5.11. Satz: (Löwnersche Differentialgleichung)

Sei $f_0 \in \mathcal{S}$ eine Schlitzabbildung und sei $f \in \mathcal{L}$ die zugehörige Löwner-Kette gemäß Korollar 5.7. Dann gibt es eine stetige Funktion $\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{T}$, wobei wir $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ setzen, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \cdot \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \qquad (5.6)$$

auf $\mathbb{D} \times [0,\infty)$ erfüllt ist. Insbesondere ist f stetig partiell differenzierbar.

Beweis:

Nach Aufgabe 1 von Blatt 6 genügt es zu zeigen, dass

$$g : \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto f_t^{-1}(f_0(z))$$

stetig partiell differenzierbar ist und einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z,t) = -g(z,t) \cdot \frac{1+\kappa(t)\,g(z,t)}{1-\kappa(t)\,g(z,t)} \qquad (5.7)$$

mit einer stetigen Funktion $\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{T}$ genügt.

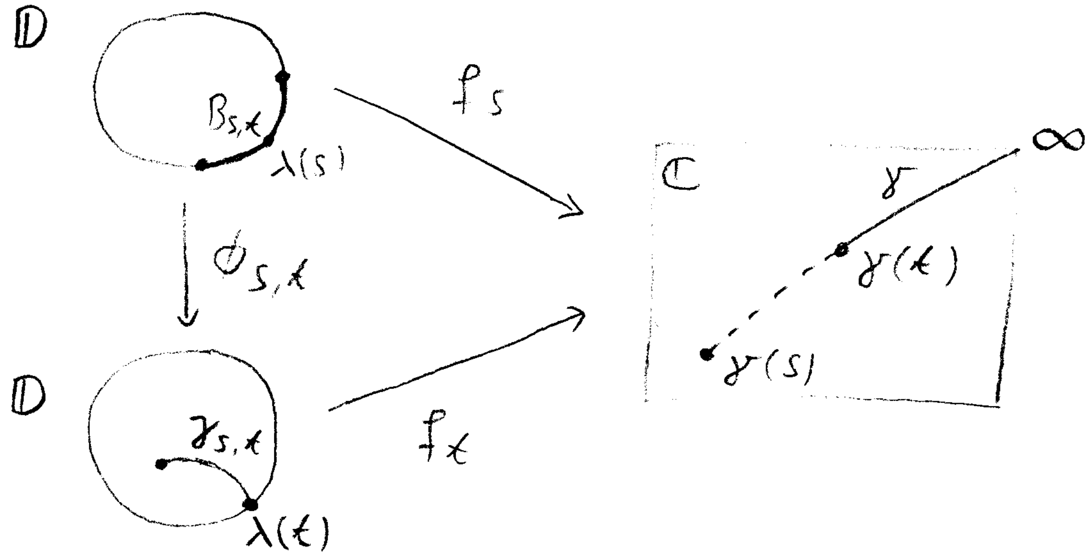
① Zu $0 \le s \le t < \infty$ definieren wir die

Übergangsfunktion

$$\phi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

mit $\phi_{s,t}(0) = 0$ und $f_t \circ \phi_{s,t} = f_s$.

(D.h. $f_s \prec f_t$ und $\phi_{s,t}$ ist die zugehörige Subordinationsfunktion.)



Dann ist $\phi_{s,t}(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \gamma_{s,t}$, wobei

$$\gamma_{s,t} := f_t^{-1}(\gamma([s,t))) \subset \mathbb{D}$$

eine stetige Kurve ist.

(2) Nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory besitzt f_s eine stetige Fortsetzung

Conway, II
Prop. 3.7 und
Prop. 3.8

$$f_s : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \qquad (\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- Es gibt genau einen Punkt $\lambda(s) \in \mathbb{T}$ mit
$$f_s(\lambda(s)) = \gamma(s).$$
- Für alle $t > s$ besteht $f_s^{-1}(\{\gamma(t)\}) \subset \mathbb{T}$ aus genau zwei Punkten.

