1. komplexe Differentiation

1.1. Notationen: 1) Für $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$D(a;r) = D_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r \}$$

offene Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt a

$$\overline{D}(a;r) = \overline{D}_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r \}$$

abgeschlossene Kreisscheibe

$$\mathring{D}(a;r) = \mathring{D}_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r \}$$

$$= D_r(a) \setminus \{a\}$$

punktierte offene Kreisscheibe

2) Eine offene Menge $E \subset \mathbb{C}$ heißt <u>zusammenhängend</u>, falls sie nicht als eine Vereinigung von ~~zwei~~ disjunkten nichtleeren offenen Mengen geschrieben werden kann.

Die maximalen zshgden Teilmengen von E heißen <u>Komponenten</u> von E

(E ist also Vereinigung seiner Komponenten.)

3) Ein Gebiet ist eine nichtleere zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine beliebige offene Menge in $\mathbb{C}$ (d.h. Ω ist Vereinigung von disjunkten Gebieten)

1.2. Def.: 1) Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ setzen wir (falls der Grenzwert existiert)

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

und nennen $f'(z_0)$ die Ableitung von f in z_0.

2) Die Fkt f ist holomorph (oder analytisch) in Ω, falls $f'(z_0)$ für alle $z_0 \in \Omega$ existiert.

3) Die Klasse der in Ω holomorphen Fkten wird mit $\mathcal{O}(\Omega)$ (oder auch $H(\Omega)$) bezeichnet:

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph in } \Omega \}$$

1.3. Bem: 1) $f'(z_0)$ existiert $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.d.

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in \dot{D}_\delta(z_0)$$

2) Unter der Identifizierung $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$,
$z = x + iy \hat{=} (x, y)$

muß der Grenzwert im Differenzenquotienten entlang der x-Achse also mit dem Grenzwert entlang der y-Achse übereinstimmen. Dies ist eine viel stärkere Forderung als die Differentierbarkeit von

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

im Sinne der Analysis II

(dort müssen die Grenzwerte entlang der x- bzw. y-Achse existieren, können aber verschieden sein)

1.4. Beispiele: 1) $f(z) = \bar{z}$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

i) Als Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

ist dies (reell) differenzierbar, mit

Differential (2x2-Matrix der partiellen Ableitungen)

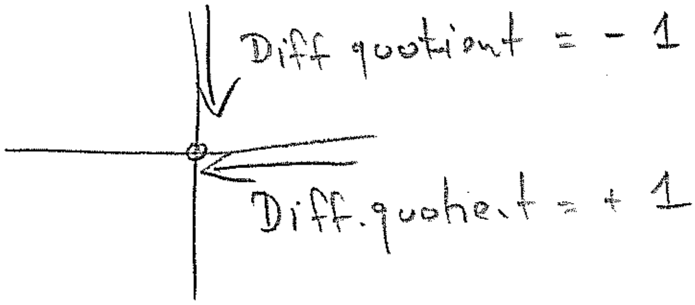
$$D.f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Als Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist f nicht differenzierbar.

Betrachte $z_0 = 0$

$z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$ $\qquad$ $z = iy \in i\mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = -z$

$\Rightarrow \dfrac{\bar{z} - \bar{0}}{z - 0} = 1 \quad \forall x \neq 0$ $\qquad$ $\Rightarrow \dfrac{\bar{z} - \bar{0}}{z - 0} = -1 \quad \forall y \neq 0$



$\Rightarrow f'(0)$ existiert nicht!

2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$\quad z \mapsto z^n$

Dann ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z_0 + \ldots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}$$

$$\xrightarrow{z \to z_0} n z_0^{n-1}$$

also: $z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und

$$(z^n)' = n z^{n-1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

3) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

Dann ist

$$\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \frac{\frac{z_0 - z}{z \cdot z_0}}{z - z_0} = -\frac{1}{z \cdot z_0} \xrightarrow{z \to z_0} -\frac{1}{z_0^2}$$

also

$\frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ und

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

<u>1.5. Bem:</u> Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in z_0 diffbar. Dann ist f auch als Fkt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reell diffbar, d. h. das Differential $Df(z_0)$ existiert.

