Kap. 5 Löwner - Theorie

Mit diesem Kapitel stellen wir das wichtigste Werkzeug für den Beweis der Bieberbachschen Vermutung bereit. Diese Theorie geht auf Karl Löwner zurück und stammt aus dem Jahr 1923.

5.1. Definition:

Eine Funktion $f \in C(\mathbb{D} \times [0,\infty))$ heißt <u>Löwner - Kette</u>, falls gilt

(i) Für alle $t \geq 0$ ist $f_t := f(\cdot, t)$ eine schlichte Funktion auf $\mathbb{D}$.

(ii) Es ist $f_t(0) = 0$ und $f_t'(0) = e^t$ für alle $t \geq 0$.

(iii) Für alle $0 \leq s < t$ gilt $f(\mathbb{D}, s) \subseteq f(\mathbb{D}, t)$.

Mit $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{D} \times [0,\infty))$ bezeichnen wir die Menge aller Löwner - Ketten.

Notation:

Ist $f : \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so schreiben wir (im Fall ihrer Existenz) für die partiellen Ableitungen

$$f'(z,t) := \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \quad \text{und} \quad \dot{f}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(z,t).$$

5.2. Beispiel:

Für $\Theta \in \mathbb{R}$ definiert

$$f(z,t) := e^t k_\Theta(z) = \frac{e^t z}{(1-e^{i\Theta}z)^2}$$

eine Löwner-Kette $f \in \mathcal{L}$. Hierbei ist

$$f(\mathbb{D},t) = \mathbb{C} \setminus \{-re^{-i\Theta} \mid r \geq \tfrac{1}{4}e^t\}.$$

5.3. Satz:

Sei $f \in \mathcal{L}$ gegeben. Dann ist durch

$$G_t := f(\mathbb{D},t) \quad \text{für } t \geq 0$$

eine Familie $(G_t)_{t\geq 0}$ einfach zusammenhängender Gebiete mit $0 \in G_t$ definiert.

Diese erfüllt die Bedingungen:

(i) Für $0 \leq s < t < \infty$ gilt $G_s \subsetneq G_t$.

(ii) Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to t \in [0,\infty)$ für $n \to \infty$ gilt $G_{t_n} \longrightarrow G_t$ für $n \to \infty$.

(iii) Ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so gilt $G_{t_n} \longrightarrow \mathbb{C}$ für $n \to \infty$.

Beweis:

Für alle $t \in [0,\infty)$ ist f_t nach Def. 5.1.(i) eine schlichte Funktion, d.h. nach den Sätzen aus Kapitel 1 ist $G_t = f_t(\mathbb{D})$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Mit Def. 5.1.(ii) gilt zudem $0 = f_t(0) \in G_t$.

(i) Wegen (iii) in Def. 5.1 genügt es zu zeigen, dass $G_s \neq G_t$ für $s \neq t$ gilt.

Annahme: $G_s = G_t$

$\Longrightarrow$ $g := f_t^{-1} \circ f_s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist biholomorph mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = e^{s-t} > 0$, also $g = id_{\mathbb{D}}$.

$\Longrightarrow$ $1 = g'(0) = e^{s-t}$ im Widerspruch zu $s \neq t$.

(ii) Nach dem Konvergenzsatz von Carathéodory (Satz 4.7) genügt es zu zeigen, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n := f(\cdot, t_n)$ auf $\mathbb{D}$ kompakt gegen $h := f(\cdot, t)$ konvergiert.

Für kompaktes $K \subset \mathbb{D}$ betrachten wir

$$H := \overline{\{(z, t_n) \mid z \in K, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Da $H \subset K \times [0,\infty)$ kompakt ist, ist f auf H sogar gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir finden somit ein $\delta > 0$, so dass für $(z_1, s_1), (z_2, s_2) \in H$

$$|(z_1, s_1) - (z_2, s_2)| < \delta$$
$$\Longrightarrow \quad |f(z_1, s_1) - f(z_2, s_2)| < \varepsilon$$

gilt. Wegen $t_n \to t$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|t_n - t| < \delta \qquad \forall n \geq n_0 .$$