Ferner lässt sich $f_s^{-1} : \mathbb{C} \setminus \gamma([s, \infty)) \longrightarrow \mathbb{D}$ zu einer stetigen Funktion
$$f_s^{-1} : \mathbb{C} \setminus \gamma((s, \infty)) \longrightarrow \mathbb{D} \cup \{\lambda(s)\}$$
fortsetzen.

③ Mit ② folgt, dass $\lambda(t) = f_t^{-1}(\gamma(t))$ der Endpunkt der Kurve $J_{s,t}$ für alle $0 \leq s < t < \infty$ ist. Genauer gilt
$$\underbrace{\sup_{z \in J_{s,t}} |z - \lambda(t)|}_{} \xrightarrow{s \nearrow t} 0$$
$$= \sup_{\tau \in [s,t)} |f_t^{-1}(\gamma(\tau)) - f_t^{-1}(\gamma(t))|$$
(denn $f_t^{-1} \circ \gamma : [s,t] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig).

④ Ebenfalls nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory besitzt die Übergangsfunktion $\phi_{s,t}$ für $0 \leq s \leq t < \infty$ eine stetige und surjektive Fortsetzung $\phi_{s,t} : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$.

Damit gilt insbesondere

$$f_t \circ \phi_{s,t} = f_s \quad \text{auf } \overline{\mathbb{D}}$$

für die Fortsetzungen von f_s, f_t aus ②.

Wir setzen:

$$B_{s,t} := \phi_{s,t}^{-1}(\gamma_{s,t} \cup \{\lambda(t)\}) = f_s^{-1}(\gamma([s,t]))$$

Also ist $B_{s,t}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{T}$ mit $\lambda(s) \in B_{s,t}$.

⑤ Es gilt: $\displaystyle \max_{z \in B_{s,t}} |z - \lambda(s)| \xrightarrow{t \downarrow s} 0$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

- Es gibt ein $\delta_1 > 0$, so dass
  $\forall z \in \mathbb{D}: \ |f_s(z) - \gamma(s)| < \delta_1 \Longrightarrow |z - \lambda(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Wähle $s' > s$. Es gibt ein $\delta_2 > 0$, so dass
  $\forall z_0 \in B_{s,s'}, z \in \mathbb{D}: \ |z - z_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f_s(z) - f_s(z_0)| < \frac{\delta_1}{2}$.
  (Wähle $0 < r < \operatorname{dist}(f_s^{-1}(\infty), B_{s,s'})$. Dann ist f_s auf $K_{s,s'} := \{z \in \overline{\mathbb{D}} \mid \operatorname{dist}(z, B_{s,s'}) \leq r\}$ glm. stetig.)
- Es gibt ein $\delta > 0$ mit $s + \delta < s'$, so dass
  $\forall s < t < s + \delta: \ |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\delta_1}{2}$.

Ist nun $z_0 \in B_{s,t}$ für $s < t < s + \delta$ gegeben, und es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_{s,t}$

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z} \right| \leq 4 e^{t-s}.$$

Beweis:

Da $\phi_{s,t}$ schlicht ist mit $\phi_{s,t}'(0) = e^{s-t}$, gilt nach Satz 2.11

$$\frac{1}{4} e^{s-t} \mathbb{D} \subset \phi_{s,t}(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \gamma_{s,t},$$

also $\gamma_{s,t} \subset \{ z \in \mathbb{D} \mid |z| \geq \frac{1}{4} e^{s-t} \}$.

Die Spiegelung am Einheitskreis

$$\gamma_{s,t}^* := \left\{ \frac{1}{\bar{z}} \;\middle|\; z \in \gamma_{s,t} \right\}$$

erfüllt also $\gamma_{s,t}^* \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4 e^{t-s} \}$.

