Kap. 6 Die Milin-Vermutung

6.1 Definition:

Zu $f \in \mathcal{S}$ gibt es genau eine Funktion $\Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $\Phi(0) = 0$ und

$$\exp(\Phi(z)) = \frac{f(z)}{z} \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Die Koeffizienten $d_n(f), n \in \mathbb{N}$ in

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(f) z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

heißen die <u>logarithmischen Koeffizienten von f</u>

6.2 Satz (Milin-Lebedev, 1965):

Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\psi(0) = 1$ gegeben, so dass

$$\psi(z) = \exp(\varphi(z)) \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

erfüllt ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq \exp\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right),$$

wobei $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ und $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$

mit $\beta_0 = 1$ gesetzt wird.

Beweis:

Setzen wir

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} k^2 |\alpha_k|^2 \quad \text{und} \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2,$$

so folgt aus $\psi'(z) = \varphi'(z)\,\psi(z)$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$n^2 |\beta_n|^2 \leq A_n \cdot B_{n-1}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1} + |\beta_n|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n^2} A_n\right) B_{n-1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{A_n - n}{n(n+1)}\right) B_{n-1} \\ &\leq \frac{n+1}{n} \exp\left(\frac{A_n - n}{n(n+1)}\right) B_{n-1} \end{aligned}$$

Wegen $B_0 = 1$ folgt induktiv:

$$\begin{aligned} B_n &\leq (n+1) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - k}{k(k+1)}\right) \\ &= (n+1) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_k}{k(k+1)} - \frac{1}{k+1}\right)\right) \qquad (6.1) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weiter rechnen wir nun nach, dass

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} l^2 |\alpha_l|^2 \right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=l}^{n} l^2 |\alpha_l|^2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} l^2 |\alpha_l|^2 \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n} l |\alpha_l|^2 (n+1-l)$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_k}{k(k+1)} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right)(n+1-k) .$$

Man beachte hierbei, dass gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} .$$

Mit (6.1) folgt schließlich die Behauptung. □

Die Bieberbachsche Vermutung bettet sich nun in eine lange Implikationskette von Vermutungen ein. An oberster Stelle steht dabei die Milin-Vermutung.

Milin-Vermutung

Sind $d_n = d_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ die logarithmischen Koeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{S}$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left(k|d_k|^2 - \frac{4}{k}\right) \leq 0. \qquad (6.2)$$

Robertson-Vermutung

Für jede ungerade Funktion $g \in \mathcal{S}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2 \leq n, \qquad (6.3)$$

wobei gelte

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

6.3 Satz:

(a) Die Gültigkeit der Milin-Vermutung impliziert die Gültigkeit der Robertson-Vermutung.

(b) Die Gültigkeit der Robertson-Vermutung impliziert die Gültigkeit der Bieberbachschen Vermutung.

Beweis:

(a) Sei $g \in \mathcal{S}$ eine ungerade Funktion. Nach Satz 2.8 ist g Quadratwurzeltransformierte einer Funktion $h \in \mathcal{S}$, d.h.

$$g(z)^2 = h(z^2) \quad , \quad z \in \mathbb{D}.$$

Wir finden dann $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $\Phi_1(0) = 0$ und $\Phi_2(0) = 0$, so dass gilt

$$\exp(\Phi_1(z)) = \frac{h(z)}{z},$$

$$\exp(\Phi_2(z)) = \frac{g(z)}{z}.$$

Also haben wir

$$\exp(2\Phi_2(z)) = \left(\frac{g(z)}{z}\right)^2 = \frac{h(z^2)}{z^2} = \exp(\Phi_1(z^2))$$

und somit $\Phi_2(z) = \frac{1}{2}\Phi_1(z^2)$. Wir setzen

$$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2}\Phi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

$$\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(\varphi(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

Die Milin-Vermutung für h liefert

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left(k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

wegen $d_n(h) = 2\alpha_n$. Mit Satz 6.3 folgt nun

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Weil nun aber

$$\psi(z^2) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\Phi_1(z^2)\right) = \exp\left(\Phi_2(z)\right) = \frac{g(z)}{z}$$

gilt, sehen wir $c_{2k+1} = \beta_k$, d. h.

$$\sum_{k=1}^{n+1} |c_{2k-1}|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq n+1 .$$

