Funktionentheorie

0. Erinnerung an die komplexen Zahlen

0.1. Definition: Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

mit Addition

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2,\, y_1+y_2)$$

und Multiplikation

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1).$$

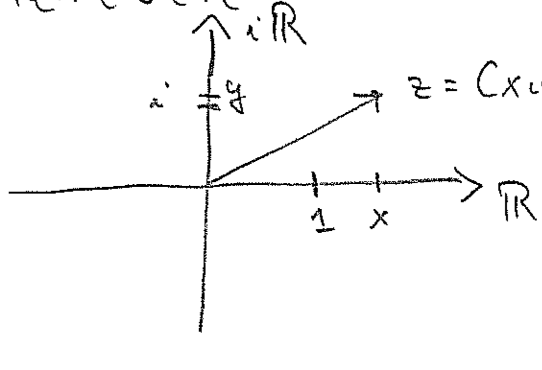
Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ und setzen

$$i := (0,1) \in \mathbb{C} \qquad (\text{samt } i^2 = -1);$$

dann ist also

$$(x,y) = x + iy$$

$\mathbb{C} \mathrel{\hat{=}}$ Zahlenebene



0.2. Notationen: Für $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ setzen wir

(i) $\mathrm{Re}(z) := x$ Realteil

(ii) $\mathrm{Im}(z) := y$ Imaginärteil

(iii) $\bar{z} := x - iy$ Konjugierte von z

(iv) $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z

0.3. Bemerkungen: 1) $\mathbb{C}$ ist Körper
(das ist was Besonderes; $\mathbb{R}^n$ kann, für $n \geq 3$, nicht zum Körper gemacht werden)

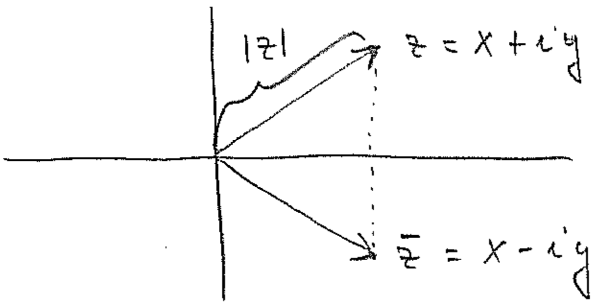
2) $\mathbb{C}$ kann im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ nicht angeordnet werden.

3) $|\cdot|$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}$
(nämlich der euklidische Abstand des $\mathbb{R}^n$ für $n = 2$)
Somit können wir über Konvergenz von komplexen Zahlen reden, und es gilt:
$\mathbb{C}$ ist (wie alle $\mathbb{R}^n$) vollständig

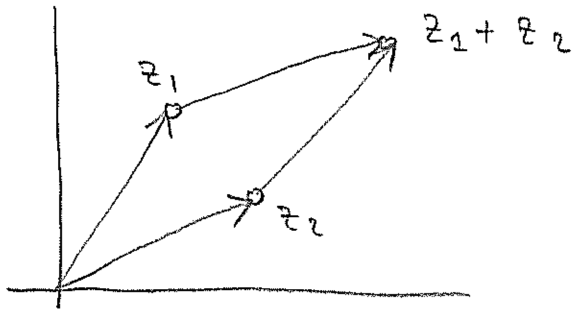
4) Operationen in $\mathbb{C}$ haben anschauliche Interpretationen in der Zahlenebene

$|z| \mathrel{\hat{=}}$ Länge des Vektors z

$z \mapsto \bar{z} \quad \mathrel{\hat{=}}$ Spiegelung an reeller Achse



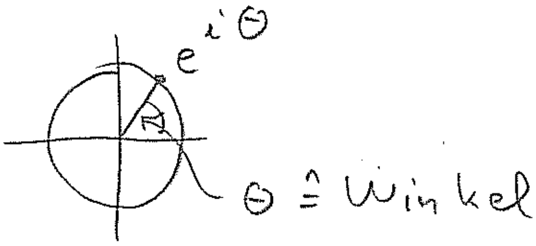
Addition in $\mathbb{C}$ $\mathrel{\hat{=}}$ Addition von Vektoren in $\mathbb{R}^2$



Für Verständnis der Multiplikation folgende Polarzerlegung ist relevant:

$\forall z \neq 0 \; \exists$ eindeutige Darstellung der Form

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{mit } r > 0, \; \theta \in [0, 2\pi)$$



Damit gilt dann:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

also: Multiplikation in $\mathbb{C}$

$\hat{=}$ Betragsmultiplikation + Winkeladdition

5) Vgl. auch Kap. 12 + 13 von Analysis I, insbesondere wurde dort die exp-Funktion im Komplexen definiert

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

wesentliche Funktionalgleichung:

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$