Weil nun $\phi_{s,t}(\mathbb{T} \setminus B_{s,t}) \subset \mathbb{T}$ gilt, liefert das Schwarzsche Spiegelungsprinzip eine holomorphe Fortsetzung

$$\tilde{\phi}_{s,t}(z) := \begin{cases} \phi_{s,t}(z), & z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus B_{s,t} \\ \dfrac{1}{\overline{\phi_{s,t}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases}$$

mit $\tilde{\phi}_{s,t}(\mathbb{C} \setminus B_{s,t}) = \mathbb{C} \setminus (\gamma_{s,t} \cup \{\lambda(t)\} \cup \gamma_{s,t}^*)$.

Wegen

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z} = \lim_{z \to \infty} \frac{\frac{1}{z}}{\overline{\phi_{s,t}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}$$

so sehen wir $f_s(z_0) \in \gamma([s,t])$, also

$$|f_s(z_0) - \gamma(s)| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Wir wählen $z \in \mathbb{D}$ mit

$$|z - z_0| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_2\right\}.$$

Also gilt wegen $|z - z_0| < \delta_2$ zunächst

$$|f_s(z) - f_s(z_0)| < \frac{\delta_1}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned}|f_s(z) - \gamma(s)| &\leq |f_s(z) - f_s(z_0)| + |f_s(z_0) - \gamma(s)| \\ &< \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1,\end{aligned}$$

so dass $|z - \lambda(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gelten muss.

Schließlich folgt

$$\begin{aligned}|z_0 - \lambda(s)| &\leq |z_0 - z| + |z - \lambda(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Zusammenfassend sehen wir:

$$\forall\, s < t < s + \delta: \quad \max_{z \in B_{s,t}} |z - \lambda(s)| < \varepsilon.$$

□

(6) Die Übergangsabbildung $\phi_{s,t}$ hat eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{\phi}_{s,t}$ auf $\mathbb{C} \setminus B_{s,t}$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{\phi_{s,t}(\overline{z})}}$$

$$= \overline{\lim_{z \to 0} \frac{z}{\phi_{s,t}(z)}}$$

$$= \frac{1}{\overline{\phi_{s,t}'(0)}} = e^{t-s}$$

Besitzt die Funktion $z \mapsto \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z}$ eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt ∞.

Nach dem Maximumprinzip ist also

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z} \right| \leq \max_{|\zeta|=1} \left| \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(\zeta)}{\zeta} \right|$$

Fortsetzung von $\tilde{\phi}_{s,t}|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}}$

$$\overset{\tilde{\phi}_{s,t}(\mathbb{T}\setminus B_{s,t}) \subset \mathbb{T}}{=} \max_{\zeta \in B_{s,t}} |\underbrace{\tilde{\phi}_{s,t}(\zeta)}_{\in \gamma_{s,t}^*}| \leq 4 e^{t-s}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Ebenso haben wir für alle $z \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z} \right| \leq \max_{|\zeta|=1} \left| \frac{\phi_{s,t}(\zeta)}{\zeta} \right| = 1 \leq 4 e^{t-s}$$

und für alle $z \in \mathbb{T} \setminus B_{s,t}$

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{s,t}(z)}{z} \right| = 1 \quad \text{wegen } \tilde{\phi}_{s,t}(\mathbb{T}\setminus B_{s,t}) \subset \mathbb{T}.$$

$\square$

⑦ Zu jeder Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (s,∞) mit $t_n \to s$ für $n\to\infty$ gibt es eine Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass die Funktionen

$$z \longmapsto \frac{\widetilde{\phi}_{s,t_{n_k}}(z)}{z}$$

auf $\mathbb{C}\setminus\{\lambda(s)\}$ kompakt gegen 1 konvergieren.

Beweis:

Nach ⑤ gibt es zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$ ein $\delta_n > 0$ mit

$$B_{s,t} \subset \overline{D(\lambda(s), \varepsilon_n)}$$

für alle $s < t < s+\delta_n$. Auf

$$G_n := \mathbb{C}\setminus\overline{D(\lambda(s), \varepsilon_n)}$$

ist $z \longmapsto \frac{\widetilde{\phi}_{s,t}(z)}{z}$ holomorph und nach ⑥ gleichmäßig beschränkt durch $4e^{\delta_n}$.