Damit folgt für alle $n \geq n_0$:

$$\|h - h_n\|_K = \max_{z \in K} \underbrace{|f(z,t) - f(z,t_n)|}_{< \varepsilon \text{ wegen } |(z,t)-(z,t_n)|<\delta.} < \varepsilon$$

(iii) Nach Satz 2.11 haben wir

$$\frac{1}{4} e^{t_n} \mathbb{D} \subseteq f(\mathbb{D}, t_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(wegen $e^{-t} f(\cdot, t) \in \mathcal{S}$ für $t \geq 0$), also

$$\ker (f(\mathbb{D}, t_n))_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{C},$$

da $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$ vorausgesetzt ist.

Wenden wir dies auf eine beliebige Teilfolge von $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, so folgt

$$f(\mathbb{D}, t_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{C}.$$

$\square$

Die in Satz 5.3. formulierten Bedingungen an $(G_t)_{t \geq 0}$ charakterisieren sogar, wann $(G_t)_{t \geq 0}$ von der Form $G_t = f(\mathbb{D}, t)$ für ein $f \in \mathcal{L}$ ist.

5.4. Satz:

Sei $(G_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von einfach zusammenhängenden Gebieten $G_t \subsetneq \mathbb{C}$ mit $0 \in G_t$ für alle $t \geq 0$, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Satz 5.3. hat.

Sei weiter $(h_t)_{t\geq 0}$ die Familie der nach dem Riemannschen Abbildungssatz eindeutig bestimmten biholomorphen Abbildungen

$$h_t : \mathbb{D} \longrightarrow G_t$$

mit $h_t(0) = 0$ und $h_t'(0) > 0$. Dann gilt:

(a) $\beta : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)\,,\ t \longmapsto h_t'(0)$

ist streng monoton wachsend und stetig mit $\beta(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

(b) $\lambda : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)\,,\ t \longmapsto \log\left(\frac{\beta(t)}{\beta(0)}\right)$

ist bijektiv und

$f : \mathbb{D} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ (z,t) \longmapsto \frac{1}{\beta(0)}\, h_{\lambda^{-1}(t)}(z)$

ist eine Löwner-Kette mit

$$f(\mathbb{D},t) = \frac{1}{\beta(0)}\, G_{\lambda^{-1}(t)}\,.$$

Bis auf die Skalierung mit $\frac{1}{\beta(0)}$ kann h_t also zu einer Löwner-Kette umparametrisiert werden.

Für den Beweis und den weiteren Verlauf der Vorlesung benötigen wir

5.5. Satz: (Subordinationsprinzip)

Sind $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gegeben, so sagen wir <u>f ist g untergeordnet</u> (und schreiben $f \prec g$), falls es eine holomorphe Funktion $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gibt mit $f = g \circ \varphi$ und $\varphi(0) = 0$.

(a) Ist $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ schlicht, so gilt für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ genau dann $f \prec g$, wenn

$$f(0) = g(0) \quad \text{und} \quad f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist die zugehörige <u>Subordinationsfunktion</u> $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eindeutig bestimmt.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f \prec g$ gegeben, so gilt:

(i) $\quad f(D_r(0)) \subseteq g(D_r(0)) \qquad \forall r \in (0,1)$

(ii) $\quad M_\infty(f, r) \leq M_\infty(g, r) \qquad \forall r \in (0,1)$

(iii) $\quad |f'(0)| \leq |g'(0)|$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(z) = g(e^{i\theta} z) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Beweis:

(a) „⟹": Ist $f \prec g$ für $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ erfüllt und ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die zugehörige Subordinationsfunktion, so gilt

$$f(0) = g(\varphi(0)) = g(0) \quad \text{und}$$
$$f(\mathbb{D}) = g(\varphi(\mathbb{D})) \subseteq g(\mathbb{D}).$$

„⟸": Ist umgekehrt $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ schlicht, so folgt aus

$$f(0) = g(0) \quad \text{und} \quad f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$$

für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ unmittelbar, dass

$$\varphi := g^{-1} \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

wohldefiniert und holomorph ist mit

$$g \circ \varphi = f \quad \text{und} \quad \varphi(0) = 0,$$

d.h. $f \prec g$ und φ ist eindeutig.