(e) Ist $f \in \mathcal{S}$ gegeben, so besitzt f nach Satz 2.8 eine Quadratwurzeltransformierte $g \in \mathcal{S}$. Da g ungerade ist, haben wir

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1}, \quad c_0 := 1$$

und damit nach Bemerkung 2.9

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} c_{2(n-k)+1} \cdot c_{2k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cauchy-Schwarz liefert somit

$$\begin{aligned} |a_n|^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |c_{2(n-k)+1}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2\right)^2 \\ &\leq n^2, \end{aligned}$$

d. h. $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Wir werden nun die Milin-Vermutung beweisen. Dabei orientieren wir uns nicht am ursprünglichen Beweis von de Branges, sondern besprechen die (einfachere) Beweisvariante, die auf Lenard Weinstein (1991) zurückgeht.

Beweis der Milin-Vermutung

Nach Korollar 4.13 und wegen der Stetigkeit von

$$a_n : (\mathcal{O}(\mathbb{D}), d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

genügt es, die Bieberbachsche Vermutung für Schlitzabbildungen $f_0 \in \mathcal{S}$ zu zeigen, deren Schlitz γ ein Intervall der Form $(-\infty, c]$ durchläuft.

Gemäß Satz 5.11 gibt es dann eine Löwner-Kette $f \in \mathcal{L}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $f(\cdot, 0) = f_0$

(ii) $f(z,t) = e^t z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t) z^k \quad , \quad z \in \mathbb{D},\ t \geq 0.$

(iii) $c_k(t) := d_k(e^{-t} f_t)$, wobei $\lim_{t \to \infty} c_k(t) = \frac{2}{k}$.

(iv) $\operatorname{Re}\left(\frac{\dot f(z,t)}{z f'(z,t)}\right) \overset{(5.6)}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{1+\kappa(t) z}{1-\kappa(t) z}\right) > 0$

für alle $z \in \mathbb{D}$, $t \geq 0$.

6.4 Bemerkung:

Nach Voraussetzung durchläuft γ ein Intervall der Form $(-\infty, c]$, d.h. es gibt ein $t_0 \geq 0$ mit

$$\gamma([t_0,\infty)) = (-\infty, c].$$

Nach Konstruktion von f muss daher

$$f(z,t) = e^t\, k_0(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

für alle $t \geq t_0$ gelten. Insbesondere ist $c = -\frac{1}{4} e^{t_0}$.

Damit sehen wir, dass die Funktion

$$\Phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto -2 \log(1-z)$$

Hauptzweig

die Bedingungen $\Phi(0) = 0$ und

$$\exp(\Phi(z)) = \frac{1}{(1-z)^2} = e^{-t}\, \frac{f(z,t)}{z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

für alle $t \geq t_0$ erfüllt. Wegen

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

folgt $c_k(t) = d_k(e^{-t} f_t) = \frac{2}{k}$ für alle $t \geq t_0$

Dies bestätigt (iii).

6.5. Lemma:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$ gilt

$$\dot{c}_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\zeta, t) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} j c_j(t) \zeta^j \right) \frac{d\theta}{\zeta^k}$$

mit $\zeta = re^{i\theta}$ für ein $r \in (0,1)$ und

$$p(\zeta, t) := \frac{1 + \kappa(t)\zeta}{1 - \kappa(t)\zeta}.$$

Beweis:

Sei $r \in (0,1)$ beliebig vorgegeben. Dann gilt gemäß der Cauchyschen Integralformel

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{\Phi_t(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_t(\zeta)}{\zeta^k} \, d\theta \qquad \begin{pmatrix} \zeta = re^{i\theta} \\ d\zeta = i\zeta \, d\theta \end{pmatrix}$$

mit $\Phi_t \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ bestimmt durch $\Phi_t(0) = 0$ und $\exp(\Phi_t(z)) = \frac{e^{-t} f_t(z)}{z}$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Es folgt nun

$$\underbrace{\exp(\Phi_t(z))}_{= \frac{e^{-t} f_t(z)}{z}} \dot{\Phi}_t(z) = \frac{\partial}{\partial t} \exp(\Phi_t(z))$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-t} f_t(z)}{z}$$

$$= -\frac{e^{-t} f_t(z)}{z} + \frac{e^{-t} \dot{f}_t(z)}{z}$$

und damit

$$\dot{\Phi}_t(z) = \frac{\dot{f}_t(z)}{f_t(z)} - 1 = z\,\frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \cdot p(z,t) - 1 .$$

