Kap 4 Der Konvergenzsatz von Carathéodory

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge schlichter Funktionen auf $\mathbb{D}$ mit

$$f_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_n'(0) > 0.$$

Wir setzen $G_n := f_n(\mathbb{D})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nach den Sätzen aus Kapitel 1 ist dann $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete $G_n \subsetneqq \mathbb{C}$.

In diesem Kapitel wollen wir einen Konvergenzbegriff für Folgen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entwickeln so daß für schlichtes f mit

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) > 0$$

die folgende Äquivalenz gilt:

$f_n \longrightarrow f$ kompakt auf $\mathbb{D}$	$\Longleftrightarrow$	$G_n \longrightarrow G$ mit $G := f(\mathbb{D})$

Man beachte hierbei, daß die geforderte Schlichtheit von f nach dem Satz von Hurwitz (vgl. Erinnerung 2.15 (B)) für nicht konstantes f automatisch gegeben ist.

4.1. Definition:

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten in $\mathbb{C}$ mit $0 \in G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\Omega := \{ z\in\mathbb{C} \mid \exists r>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \forall n\geq n_0 : \overline{D_r(z)} \subset G_n \}$$

$$= \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \operatorname{int}\Big(\bigcap_{n\geq n_0} G_n \Big)$$

offen. Wir sagen <u>$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Kern</u> (bzgl. 0), falls gilt $0\in\Omega$. In diesem Fall heißt die Zusammenhangskomponente G von Ω, die 0 enthält, der <u>Kern von $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>. Wir schreiben

$$G = \ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Ist $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so hat auch diese einen Kern und es gilt

$$\ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ker (G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} . \tag{4.1}$$

Gilt in (4.1) Gleichheit für jede Teilfolge $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so sagen wir <u>$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen seinen Kern</u> und schreiben hierfür

$$G_n \xrightarrow{n\to\infty} G := \ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

4.2. Beispiele:

(a) Ist $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten in $\mathbb{C}$ mit

$$0 \in G_n \subseteq G_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so gilt

$$G_n \longrightarrow G := \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \quad \text{für } n \to \infty .$$

(b) Sei

$$G_n := \begin{cases} \mathbb{D}, & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ Q, & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

mit

$$Q := \{ z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, \ -1 < \operatorname{Im}(z) < 1 \}.$$

Dann ist

$$\mathbb{D} = \ker (G_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

aber es gilt

$$\begin{array}{rcl} \ker (G_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} & = & \mathbb{D} \\ & & \cap\!\!\!\!\neq \\ \ker (G_{2n})_{n \in \mathbb{N}} & = & Q . \end{array}$$

Ein einfaches Kompaktheitsargument zeigt:

4.3. Lemma:

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten mit $0 \in G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hat $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Kern $G = \ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gibt es für jedes Kompaktum $K \subset G$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$K \subset G_n \quad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Dass Kernkonvergenz tatsächlich das richtige Konzept für unsere Zwecke ist, wird nun mit dem folgenden Satz klar:

4.4. Satz:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge schlichter Funktionen auf $\mathbb{D}$, die kompakt gegen eine schlichte Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ konvergiere. Ist $K \subset f(\mathbb{D})$ kompakt, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$K \subset f_n(\mathbb{D}) \quad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Beweis:

Zum Kompaktum $K \subset f(\mathbb{D})$ gibt es ein $r \in (0,1)$ mit $K \subset f(D_r(0))$, wie man leicht durch ein Überdeckungsargument zeigen kann.

