UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Musterlösung zu Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

für die durch die folgenden Vorschriften definierten Funktionen:

(a) $f(z) = \sin(\pi z)$

Lösung. Wir wissen, dass die Funktion $z \mapsto \sin(\pi z)$ auf $\mathbb{C}$ die Nullstellenmenge $\mathbb{Z}$ besitzt und dass alle diese Nullstellen einfach sind. Wegen

$$D(0,\pi) \cap \mathbb{Z} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

folgt dann gemäß dem Argumentprinzip

$$\int_{\partial D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 14\pi i.$$

(b) $f(z) = \cos(\pi z)$

Lösung. Bekanntlich hat die Funktion $z \mapsto \cos(\pi z)$ auf $\mathbb{C}$ die Nullstellenmenge $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, wobei jede dieser Nullstellen einfach ist. Wir erhalten

$$D(0,\pi) \cap \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) = \frac{1}{2} + \{-3,-2,-1,0,1,2\}$$

und damit nach dem Argumentprinzip

$$\int_{\partial D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 12\pi i.$$

(c) $f(z) = \tan(\pi z)$

Lösung. Da die Funktion $z \mapsto \tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ auf $D(0,\pi)$

– in $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ Nullstellen erster Ordnung und
– in $\frac{1}{2} + \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ Polstellen erster Ordnung

hat, ergibt sich wieder mit dem Argumentprinzip

$$\int_{\partial D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i.$$

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\gamma : [0,1] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve. Weiter sei eine auf γ^* nullstellenfreie Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben. Mit $m_f(a) \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Vielfachheit einer Nullstelle a von f. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \sum_{a\in f^{-1}(\{0\})} m_f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a).$$

Folgern Sie damit erneut das Ergebnis aus Aufgabe 2 von Blatt 8.

Lösung. Da f auf γ^* nach Voraussetzung keine Nullstellen hat, verläuft die Kurve $f\circ\gamma$ ganz in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ihre Windungszahl um 0 können wir dann gemäß der aus der Vorlesung bekannten Formel berechnen: Es gilt der bemerkenswerte Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{1}{(f\circ\gamma)(t)}(f\circ\gamma)'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,
\end{aligned}$$

der auch den Namen „Argumentprinzip“ begründet. Die behauptete Identität folgt nun mit Hilfe des Argumentprinzips:

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in f^{-1}(\{0\})} m_f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a)$$

Wenden wir uns nun erneut dem Beispiel aus Aufgabe 2 von Blatt 8 zu: Für $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 \neq r_2$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ haben wir dort die Kurve

$$\alpha:\ [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto r_1 e^{2n_1\pi it} + r_2 e^{2n_2\pi it}$$

betrachtet, die sich mit der holomorphen Funktion

$$f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto r_1 z^{n_1} + r_2 z^{n_2}$$

und der Kurve

$$\gamma:\ [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{2\pi it}$$

in der Form $\alpha = f\circ\gamma$ schreiben lässt. Mit obigen Überlegungen folgt nun

$$\operatorname{Ind}_\alpha(0) = \sum_{a\in f^{-1}(\{0\})} m_f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \sum_{a\in f^{-1}(\{0\})\cap\mathbb{D}} m_f(a),$$

d.h. die gesuchte Windungszahl $\mathrm{Ind}_\alpha(0)$ liefert die Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von f in $\mathbb{D}$.
Wir nehmen nun an, dass $n_2 \geq n_1$ gilt (was wir durch Umnummerieren immer erreichen können), und setzen $n := n_2 - n_1$. Insbesondere gilt dann für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = r_1 z^{n_1} + r_2 z^{n_2} = r_2 z^{n_1}\Big(\frac{r_1}{r_2} + z^n\Big),$$

womit wir schließlich folgern:

- Ist $r_2 > r_1$, so hat f in 0 eine Nullstelle der Ordnung n_1 und in $\sqrt[n]{\frac{r_1}{r_2}} \exp\left(\frac{\pi i(2k+1)}{n}\right)$ für $k = 0, \ldots, n-1$ jeweils eine Nullstelle erster Ordnung. Es gilt also

$$\mathrm{Ind}_\alpha(0) = \sum_{a \in f^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{D}} m_f(a) = n_1 + n = n_2.$$

- Gilt andernfalls $r_1 > r_2$, so hat f lediglich in 0 eine Nullstelle der Ordnung n_1. Es gilt also

$$\mathrm{Ind}_\alpha(0) = \sum_{a \in f^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{D}} m_f(a) = n_1.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Bereich:

(a) $p(z) = z^4 + 4z - 2 \quad$ auf $D_1(0)$.