(b) Gilt $f \prec g$, so erfüllt die zugehörige Subordinationsfunktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ nach dem Lemma von Schwarz

$$|\varphi(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

und $|\varphi'(0)| \leq 1$. Damit sehen wir

(i) $f(D_r(0)) = g(\varphi(D_r(0))) \subseteq g(D_r(0))$

(ii) $$M_\infty(f, r) = \max_{z \in \overline{D_r(0)}} |g(\varphi(z))|$$
$$\leq \max_{z \in \overline{D_r(0)}} |g(z)| = M_\infty(g, r)$$

(iii) $$\begin{aligned} |f'(0)| &= |g'(\varphi(0))|\,|\varphi'(0)| \\ &\leq |g'(\varphi(0))| \\ &= |g'(0)| \end{aligned}$$

mit Gleichheit nur für $|\varphi'(0)| = 1$, d.h. $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. □

Beweis von Satz 5.4.:

① Ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to t \in [0,\infty)$ für $n \to \infty$, so gilt wegen (ii)

$$h_{t_n}(\mathbb{D}) = G_{t_n} \xrightarrow{n\to\infty} G_t = h_t(\mathbb{D})$$

und somit nach dem Satz von Carathéodory (Satz 4.7)

$$h_{t_n} \longrightarrow h_t \quad \text{für } n \to \infty$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{D}$.

② Insbesondere gilt nach dem Satz von Weierstraß in der Situation von ①

$$h_{t_n}' \longrightarrow h_t' \quad \text{für } n \to \infty$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{D}$, also speziell

$$\beta(t_n) = h_{t_n}'(0) \longrightarrow h_t'(0) = \beta(t)$$

für $n \to \infty$. Damit ist $\beta : [0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig.

③ Seien $s, t \in [0, \infty)$ mit $s < t$ gegeben. Da nach (i)

$$h_s(\mathbb{D}) = G_s \subsetneqq G_t = h_t(\mathbb{D}) \qquad (5.1)$$

und zudem $h_s(0) = 0 = h_t(0)$ gilt, besagt Satz 5.5., dass $h_s \prec h_t$ erfüllt ist. Es gibt also eine holomorphe Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $h_s = h_t \circ \varphi$.

Damit erhalten wir speziell

$$\underbrace{\beta(s)}_{>0} = h_s'(0) = h_t'(0)\,\varphi'(0) = \underbrace{\beta(t)}_{>0}\,\varphi'(0), \qquad (5.2)$$

weshalb $\varphi'(0) > 0$ gelten muss.

Wäre nun $\varphi'(0) = 1$, so würde das Lemma von Schwarz $\varphi = id_{\mathbb{D}}$ und damit $h_s = h_t$ im Widerspruch zu (5.1) liefern.

Somit besagt das Lemma von Schwarz

$$\varphi'(0) < 1$$

und (5.2) liefert $\beta(s) < \beta(t)$.

Also ist $\beta : [0, \infty) \to (0, \infty)$ monoton wachsend.

④ Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $[0, \infty)$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Wir zeigen: $\lim_{n \to \infty} \beta(t_n) = \infty$

(und damit $\lim_{t \to \infty} \beta(t) = \infty$.)

Sei hierzu $R > 0$ beliebig vorgegeben.
Da nach (iii) $G_{t_n} \to \mathbb{C}$ für $n \to \infty$ gilt, gibt es nach Lemma 4.3 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{D(0,R)} \subset G_{t_n} \qquad \forall n \geq n_0 .$$

Insbesondere sind die Funktionen

$$\varphi_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \ z \longmapsto h_{t_n}^{-1}(Rz)$$

für $n \geq n_0$ wohldefiniert mit $\varphi_n(0) = 0$.
Nach dem Lemma von Schwarz gilt also $|\varphi_n'(0)| \leq 1$ für alle $n \geq n_0$.

Es folgt

$$R = (h_{t_n} \circ \varphi_n)'(0) = \beta(t_n) \cdot \varphi_n'(0)$$

und damit $\beta(t_n) \geq R$ für alle $n \geq n_0$,

d.h. $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \beta(t_n) = \infty .$

Mit ②, ③ und ④ haben wir (a) bewiesen.