Wir erhalten

$$\dot{c}_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\dot{\Phi}_t(\varsigma)}{\varsigma^k}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varsigma,t)\,\varsigma\,\frac{f_t'(\varsigma)}{f_t(\varsigma)}\,\frac{d\theta}{\varsigma^k} .$$

Weil ferner

$$\underbrace{\exp(\Phi_t(z))}_{= \frac{e^{-t} f_t(z)}{z}}\,\Phi_t'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\exp(\Phi_t(z))$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{e^{-t} f_t(z)}{z}$$

$$= \frac{e^{-t} f_t'(z)}{z} - \frac{e^{-t} f_t(z)}{z^2}$$

und damit

$$\frac{f_t'(z)}{f_t(z)} = \frac{1}{z} + \Phi_t'(z)$$

$$\overset{(iii)}{=} \frac{1}{z}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} j\,c_j(t)\,z^j\right)$$

gilt, folgt die behauptete Formel. $\square$

Wir betrachten nun die Funktion

$$w : \mathbb{D} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \longmapsto k_0^{-1}(e^{-t} k_0(z))$$

aus Aufgabe 3, Blatt 6. Diese erfüllt $w_0(z) = z$,

$$\frac{w}{(1-w)^2} = e^{-t} \frac{z}{(1-z)^2} \qquad (6.4)$$

und nach Aufgabe 1, Blatt 6

$$\dot{w} = -w \frac{1-w}{1+w}. \qquad (6.5)$$

6.6. Lemma:

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k \, |c_k(t)|^2 \right) z^k \qquad (t \geq 0)$$

konvergiert normal auf $\mathbb{D}$ und es gilt

$$\omega(z) := \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k \, |c_k(0)|^2 \right) z^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \left(\frac{4}{k} - k \, |c_k(0)|^2 \right) \right) z^n.$$

Beweis:

Da $\Phi_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) z^n$ auf $\mathbb{D}$ holomorph ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(t)|} \leq 1$. Damit hat die obige Reihe den Konvergenzradius 1. Die Darstellung von ω rechnet man leicht nach. $\square$

Damit erhalten wir nun für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$\omega(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k\,|c_k(0)|^2 \right) z^k$$

$$\overset{(iii)}{\underset{(6.4)}{=}} -\int_0^{\infty} \frac{e^t w}{(1-w)^2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k\,|c_k(t)|^2 \right) w^k \right) dt$$

6.7. Lemma:

Es gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, w^k \right) dt,$$

wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$A_k(t) := \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p(\varsigma, t)) \left| 2\left(1 + \sum_{j=1}^{k} j\, c_j(t)\, \varsigma^j\right) - k\, c_k(t)\, \varsigma^k \right|^2 d\theta.$$

gesetzt wird, d.h. es gilt $A_k(t) \geq 0$.

Beweis:

① Wir berechnen zunächst:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k\,|c_k(t)|^2 \right) w^k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k \frac{d}{dt}\left(c_k(t)\overline{c_k(t)}\right) w^k + \left(\frac{4}{k} - k\,|c_k(t)|^2 \right) k\, w^{k-1} \dot{w} \right]$$

$$\overset{(6.5)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k \frac{d}{dt}\left(c_k(t)\overline{c_k(t)}\right) w^k - \left(4 - k^2 |c_k(t)|^2\right) \frac{1-w}{1+w}\, w^k \right]$$

$$= -\left[2 + \sum_{k=1}^{\infty} k\, \underbrace{\frac{d}{dt}\left(c_k(t)\overline{c_k(t)}\right)}_{= \dot{c}_k(t)\overline{c_k(t)} + c_k(t)\overline{\dot{c}_k(t)}} w^k \right] + \frac{1-w}{1+w} \left[\underbrace{2 \cdot \frac{1+w}{1-w} - \frac{4w}{1-w}}_{=2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k(t)|^2 w^k \right]$$

Damit gilt also

$$\omega(z) = \mathcal{U} + \tilde{\mathcal{U}} + V$$

mit

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty \frac{e^t w}{(1-w)^2}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty k\,\dot{c}_k(t)\overline{c_k(t)}\,w^k\right]dt,$$

$$\tilde{\mathcal{U}} = \int_0^\infty \frac{e^t w}{(1-w)^2}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty k\,c_k(t)\overline{\dot{c}_k(t)}\,w^k\right]dt,$$

$$V = -\int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[2 + \sum_{k=1}^\infty k^2 |c_k(t)|^2 w^k\right]dt.$$

(2) Wir setzen $\eta_k := k\,\dot{c}_k(t)\overline{c_k(t)}$ und $\eta_0 := 1$.