Insbesondere ist $f(\partial D_r(0)) \cap K = \emptyset$ und damit

$$\delta := \operatorname{dist}(K, f(\partial D_r(0))) > 0.$$

Wegen der kompakten Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\| f - f_n \|_{\overline{D_r(0)}} < \delta \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für alle $w \in K$ und $z \in \partial D_r(0)$ gilt nun

$$\begin{aligned} &| (f(z) - w) - (f_n(z) - w) | \\ &\quad = | f(z) - f_n(z) | \\ &\quad \leq \| f - f_n \|_{\overline{D_r(0)}} \\ &\quad < \delta \\ &\quad \leq | f(z) - w | \qquad \text{für } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Gemäß dem Satz von Rouché haben $z \mapsto f(z) - w$ und $z \mapsto f_n(z) - w$ auf $D_r(0)$ gleich viele Nullstellen. Demnach nimmt f_n wie f den Wert w auf $D_r(0)$ einmal an, d.h.

$$K \subset f_n(D_r(0)) \subset f_n(\mathbb{D}).$$

$\square$

4.5. Definition:

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten in $\mathbb{C}$ mit $0 \in G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für die

$$G := \ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

existiert. Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen

$$f_n : G_n \to \mathbb{C}$$

und sei $G_* \subseteq G$ offen. Wir nennen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- <u>eine Cauchy-Folge bezüglich der kompakten Konvergenz auf G_*</u> (oder kurz kompakt konvergent auf G_*), falls gilt:

  Für alle Kompakta $K \subset G_*$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

  $$K \subset G_n \cap G_m \quad \text{und} \quad \| f_n - f_m \|_K < \varepsilon$$

  für alle $n, m \geq N$.

- <u>kompakt konvergent auf G_* gegen</u>

  $$f : G_* \to \mathbb{C},$$

  falls gilt:

  Für alle Kompakta $K \subset G_*$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

  $$K \subset G_n \quad \text{und} \quad \| f - f_n \|_K < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N.$$

Bemerkenswert ist, dass sich der Satz von Weierstraß auf diese Situation überträgt:

4.6. Satz:

Seien $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und G_* wie in Definition 4.5. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(G_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent auf G_*, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G_*)$. Die Grenzfunktion f ist eindeutig bestimmt.

(b) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt konvergent gegen $f \in \mathcal{O}(G_*)$, so ist auch $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt konvergent und es gilt

$$f_n' \longrightarrow f' \quad \text{für } n \to \infty$$

kompakt auf G_*.

Beweis: als Übung.

Wir können nun den Konvergenzsatz von Carathéodory formulieren und beweisen:

4.7. Satz (Carathéodory, 1912)

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete $G_n \subsetneqq \mathbb{C}$ mit $0 \in G_n$. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der nach dem Riemannschen Abbildungssatz (Satz 1.8) eindeutig bestimmten biholomorphen Abbildungen $f_n : \mathbb{D} \to G_n$ mit

$$f_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_n'(0) > 0.$$

Dann gilt:

(a) Genau dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent gegen eine schlichte Funktion f, wenn die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Kern $G \subsetneqq \mathbb{C}$ hat und gegen diesen konvergiert.

In diesem Fall ist $f(\mathbb{D}) = G$, d.h. $f : \mathbb{D} \to G$ ist biholomorph mit

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) > 0,$$

und die Folge $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf G kompakt gegen f^{-1}.

(b) Genau dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen die Nullfunktion, wenn keine Teilfolge von $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Kern hat.

Beweis:

(a) „$\Longrightarrow$":

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent gegen eine schlichte Funktion f.

① Behauptung:

Die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Kern

$$G := \ker(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und es gilt $f(\mathbb{D}) \subseteq G$.

Beweis:

Sei $w \in f(\mathbb{D})$ beliebig vorgegeben. Da $f(\mathbb{D})$ offen ist, finden wir ein $r > 0$ mit $\overline{D_r(w)} \subset f(\mathbb{D})$. Nach Satz 4.4. gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{D_r(w)} \subset f_n(\mathbb{D}) = G_n$$

für alle $n \geq n_0$.
Wir sehen also

$$w \in \Omega := \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \operatorname{int}\Big(\bigcap_{n\geq n_0} G_n\Big)$$

und damit, weil $w \in f(\mathbb{D})$ beliebig vorgegeben war, $f(\mathbb{D}) \subseteq \Omega$.
Weil somit speziell $0 \in \Omega$ gilt, hat $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Definition 4.1 einen Kern G und es ist $f(\mathbb{D}) \subseteq G$, da $f(\mathbb{D})$ ein Gebiet ist. □

② Behauptung:

Es gilt sogar $f(\mathbb{D}) = G$.