⑤ Wir definieren

$$h : \mathbb{D} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}, \ (z,t) \longmapsto h_t(z).$$

Behauptung: $\quad h \in C(\mathbb{D} \times [0,\infty))$

Beweis: Sei $((z_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{D} \times [0,\infty)$, die gegen $(z,t) \in \mathbb{D} \times [0,\infty)$ konvergiert, d.h.
$$\left.\begin{array}{l} z_n \longrightarrow z \\ t_n \longrightarrow t \end{array}\right. \ \text{für } n \to \infty$$

Insbesondere ist

$$K = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\} \subset \mathbb{D}$$

kompakt, so dass $(h_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach ① auf K gleichmäßig gegen h_t konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir finden dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\| h_{t_n} - h_t \|_K < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_1$$

und ferner ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$| h_t(z_n) - h_t(z) | < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_2 .$$

Für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt also

$$| h(z_n, t_n) - h(z,t) |$$

$$\leq | h_{t_n}(z_n) - h_t(z_n) | + | h_t(z_n) - h_t(z) |$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Damit ist h folgenstetig, also stetig. $\square$

⑥ Mit β ist offensichtlich auch λ stetig, streng monoton wachsend und erfüllt

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty .$$

Also ist $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv und besitzt eine stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion $\lambda^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

⑦ Durch

$$f : \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \longmapsto \frac{1}{\beta(0)}\, h(z, \lambda^{-1}(t))$$

wird nun eine stetige Funktion definiert, die in Definition 5.1. klarerweise (i) und nach ⑥ auch (iii) erfüllt.

Ferner gilt für alle $t \geq 0$ sowohl $f(0,t) = 0$ als auch

$$f'(0,t) = \frac{1}{\beta(0)}\, h'_{\lambda^{-1}(t)}(0) = \frac{\beta(\lambda^{-1}(t))}{\beta(0)} = e^t.$$

Man beachte hierbei, dass für $s = \lambda^{-1}(t)$

$$t = \lambda(s) = \log\left(\frac{\beta(s)}{\beta(0)}\right)$$

und damit

$$\frac{\beta(\lambda^{-1}(t))}{\beta(0)} = \frac{\beta(s)}{\beta(0)} = e^t$$

gilt. Damit erfüllt f auch (ii).

Zusammenfassend zeigt dies $f \in \mathcal{L}$.

□

5.6. Satz:

Sei $\gamma : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Jordanscher Kurvenbogen mit $0 \notin \gamma([0,\infty))$. Dann erfüllt $(G_t)_{t\geq 0}$ mit

$$G_t := \mathbb{C} \setminus \Gamma_t \quad \text{für} \quad \Gamma_t := \gamma([t,\infty))$$

die Voraussetzungen von Satz 5.4.

Beweis: als Übung!

5.7. Korollar:

Ist $f_0 \in \mathcal{S}$ eine Schlitzabbildung, so gibt es eine Löwner-Kette f mit $f(\cdot,0) = f_0$ und einen Jordanschen Kurvenbogen $\gamma : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\mathbb{D},t) = \mathbb{C} \setminus \gamma([t,\infty))$ für alle $t \geq 0$.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus Satz 5.6. und 5.4 unter Beachtung von $h_0 = f_0$ und $\beta(0) = 1$ und nach eventuellem Umparametrisieren des Schlitzes γ gemäß $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \lambda^{-1}$. □

5.8. Bemerkung:

Allgemein gibt es zu jedem $f_0 \in \mathcal{S}$ ein $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\cdot,0) = f_0$.

Dies zeigt man mittels eines Approximationsargumentes unter Verwendung der Kompaktheit von $\mathcal{L}$ in $C(\mathbb{D} \times [0,\infty))$, die wir aus Zeitgründen leider nicht beweisen können.

5.9. Satz:

Sei f eine beliebige Löwner-Kette. Für alle $t \geq 0$ setzen wir $g_t := f_t^{-1}$. Dann gilt

$$f_0(z) = \lim_{t \to \infty} e^t g_t(f_0(z))$$

gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$.