Es gilt dann

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\cdot\frac{1+w}{1-w}\cdot\left[\sum_{k=0}^\infty \eta_k w^k\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[2\sum_{k=0}^\infty w^k - 1\right]\left[\sum_{k=0}^\infty \eta_k w^k\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\left(2(1+\eta_1+\dots+\eta_k)-\eta_k\right)}_{=:\,\chi_k} w^k\right]dt,$$

also

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty \chi_k w^k\right]dt$$

und analog

$$\tilde{\mathcal{U}} = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[1 + \sum_{k=1}^\infty \overline{\chi}_k w^k\right]dt.$$

③ Wir setzen $\gamma_k := c_k(t)\, k\, \zeta^k$ mit $\zeta = r e^{i\theta}$.

Die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen liefert damit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\,\gamma_k\,\overline{\gamma_\ell}\,d\theta = 0 \quad \text{für} \quad k > \ell$$

und wegen $p(0,t) = 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\,\gamma_k\,\overline{\gamma_\ell}\,d\theta = k^2 |c_k(t)|^2 r^{2k} \quad \text{für} \quad k = \ell .$$

④ Unter Verwendung von Lemma 6.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} r^{2k}\eta_k &= k\,\dot c_k(t)\,\overline{c_k(t)}\,r^{2k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\Big)\overline{\gamma_k}\,d\theta \\ &\overset{③}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\Big(1 + \sum_{j=1}^{k}\gamma_j\Big)\overline{\gamma_k}\,d\theta . \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\,\underbrace{\Big|1 + \sum_{j=1}^{k}\gamma_j\Big|^2}\,d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \Big(1 + \sum_{\ell=1}^{k}\gamma_\ell\Big)\Big(1 + \sum_{j=1}^{k}\overline{\gamma_j}\Big) \\ &= \Big(1 + \sum_{\ell=1}^{k}\gamma_\ell\Big) + \sum_{j=1}^{k}\Big(1 + \sum_{\ell=1}^{k}\gamma_\ell\Big)\overline{\gamma_j} \end{aligned}$$

$$\overset{③}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\zeta,t)\left[\sum_{j=1}^{k}\Big(1 + \sum_{\ell=1}^{j}\gamma_\ell\Big)\overline{\gamma_j}\right] d\theta + 1$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varsigma,t)\left(1+\sum_{l=1}^{j}\gamma_l\right)\overline{\gamma_j}\,d\theta$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} r^{2j}\eta_j$$

Wir haben also:

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varsigma,t)\left|1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right|^2 d\theta = 1+\sum_{j=1}^{k}\eta_j .$$

(5) Weiter ergibt sich mit (4), dass

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varsigma,t)\left[2\left|1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right|^2 - \left(1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right)\overline{\gamma_k}\right] d\theta$$

$$= 2\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{k}\eta_j\right) - \eta_k = \chi_k .$$

Wir erhalten somit

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varsigma,t)\underbrace{\left|2\left(1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right)-\gamma_k\right|^2}\,d\theta$$

$$= 4\left|1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right|^2 - 2\left(1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right)\overline{\gamma_k}$$

$$- 2\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\overline{\gamma_j}\right)\gamma_k - |\gamma_k|^2$$

$$\longrightarrow 0$$

$$\overset{(3)}{=} 2\chi_k - k^2|c_k(t)|^2$$

und ferner

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{p(\varsigma,t)}\left|2\left(1+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right)-\gamma_k\right|^2 d\theta$$

$$= 2\overline{\chi_k} - k^2|c_k(t)|^2 .$$

⑥ Nach ① und ② haben wir nun

$$\omega(z) = u + \hat{u} + v$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[\sum_{k=1}^\infty (\chi_k + \overline{\chi_k} - k^2 |c_k(t)|^2) w^k\right] dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[\sum_{k=1}^\infty A_k(t) w^k\right] dt,$$

da nach ⑤ gilt

$$\chi_k + \overline{\chi_k} - k^2 |c_k(t)|^2$$

$$= \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p(\zeta,t)) \left|2\left(1+\sum_{j=1}^{k} \gamma_j\right) - \gamma_k\right|^2 d\theta$$

$$= A_k(t).$$

$\square$

Wir schreiben nun:

$$\frac{e^t w^{k+1}}{1-w^2} = \sum_{n=0}^\infty \Lambda_n^k(t) z^{n+1}. \qquad (6.6)$$