Beweis:

Wir geben uns $w_0 \in G$ beliebig vor und müssen $w_0 \in f(\mathbb{D})$ zeigen.
Nach Definition des Kerns G gibt es ein Gebiet $H \subset \overline{H} \subset G$ mit $0, w_0 \in H$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overline{H} \subset G_n$ für alle $n \geq n_0$.

Insbesondere ist durch

$$\phi_n := f_n^{-1}|_H : H \longrightarrow \mathbb{D}$$

eine lokalbeschränkte Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen gegeben.
Nach dem Satz von Montel gibt es somit eine Teilfolge $(\phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die kompakt gegen eine holomorphe Funktion $\phi : H \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ konvergiert.
Weil $\phi(0) = \lim_{k\to\infty} \phi_{n_k}(0) = 0$ gilt, kann ϕ nach dem Satz von der offenen Abbildung nur Werte in $\mathbb{D}$ annehmen, d.h. $\phi : H \longrightarrow \mathbb{D}$.
Da mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen f konvergiert, folgt nun aus $\phi_{n_k}(w_0) \longrightarrow \phi(w_0) \in \mathbb{D}$, dass

$$w_0 = f_{n_k}(\phi_{n_k}(w_0)) \longrightarrow f(\phi(w_0))$$

für $k \to \infty$ und damit

$$w_0 = f(\phi(w_0)) \in f(\mathbb{D})$$

gilt.

$\square$

<u>Zusatz:</u>

Allgemeiner gilt sogar $\phi_{n_k}(w) \to \phi(w)$ und damit

$$w = f_{n_k}(\phi_{n_k}(w)) \longrightarrow f(\phi(w))$$

für $k \to \infty$, d. h. $f(\phi(w)) = w$ für alle $w \in D_r(w_0)$. Also

$$\phi_{n_k} \longrightarrow f^{-1}|_{H} \quad \text{für } k \to \infty,$$

sogar mit kompakter Konvergenz.

③ Da unsere Überlegungen in ① und ② auch auf jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ angewendet werden können, sehen wir

$$f(\mathbb{D}) = \ker (G_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Definitionsgemäß gilt also

$$G_n \xrightarrow{n \to \infty} G = \ker (G_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

mit $G = f(\mathbb{D}) \subsetneqq \mathbb{C}$ und

$$f(0) = 0 \text{ und } f'(0) > 0.$$

Nach dem Montelschen Kriterium konvergiert die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $f(\mathbb{D})$ kompakt gegen f^{-1}.

„$\Longleftarrow$":

Es gelte nun $G_n \longrightarrow G = \ker(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $G \subsetneq \mathbb{C}$.

④ Behauptung:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine normale Familie.

Beweis:

Nach Satz 2.11 gilt

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |w| < \tfrac{1}{4} f_n'(0) \right\} \subseteq G_n$$

(man beachte, dass $\frac{1}{f_n'(0)} \cdot f_n \in \mathcal{S}$ gilt).

Damit sehen wir

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n'(0) < \infty,$$

denn andernfalls gäbe es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k}'(0) \to \infty$, weshalb wir $\ker(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{C}$ im Widerspruch zu $G_n \to G \neq \mathbb{C}$ erhalten würden.

Nach Satz 2.12 haben wir also

$$|f_n(z)| \leq f_n'(0) \cdot \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

$$\leq M \cdot \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \qquad \forall z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also lokalbeschränkt und damit nach dem Satz von Montel normal. □

⑤ Behauptung:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kompakt konvergent.