Beweis:

Für alle $t \geq 0$ gilt $e^{-t} f_t \in \mathcal{S}$ und somit nach Satz 2.11 für alle $z \in \mathbb{D}$

$$e^t \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f_t(z)| \leq e^t \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Speziell für $z = g_t(w)$ folgt für alle $w \in G_t$

$$e^t \frac{|g_t(w)|}{(1+|g_t(w)|)^2} \leq |w| \leq e^t \frac{|g_t(w)|}{(1-|g_t(w)|)^2} \qquad (5.3)$$

Insbesondere sehen wir für alle $w \in G_t$

$$\left| e^t \frac{g_t(w)}{w} \right| \leq (1+|g_t(w)|)^2 \leq 4 \qquad (5.4)$$

Sei nun $R > 0$ gegeben. Weiter sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$.
Wegen $G_{t_n} \to \mathbb{C}$ für $n \to \infty$ finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K := \overline{D_R(0)} \subset G_{t_n}$ für alle $n \geq n_0$ gemäß Lemma 4.3.

Nach (5.4) haben wir nun für alle $n \geq n_0$

$$|g_{t_n}(w)| \leq 4e^{-t_n}|w| \leq 4Re^{-t_n} \quad \forall w \in K,$$

also $\|g_{t_n}\|_K \to 0$ für $n \to \infty$. Damit liefert (5.3)

$$\underbrace{(1-|g_{t_n}(w)|)^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \leq \left| e^{t_n} \frac{g_{t_n}(w)}{w} \right| \leq \underbrace{(1+|g_{t_n}(w)|)^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

für alle $w \in K$, weshalb gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{t_n} \frac{g_{t_n}(w)}{w} \right| = 1 \quad \forall w \in K \qquad (5.5)$$

Weil nach (5.4)

$$\left\{ w \mapsto e^{t_n} \frac{g_{t_n}(w)}{w} \,\middle|\, n \geq n_0 \right\} \subset \mathcal{O}(D_R(0))$$

eine normale Familie ist, gibt es eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die

$$G(w) = \lim_{k\to\infty} e^{t_{n_k}} \frac{g_{t_{n_k}}(w)}{w}$$

auf $D_R(0)$ mit kompakter Konvergenz für eine Funktion $G \in \mathcal{O}(D_R(0))$ gilt. Nach (5.5) muss $|G(w)| = 1$ für alle $w \in D_R(0)$ sein. Da ferner $G(0) = 1$ ist, besagt das Maximumprinzip $G \equiv 1$. Also folgt

$$\lim_{k\to\infty} e^{t_{n_k}} g_{t_{n_k}}(w) = w$$

mit kompakter Konvergenz auf $D_R(0)$.

Da wir diese Argumentation auch auf jede Teilfolge von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden können, folgt

$$\lim_{n \to \infty} e^{t_n} g_{t_n}(w) = w$$

mit kompakter Konvergenz auf $D_R(0)$.

Weil $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig vorgegeben war, sehen wir

$$\lim_{t \to \infty} e^t g_t(w) = w$$

mit kompakter Konvergenz auf $D_R(0)$.

Da zudem auch $R > 0$ beliebig vorgegeben war, erhalten wir

$$\lim_{t \to \infty} e^t g_t(w) = w$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{C}$ und somit

$$\lim_{t \to \infty} e^t g_t(f_0(z)) = f_0(z)$$

mit kompakter Konvergenz auf $\mathbb{D}$. $\square$

5.10. Bemerkung

In Bemerkung 5.8 haben wir bereits angedeutet, dass zu jedem $f_0 \in \mathcal{S}$ ein $f \in \mathcal{L}$ mit $f(\cdot, 0) = f_0$ existiert. Gemäß Satz 5.9 ist

$$\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{S}, \quad t \longmapsto e^t f_t^{-1} \circ f_0$$

ein stetiger Weg, der $\gamma(0) = id_{\mathbb{D}}$ mit $f_0 = \lim_{t \to \infty} \gamma(t)$ verbindet. $\mathcal{S}$ ist also wegzusammenhängend.