Induktiv erhalten wir nach dem Satz von Montel Teilfolgen $(t_{n_j(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $(t_{n_{j+1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(t_{n_j(k)})_{k\in\mathbb{N}}$
- $t_{n_j(k)} \in (s, s+\delta_j)$ für alle $k\in\mathbb{N}$.
- $z \longmapsto \frac{\widetilde{\phi}_{s,t_{n_{j+1}(k)}}(z)}{z}$ konvergiert kompakt auf G_j.

Dann konvergiert die Diagonalfolge $(t_{n_k(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion $\Psi : \mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\} \to \mathbb{C}$.

Setzen wir $c := \max\{t_n - s \mid n \in \mathbb{N}\}$, so gilt

$$|\Psi(z)| \leq 4e^c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}.$$

Also kann Ψ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zu einer ganzen Funktion $\tilde{\Psi}$ fortgesetzt werden. Da $\tilde{\Psi}$ ebenfalls beschränkt ist, liefert der Satz von Liouville, dass $\tilde{\Psi}$ konstant sein muss. Wegen

$$\tilde{\Psi}(0) = \lim_{k \to \infty} \phi'_{s, t_{n_k(k)}}(0) = 1$$

gilt somit $\Psi \equiv 1$. $\square$

(8) $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{T}$ ist stetig.

Beweis:

Wir zeigen hier nur: λ ist rechtsseitig stetig.

Sei $s \geq 0$ gegeben. Für $\varepsilon > 0$ gibt es nach (5) ein $\delta > 0$ mit $B_{s,t} \subset \overline{D(\lambda(s), \varepsilon)}$ für alle $s < t < s + \delta$.

Wir betrachten die Jordankurve $\Gamma := \tilde{\phi}_{s,t}(\partial D(\lambda(s), \varepsilon))$

Gemäß (7) können wir nach eventuellem Verkleinern von δ annehmen, dass

$$|\tilde{\phi}_{s,t}(z) - z| < \varepsilon \qquad \forall z \in \partial D(\lambda(s), \varepsilon).$$

Wir stellen fest, dass für $z_1, z_2 \in \partial D(\lambda(s), \varepsilon)$

$$\begin{aligned} &|\tilde{\phi}_{s,t}(z_1) - \tilde{\phi}_{s,t}(z_2)| \\ &\leq |\tilde{\phi}_{s,t}(z_1) - z_1| + |z_1 - z_2| + |\tilde{\phi}_{s,t}(z_2) - z_2| \\ &< \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \\ &= 4\varepsilon \end{aligned}$$

gilt, weshalb auch

$$\operatorname{diam}(\Gamma) = \max_{w_1, w_2 \in \Gamma} |w_1 - w_2| \leq 4\varepsilon$$

sein muss. Damit haben wir für $z \in \partial D(\lambda(s), \varepsilon)$

$$\begin{aligned} &|\lambda(s) - \lambda(t)| \\ &\leq |\lambda(s) - z| + |z - \tilde{\phi}_{s,t}(z)| + |\tilde{\phi}_{s,t}(z) - \lambda(t)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon \\ &= 6\varepsilon \end{aligned}$$

wird von Γ umlaufen

für alle $s < t < s + \delta$.

$\square$

(9) Da $z \longmapsto \frac{1}{z}\phi_{s,t}(z)$ auf $\mathbb{D}$ nullstellenfrei und holomorph ist, gibt es $\Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

$$\exp(\Phi(z)) = \frac{\phi_{s,t}(z)}{z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

und $\Phi(0) = s-t$.

Mit $\phi_{s,t}$ hat auch Φ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{D}}$ mit

- $\forall z \in \mathbb{T} \setminus B_{s,t}$: $\quad e^{\operatorname{Re}(\Phi(z))} = \frac{|\phi_{s,t}(z)|}{|z|} = 1,$

  d.h. $\operatorname{Re}(\Phi(z)) = 0$

- $\forall z \in B_{s,t}$: $\quad e^{\operatorname{Re}(\Phi(z))} = \frac{|\phi_{s,t}(z)|}{|z|} \leq 1,$

  d.h. $\operatorname{Re}(\Phi(z)) \leq 0$.