Frage: Was hat die komplexe Zahl $f'(z_0)$ mit der 2×2-Matrix $Df(z_0)$ zu tun?
(mit reellen Einträgen)

Dazu beachte: $Df(z_0)$ ist lineare Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die f am besten in z_0 approximiert

Im Komplexen ist diese lineare Abb. durch Multiplikation $\underline{\text{mit } f'(z_0)}$ gegeben, d.h. es muß gelten

$$\underset{\underset{(x,y)}{\shortparallel}}{Df(z_0)\, z} = f'(z_0)\cdot \underset{\underset{x+iy}{\shortparallel}}{z}$$

Setze $u := \operatorname{Re} f$ also $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$v := \operatorname{Im} f$

und $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Falls also $f'(z_0) = a + ib$, dann muß gelten

$$Df\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (a+ib)\cdot 1 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

und

$$Df\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (a+ib)\cdot i = ia - b = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)^t$$

Somit muß gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

sind die <u>Cauchy-Riemannschen Dglen</u>.

Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(a) f ist in z_0 komplex diffbar

(b) f als Fkt $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist in $z_0 \in \mathbb{R}^2$ reell diffbar und für die partiellen Ableitungen gelten die Cauchy-Riemannschen Dglen.

<u>16. Satz</u>: 1) Falls $f'(z_0)$ existiert, so ist f in z_0 stetig

2) Sei $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann ist auch $f+g$, $f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)$ und es gilt für $z_0 \in \Omega$

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f\cdot g)(z_0) = f'(z_0)\cdot g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)$$

3) Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(\Omega) \subset \Omega_1$ und $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$. Setze $h := g \circ f$.

Dann ist $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ und es gilt:

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))\cdot f'(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega$$

<u>Beweis:</u> wie im Reellen

1) und 2) klar

3) Setze $w_0 := f(z_0)$

Dann gilt

$$f(z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \varepsilon(z))(z - z_0)$$

$$g(w) - g(w_0) = (g'(w_0) + \eta(w))(w - w_0)$$

wobei $\varepsilon(z) \to 0$ für $z \to z_0$

$\eta(w) \to 0$ für $w \to w_0$

Setze nun $w = f(z)$ und betrachte für $z \neq z_0$

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{z - z_0}$$

$$= \underbrace{(g'(w_0) + \eta(w))\cdot(f'(z_0) + \varepsilon(z))}_{\to\, g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)}$$

1.7. Erinnerung an Potenzreihen:

In Analysis 1 wurde gezeigt: Für jede Potenzreihe

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad\qquad (c_n, a \in \mathbb{C})$$

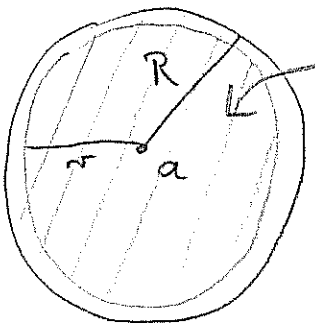
gilt es eine Zahl $R \in [0, \infty]$

(R heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe),

so dass gilt:

i) Für jedes $r < R$ konvergiert $(*)$ absolut und glm in $\overline{D}_r(a)$

ii) Für $z \notin \overline{D}_R(a)$ divergiert $(*)$



abs. + glm Konvergenz

Divergenz außerhalb

Wir werden im folgenden "explizite" Formel für R benötigen. Es gilt: R ist durch das "Wurzelkriterium" gegeben, d.h.

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad \left(\text{wobei } \frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0 \right)$$

Beweis: Setze $\rho := \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

Wir müssen zeigen, dass $\rho = R$, d.h.

(i) für $|z-a| < \rho$ konvergiert $(*)$

(ii) für $|z-a| > \rho$ divergiert $(*)$

(i) Sei $|z-a| = r < \rho$

Wähle r_0 mit $r < r_0 < \rho$

dann gilt:

$$\frac{1}{r_0} > \frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0} > \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{für } n \geq N$$

$$\Rightarrow |c_n \cdot r_0^n| < 1 \quad \text{für } n \geq N$$

Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{N} c_n (z-a)^n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z-a)^n}$$

$$|\ldots| \leq \sum_{n=N+1} |c_n| r^n = \sum_{n=N+1} \underbrace{|c_n| \cdot r_0^n}_{<1} \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