Beweis:

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach ④ normal ist, genügt es zu zeigen, dass die Grenzfunktionen $g_1, g_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ zweier kompakt konvergenter Teilfolgen $(f_{n_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}, (f_{n_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gleich sind. (Montelsches Konvergenzkriterium)

In ② haben wir gesehen, dass dann

$$g_1(\mathbb{D}) = \ker (G_{n_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

$$g_2(\mathbb{D}) = \ker (G_{n_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

gelten muss, weshalb wegen $G_n \to G$

$$g_1(\mathbb{D}) = G = g_2(\mathbb{D})$$

sein muss. Da ferner

$$g_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad g_1'(0) > 0$$

$$g_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad g_2'(0) > 0$$

erfüllt ist, liefert die Eindeutigkeitsaussage im Riemannschen Abbildungssatz (Satz 1.8), dass $g_1 = g_2$ gilt. □

(b) „$\Longrightarrow$":

Es gelte $f_n \to 0$ für $n \to \infty$ mit kompakter Konvergenz. Wir nehmen an, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (oder eine Teilfolge) hätte einen Kern. Dann gibt es ein $r > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{D_r(0)} \subset G_n \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wir betrachten die holomorphen Funktionen

$$\phi_n := f_n^{-1}|_{D_r(0)} : D_r(0) \longrightarrow \mathbb{D}$$

für $n \geq n_0$. Nach dem Lemma von Schwarz ist dann (Betrachte $\tilde{\phi}_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto \phi_n(rz)$)

$$\frac{1}{|f_n'(0)|} = |\phi_n'(0)| \leq \frac{1}{r}$$

und damit $|f_n'(0)| \geq r$ für alle $n \geq n_0$ im Widerspruch zu $f_n \to 0$ für $n \to \infty$. Also hat $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Kern.

„$\Longleftarrow$":

Keine Teilfolge von $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe einen Kern. Dann gilt $f_n'(0) \to 0$ für $n \to \infty$, denn andernfalls gäbe es ein $\varepsilon > 0$ sowie eine Teilfolge $(f_{n_k}'(0))_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_{n_k}'(0) \geq \varepsilon > 0,$$

weshalb nach Satz 2.11

$$D_{\varepsilon/4}(0) \subseteq \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \tfrac{1}{4} f_{n_k}'(0)\} \subseteq G_{n_k}$$

folgen würde, d.h. $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hätte einen Kern.

Mit Satz 2.12 folgt nun

$$|f_n(z)| \leq f_n'(0) \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$$

und damit die kompakte Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion. □

4.8. Bemerkung:

Die Bedingung $G \neq \mathbb{C}$ in Teil (a) von Satz 4.7. beruht auf dem Riemannschen Abbildungssatz.

Man betrachte konkret die Funktionen

$$f_n : \mathbb{D} \to G_n, \quad z \mapsto nz$$

mit $G_n := D(0,n)$. Nach Beispiel 4.2 (a) gilt $G_n \to \mathbb{C}$ für $n \to \infty$, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $f_n'(0) = n$ nicht kompakt konvergent.

Ohne Beweis halten wir noch fest:

4.9. Satz:

Sei $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten in $\mathbb{C}$ mit $0 \in D_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die einen Kern $D \subsetneq \mathbb{C}$ hat und gegen diesen konvergiert. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von schlichten Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(D_n)$ mit $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) > 0$. Wir setzen $G_n := f_n(D_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann kompakt konvergent gegen eine schlichte Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$, wenn die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Kern $G \subsetneq \mathbb{C}$ hat und gegen diesen konvergiert. In diesem Fall gilt $f(D) = G$.

4.10. Bemerkung:

Im Satz 4.8 kann auf die Bedingung $D \neq \mathbb{C}$ nicht verzichtet werden. Man betrachte beispielsweise

$$f_n : D_n \longrightarrow G_n, \; z \longmapsto \frac{1}{n} z$$

mit $D_n := D(0,n)$ und $G_n := \mathbb{D}$. Dann gilt zwar $G_n \longrightarrow G := \mathbb{D} \neq \mathbb{C}$, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen 0.