Lösung. Wir betrachten das Polynom

$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto 4z - 2$$

und rechnen nach, dass

$$|p(z) - q(z)| = |z|^4 = 1 < 2 \leq 4\left|z - \frac{1}{2}\right| = |q(z)|$$

für alle $z \in \partial D_1(0)$ gilt. Da q auf $D_1(0)$ genau eine Nullstelle in $z = \frac{1}{2}$ besitzt, hat nach dem Satz von Rouché auch p genau eine Nullstelle in $D_1(0)$.

(b) $p(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3} \quad$ auf $D_1(0)$.

Lösung. Wir betrachten das Polynom

$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto z^5 + \frac{1}{3},$$

welches klarerweise 5 Nullstellen in $D_1(0)$ besitzt, und rechnen nach, dass

$$|p(z) - q(z)| = \left|\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2\right| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3} \leq \left|z^5 + \frac{1}{3}\right| = |q(z)|$$

für alle $z \in \partial D_1(0)$ gilt. Nach dem Satz von Rouché hat damit auch p genau 5 Nullstellen in $D_1(0)$.

(c) $p(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}$ auf $D_{\frac{1}{2}}(0)$.

Lösung. Wir betrachten das (nullstellenfreie) Polynom

$$q: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{3}$$

und stellen fest, dass

$$|p(z) - q(z)| = \left|z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2\right| \leq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\Big) < \frac{1}{3} = |q(z)|$$

für alle $z \in \partial D_{\frac{1}{2}}(0)$ gilt. Nach dem Satz von Rouché kann damit auch p keine Nullstellen in $D_{\frac{1}{2}}(0)$ besitzen.

Aufgabe 4. Sei $\lambda > 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-z} + z = \lambda$$

in der rechten Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ genau eine Lösung z hat, die überdies reell ist.

Lösung. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$Q_n := \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < \mathrm{Re}(z) < \lambda + (n+1),\ -(n+1) < \mathrm{Im}(z) < n+1\} \subset \mathbb{H}$$

und überzeugen uns unmittelbar davon, dass gilt

$$\min_{z \in \partial Q_n} |z - \lambda| > 1.$$

Weiter definieren wir die beiden Funktionen

$$f: \ \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{-z} + z - \lambda$$

und

$$g: \ \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z - \lambda$$

und rechnen für diese nach, dass

$$|f(z) - g(z)| = |e^{-z}| = e^{-\mathrm{Re}(z)} \leq 1 < |z - \lambda| = |g(z)|$$

für alle $z \in \partial Q_n$ erfüllt ist, wonach f und g gemäß dem Satz von Rouché auf Q_n gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzen müssen. Da g aber genau an der Stelle λ verschwindet, hat somit f auf Q_n genau eine Nullstelle.
Beachten wir nun $\mathbb{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$, so können wir folgern, dass f auf $\mathbb{H}$ genau eine Nullstelle besitzt, d.h. die Gleichung

$$e^{-z} + z = \lambda$$

hat in der rechten Halbebene $\mathbb{H}$ genau eine Lösung z. Mit unseren bisherigen Überlegungen wissen wir schon, dass z in Q_1 liegen muss. Wir beobachten nun, dass aus

$$e^{-z} + z = \lambda$$

durch komplexe Konjugation

$$e^{-\overline{z}} + \overline{z} = \lambda$$

folgt, weshalb mit $z \in \mathbb{H}$ auch $\overline{z} \in \mathbb{H}$ eine Lösung der betrachteten Gleichung liefert. Die Eindeutigkeit der Lösung erzwingt nun $z = \overline{z}$, d.h. $z \in \mathbb{H} \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge von auf G nullstellenfreien, holomorphen Funktionen. Zeigen Sie, dass die nach dem Satz von Weierstraß holomorphe Grenzfunktion f entweder identisch auf G verschwindet oder ebenfalls keine Nullstelle besitzt.