$$\leq \sum \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leftarrow \text{konvergiert, da } \left|\frac{r}{r_0}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{konvergiert absolut}$$

ii) Sei $|z-a| = r > \rho$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

$\Rightarrow \exists$ unendl. viele n mit

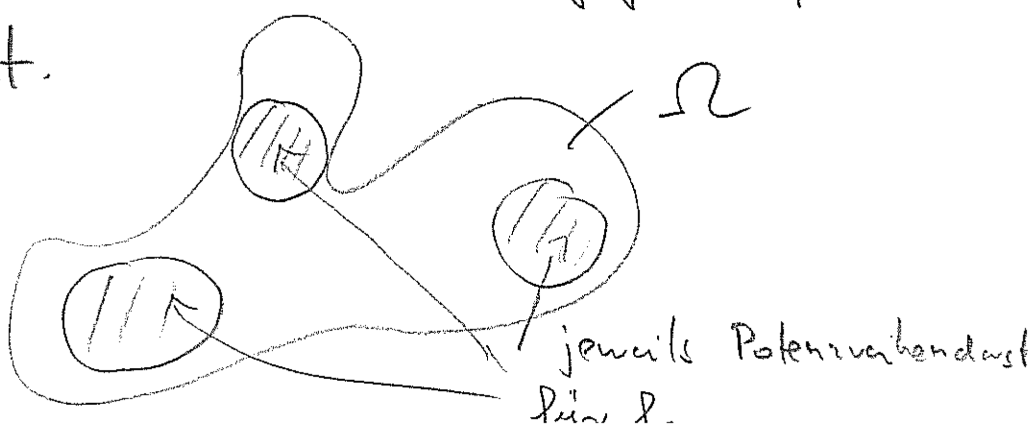
$$|c_n| \cdot r^n > 1$$

d.h. für diese n ist

$$|c_n \cdot (z-a)^n| > 1,$$

also kann $c_n \cdot (z-a)^n$ keine Nullfolge bilden und $(*)$ somit nicht konvergieren

<u>1.8. Notation:</u> Wir sagen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist in Ω <u>durch Potenzreihen darstellbar</u>, falls es für jede Kreisscheibe $D_r(a) \subset \Omega$ eine Potenzreihe der Form $(*)$ gilt, die $\forall z \in D_r(a)$ gegen $f(z)$ konvergiert.



(1-1?

<u>19. Satz:</u> Sei f durch Potenzreihen in Ω darstellbar. Dann ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und f' ist auch durch Potenzreihen in Ω darstellbar. Genauer gilt: Falls

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

für $z \in D_r(a)$, dann gilt für diese z auch

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

<u>Beweis:</u> Gemäß dem Wurzelkriterium haben $\sum c_n (z-a)^n$ und $\sum n c_n (z-a)^n$ den gleichen Konvergenzradius.

Wir setzen $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$

und müssen zeigen: $f'(z) = g(z)$

o.E. können wir annehmen $a = 0$

Für $z \neq w$ gilt:

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum c_n \Big[\underbrace{\frac{z^n - w^n}{z-w}}_{z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots + z w^{n-2} + w^{n-1}} - n w^{n-1} \Big]$$

$$[\dots] = (z^{n-1} - w^{n-1}) + (z^{n-2}w - w^{n-1}) + \dots + (w^{n-1} - w^{n-}$$

$$= (z^{n-1} - w^{n-1}) + w(z^{n-2} - w^{n-2}) + w^2(z^{n-3} - w^{n-3}$$

$$+ \dots + w^{n-2}(z-w)$$

$$= (z-w)\Big[(z^{n-2} + z^{n-3}w + \dots + w^{n-2}) +$$

$$+ w(z^{n-3} + z^{n-4}w + \dots + w^{n-3}) + w^2(z^{n-4} + \dots + w^{n-}$$

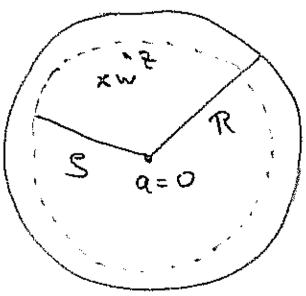
$$+ \dots \Big]$$

$$= (z-w) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k\, w^{k-1} z^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z-w} - g(w) \right| \leq$$

$$\leq |z-w| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n-1} k\, |w|^{k-1} |z|^{n-k-1}$$