4.11. Korollar:

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{S}$ gibt es eine Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Jordan-Gebieten mit glattem Rand, für die gilt

$$G_n \longrightarrow \ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(\mathbb{D}).$$

Beweis:

Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $(0,1)$ mit $r_n \to 1$ für $n \to \infty$. Dann konvergiert

$$f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \; z \longmapsto \frac{1}{r_n} f(r_n z)$$

kompakt gegen f und $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $G_n := f_n(\mathbb{D})$ leistet nach Satz 4.7 das Gewünschte. $\square$

4.12. Definition:

Sei $0 < T \leq \infty$. Eine injektive stetige Abbildung

$$\gamma : [0,T) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \lim_{t \to T} \gamma(t) = \infty$$

heißt Jordanscher Kurvenbogen. Das Komplement $G := \mathbb{C} \setminus \gamma([0,T))$ wird Schlitzgebiet genannt.

Eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ ist eine Schlitzabbildung, falls $f(\mathbb{D})$ ein Schlitzgebiet ist.

$\frown$

4.13. Korollar:

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{S}$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Schlitzabbildungen aus $\mathcal{S}$, die kompakt gegen f konvergiert.

Beweis:

$\frown$ Nach unseren Überlegungen im Beweis zu Korollar 4.11 können wir o. B. d. A annehmen, dass $f(\mathbb{D})$ von einer glatten Jordankurve Γ berandet wird. Sei

$$\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$$

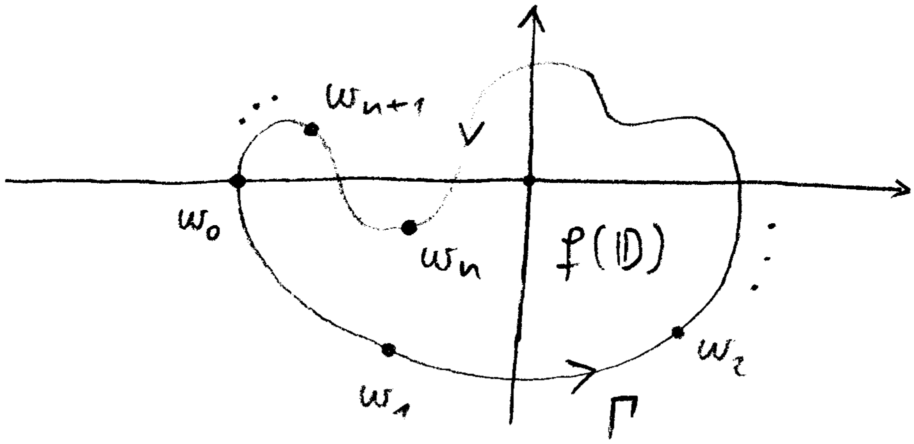
die zugehörige Parametrisierung. Wir setzen

$$w_0 := \min(\Gamma \cap \mathbb{R})$$

und finden $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ mit $\gamma(\zeta_0) = w_0$. Wir definieren

$$w_n := \gamma\left(\zeta_0 e^{2\pi i \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei Γ_n der Jordansche Kurvenbogen, der Γ in umgekehrter Richtung von w_n nach w_0 und anschließend entlang der negativen reellen Achse von w_0 bis ∞ läuft.



Die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der einfach zusammenhängenden Gebiete $G_n := \mathbb{C}\setminus\Gamma_n$ hat dann den Kern

$$\ker (G_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(\mathbb{D})$$

und ist gegen diesen konvergent. Die Folge der nach dem Riemannschen Abbildungssatz eindeutig bestimmten biholomorphen Abbildungen $f_n : \mathbb{D} \to G_n$ mit $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) > 0$ konvergiert dann nach Satz 4.7 kompakt gegen f.
Wegen $f_n'(0) \longrightarrow f'(0) = 1$ konvergiert damit auch die Folge der Schlitzabbildungen

$$g_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{f_n'(0)} f_n(z)$$

kompakt gegen f.

$\square$