Weil damit nach Lemma 6.7

$$\omega(z) = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left[\sum_{k=1}^\infty A_k(t) w^k\right] dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty A_k(t) \left[\sum_{n=0}^\infty \Lambda_n^k(t) z^{n+1}\right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty g_n(t)\, dt\right) z^{n+1}$$

für

$$g_n(t) := \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \Delta_n^k(t), \quad t \geq 0$$

gilt, reduziert sich der Beweis der Milin-Vermutung auf den Nachweis von $\Delta_n^k(t) \geq 0$.
Diese Aussage hängt nicht mehr von der speziellen Löwner-Kette f ab.

6.8 Lemma:

Für alle $t \geq 0$ und $\Theta \in (0, 2\pi)$ gibt es genau ein $\gamma \in (0,\pi)$ mit $\frac{e^{-t}}{2(1-\cos(\gamma))} = \frac{1}{2(1-\cos(\Theta))}$ und

$$h_\gamma(z) := \frac{z}{1-2\cos(\gamma)z+z^2}$$

$$= \frac{e^t w}{1-w^2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\Theta) w^k\right)$$

$$= \frac{e^t w}{1-w^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^k(t) z^{n+1} \right) \cos(k\Theta)$$

Beweis:

Die ersten Behauptungen wurden in Aufgabe 3 (c), Blatt 6 gezeigt. Die letzte ergibt sich direkt nach Einsetzen von (6.6).

□

Wir betrachten nun $\eta \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $\eta(0) = 1$ und

$$\eta(z)^2 = \frac{h_\gamma(z)}{z} = \frac{1}{1-2\cos(\gamma)z+z^2}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

6.9 Lemma:

Es gilt

$$\eta(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos(\gamma))\, z^n,$$

wobei P_n das n-te Legendre-Polynom bezeichnet.

Demnach ist

$$P_n(y) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n}\left((y^2-1)^n\right) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Durch Aufstellen geeigneter Rekursionen. $\square$

6.10 Satz:

Mit den Legendre-Funktionen

$$P_n^k(y) := (-1)^k (1-y^2)^{k/2} \frac{d^k}{dy^k} P_n(y)$$

gilt für alle $\phi, \Theta \in \mathbb{R}$:

$$P_n\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\cos(\Theta)\right)$$

$$= P_n(\cos(\phi))^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos(\phi))^2 \cos(k\Theta)$$

Beweis: Formelsammlung! $\square$

Wir wenden dies auf $\phi \in \mathbb{R}$ mit $e^{-t/2} = \sin(\phi)$ an und rechnen nach, dass gilt

$$\cos(\gamma) = (1-e^{-t}) + e^{-t}\cos(\Theta)$$

$$= \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\cos(\Theta).$$

Aus Lemma 6.9 und Satz 6.10 erhalten wir

$$\begin{aligned}\eta(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n\big(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\cos(\Theta)\big)\, z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(\phi) + \sum_{k=1}^{n} b_n^k(\phi)\cos(k\Theta)\Big)\, z^n\end{aligned}$$

mit

$$a_n(\phi) = P_n(\cos(\phi))^2 \geq 0,$$

$$b_n^k(\phi) = 2\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\, P_n^k(\cos(\phi))^2 \geq 0.$$

Wegen

$$2\cos(k\Theta)\cos(l\Theta) = \cos((k+l)\Theta) + \cos((k-l)\Theta)$$

folgt nun aus $k_\gamma(z) = z\,\eta(z)^2$, dass die Koeffizienten vor $2z^{n+1}\cos(k\Theta)$ positiv sind.

Gemäß Lemma 6.8 bedeutet dies

$$\Delta_n^k(t) \geq 0.$$

Dies schließt den Beweis der Milin- und damit auch der Bieberbachschen Vermutung ab. $\blacksquare$