ betrachten wir

$$g_r : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{r} f(rz) \ . \ \left(g_r \in D(0, \tfrac{1}{r})\right)$$

Dann gilt $g_r \in \mathcal{S}$. Weil für f nach Teil 1 des Beweises zu Satz 2.12

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

und damit insbesondere

$$\mathrm{Re}\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

bzw.

$$\mathrm{Re}\left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq \frac{|z|^2 - 4|z| + 1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

gilt, erhalten wir für alle $|z| = 1$

$$\mathrm{Re}\left(1 + z \frac{g_r''(z)}{g_r'(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(1 + rz \frac{f''(rz)}{f'(rz)}\right)$$

$$\geq \frac{|rz|^2 - 4|rz| + 1}{1 - |rz|^2}$$

$$= \frac{r^2 - 4r + 1}{1 - r^2}$$

$$\geq 0 \quad \text{wegen } 0 < r \leq r_0 .$$

Das Minimumprinzip für harmonische Funktionen liefert nun

$$\operatorname{Re}\left(1 + z \frac{g_r''(z)}{g_r'(z)}\right) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D} .$$

Aus Satz 3.2 folgt damit die Konvexität von $g_r(\mathbb{D}) = \frac{1}{r} f(D_r(0))$. Also ist auch $f(D_r(0))$ konvex.

Weil für die Koebe-Funktion k

$$1 + z \frac{k''(z)}{k'(z)} = \frac{z^2 + 4z + 1}{1 - z^2} , \quad z \in \mathbb{D}$$

gilt, sehen wir, dass die obige Aussage für $r > r_0$ falsch ist.

$\square$