(10) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (5) gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $s < t < s+\delta$ gilt:

$$d := \max_{z \in B_{s,t}} |z - \lambda(s)| < \varepsilon \quad (\text{o.B.d.A. } \varepsilon < 2)$$

Seien $\alpha < \beta$ mit $\alpha - \beta < 2\pi$ bestimmt durch

$$|e^{i\alpha} - \lambda(s)| = d = |e^{i\beta} - \lambda(s)|,$$

d.h. $B_{s,t} \subseteq \{e^{i\theta} \mid \theta \in [\alpha, \beta]\}$.

Nach Aufgabe 1 (b), Blatt 4 folgt

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\operatorname{Re}(\Phi(\zeta))}{\zeta} \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\zeta + i\underbrace{\operatorname{Im}(\Phi(0))}_{=0}$$

$$\overset{9}{=} \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}(\Phi(e^{i\Theta}))\, \frac{e^{i\Theta}+z}{e^{i\Theta}-z}\, d\Theta$$

Wegen $f_t \circ \phi_{s,t} = f_s$ gilt $\phi_{s,t} \circ g_s = g_t$ und damit

$$\exp(\Phi(g_s(z))) = \frac{\phi_{s,t}(g_s(z))}{g_s(z)} = \frac{g_t(z)}{g_s(z)}$$

$$= \exp(\Phi_t(z)) \cdot \exp(-\Phi_s(z)),$$

wobei $\Phi_s, \Phi_t \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

- $\exp(\Phi_s(z)) = \dfrac{g_s(z)}{z}$, $\Phi_s(0) = -s$
- $\exp(\Phi_t(z)) = \dfrac{g_t(z)}{z}$, $\Phi_t(0) = -t$

gewählt sind. Es gilt also:

$$\Phi_t(z) - \Phi_s(z) = \Phi(g_s(z))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}(\Phi(e^{i\Theta}))\, \frac{e^{i\Theta}+g_s(z)}{e^{i\Theta}-g_s(z)}\, d\Theta$$

$$= \left[\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\Theta_1}+g_s(z)}{e^{i\Theta_1}-g_s(z)}\right) + i\, \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\Theta_2}+g_s(z)}{e^{i\Theta_2}+g_s(z)}\right)\right]$$

$\Theta_1, \Theta_2 \in (\alpha, \beta)$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}(\Phi(e^{i\Theta}))\, d\Theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\Phi(e^{i\Theta}))\, d\Theta = \operatorname{Re}(\Phi(0)) = s - t$$

nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Wir sehen also

$$\frac{\Phi_t(z) - \Phi_s(z)}{t-s} = -\left[\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta_1} + g_s(z)}{e^{i\theta_1} - g_s(z)} \right) + i \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\theta_2} + g_s(z)}{e^{i\theta_2} - g_s(z)} \right) \right]$$

für $s < t < s+\delta$ und $|e^{i\theta_1} - \lambda(s)|, |e^{i\theta_2} - \lambda(s)| < \varepsilon$

Damit erhalten wir

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{\Phi_t(z) - \Phi_s(z)}{t-s} = - \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)}$$

Ähnlich zeigt man

$$\lim_{t \nearrow s} \frac{\Phi_t(z) - \Phi_s(z)}{t-s} = - \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)}.$$

Also: $t \mapsto \Phi_t(z)$ ist differenzierbar in s

und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(z) \Big|_{t=s} = - \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)}.$$

Wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(\Phi_t(z)) \Big|_{t=s} = \exp(\Phi_s(z)) \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(z) \Big|_{t=s}$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) \Big|_{t=s} = - \frac{g_s(z)}{z} \cdot \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)}$$

$$\dot{g}_s(z) = - g_s(z) \cdot \frac{\lambda(s) + g_s(z)}{\lambda(s) - g_s(z)}$$

Mit $\kappa(t) := \frac{1}{\lambda(t)}$ folgt nun die Behauptung. $\square$