Lösung. Offenbar genügt es zu zeigen, dass f im Fall $f \not\equiv 0$ bereits nullstellenfrei sein muss. Wir nehmen also $f \not\equiv 0$ an und geben uns $z_0 \in G$ beliebig vor. Es gibt dann ein $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset G$ und

$$M := \min_{z\in\partial D(z_0,r)} |f(z)| > 0,$$

wobei letztere Bedingung erfüllt werden kann, da die Nullstellenmenge von f gemäß dem Identitätssatz keinen Häufungspunkt in G hat. Da $\partial D(z_0, r)$ kompakt ist, finden wir nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\max_{z\in\partial D(z_0,r)} |f(z) - f_n(z)| < M$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Demnach haben wir für $n \geq n_0$

$$|f(z) - f_n(z)| < M \leq |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial D(z_0, r),$$

weshalb der Satz von Rouché besagt, dass f und f_n auf $D(z_0, r)$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzen. Weil f_n nach Voraussetzung nullstellenfrei ist, kann somit auch f keine Nullstellen auf $D(z_0, r)$ besitzen und es gilt speziell $f(z_0) \neq 0$.
Da $z_0 \in G$ beliebig vorgegeben war, ist f auf ganz G nullstellenfrei, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 6.

(a) Konstruieren Sie ein unendliches Produkt, das auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit der Nullstellenmenge $\{\frac{\pi}{2} + \pi n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ konvergiert. (Um welche bekannte Funktion könnte es sich dabei handeln?)

Lösung. Wir betrachten das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{4z^2}{\pi^2(2n-1)^2}\Big),$$

welches wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Ferner sind die Nullstellen von f durch die Nullstellen der Funktionen f_n gegeben. Wegen

$$f_n(z) = 1 - \frac{4z^2}{\pi^2(2n-1)^2} = \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\Big(\frac{2n-1}{2}\pi - z\Big)\Big(\frac{2n-1}{2}\pi + z\Big)$$

hat f_n die Nullstellen

$$\frac{2n-1}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi(n-1) \qquad \text{und} \qquad -\frac{2n-1}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - \pi n,$$

weshalb die Funktion f das Gewünschte leistet. Bedenkt man, dass auch $z \mapsto \cos(z)$ die angegebenen Nullstellen besitzt, liegt der Verdacht $f = \cos$ nahe. Für den Nachweis, dass diese Vermutung in der Tat richtig ist, sind allerdings einige Vorbereitungen nötig, weshalb wir an dieser Stelle auf einen Beweis verzichten wollen.

(b) Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - nz^n)$$

auf $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ kompakt gegen eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f konvergiert, und bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f.

Zeigen Sie weiter, dass jeder Punkt der Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f ist.

Lösung. Wir bemerken zunächst, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

den Konvergenzradius 1 hat, also auf $\mathbb{D}$ kompakt konvergiert. Dies impliziert, dass das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - nz^n)$$

auf $\mathbb{D}$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Weiter wissen wir, dass die Nullstellen von f durch die Nullstellen der Faktoren in der Produktdarstellung gegeben sind. Wir sehen also, dass f die Nullstellenmenge

$$N := \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) \middle|\ n \in \mathbb{N},\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

besitzt und dass jede dieser Nullstellen einfach ist.

Ist nun $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ gegeben, so finden wir $\vartheta \in [0, 1)$ mit $\zeta = e^{2\pi i\vartheta}$. Für den Nachweis, dass ζ Häufungspunkt von N ist, genügt es klarerweise zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $z \in N$ mit $|z - \zeta| < \varepsilon$ existiert. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da die Funktion

$$[0, 1) \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{2\pi it}$$

in ϑ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|e^{2\pi it} - e^{2\pi i\vartheta}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } |t - \vartheta| < \delta.$$

Die Konvergenz der Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 impliziert weiter, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left| \frac{1}{\sqrt[n]{n}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da die Menge

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1) = \left\{ \frac{k}{n} \middle|\ n \geq n_0,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

dicht in $[0, 1)$ liegt, gibt es nun ein $n \geq n_0$ und dazu ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $|\vartheta - \frac{k}{n}| < \delta$, d.h. es gilt

$$\left| \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) - \exp(2\pi i\vartheta) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammenfassend erhalten wir für $z := \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \exp(\frac{2\pi ik}{n}) \in N$ wie gewünscht

$$|\zeta - z| \leq \left| 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right| + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left| \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) - \exp(2\pi i\vartheta) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$