Wähle $\rho < R$ so dass $|w| < \rho$
und betrachte w mit $|z| < \rho$



d.h. $|w|^{k-1} |z|^{n-k-1} \leq \rho^{n-2}$

also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, |w|^{k-1} |z|^{n-k-1} \leq \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}$

$$\leq n^2 \rho^{n-2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| \le \underbrace{|z-w|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } z \to w}} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| \rho^{n-2}}_{< \infty}$$

da $\rho < R$

und $\sum n^2 c_n z^n$

gleichen Konvergenzradius

wie $\sum c_n z^n$ hat

$$\Rightarrow \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \longrightarrow g(w) \quad \text{für } z \to w \qquad \square$$

<u>1.10 Korollar</u>: Sei f durch Potenzreihen in Ω darstellbar. Dann existieren alle Ableitungen von f, und jede ist durch Potenzreihen in Ω darstellbar. Genauer gilt: Falls

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{für } z \in D_r(a),$$

dann gilt für diese z auch

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k-1)\, c_n (z-a)^{n-k}$$

Somit ist $\quad k!\, c_k = f^{(k)}(a) \quad \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$

und die $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $(*)$ sind eindeutig durch f bestimmt.

<u>Beweis</u>: Iteration von 1.9 $\square$

<u>1.11. Korollar:</u> Die exp-Fkt,

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und es gilt:

$$\exp(z)' = \exp(z)$$

1.12. Satz: Sei μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}$. Definiere

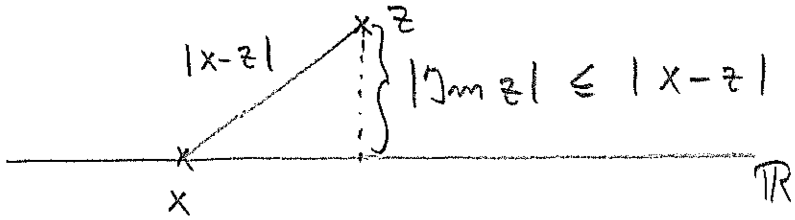
$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \, d\mu(x) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Dann ist f durch Potenzreihen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ darstellbar, also insbesondere

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Beweis: beachte zunächst, $f(z)$ ist für $z \notin \mathbb{R}$ wohldefiniert, da

$$\left| \frac{1}{x-z} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

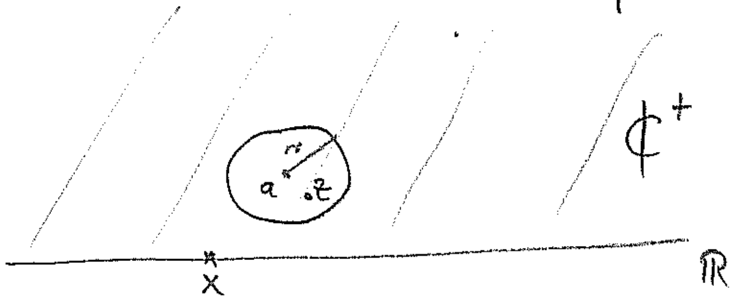


also

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x-z} \right| d\mu(x) \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \mu(\mathbb{R}) < \infty$$

nun betrachte $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

o.E. sei $D_r(a) \subset \mathbb{C}^+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$



Idee: Entwickle $\frac{1}{x-z}$ als geometrische Reihe

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a-(z-a)}$$

$$= \frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}}$$

$$= \frac{1}{x-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{x-a} \right)^n$$

Für $z \in D_r(a)$ und $x \in \mathbb{R}$ (d.h. $|x-a| > r$)

gilt: $\left| \frac{z-a}{x-a} \right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$

$\Rightarrow$ obige Reihe konvergiert glm. in x

und Integration und Summation können vertauscht werden

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D_r(a)$$

wobei $c_n = \int \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \, d\mu(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$,

<u>1.13. Bem.</u>: Ist μ ein W-Maß (d.h. $\mu(\mathbb{R}) = 1$), dann heißt $f \equiv G_\mu$ die <u>Cauchy-Transformierte</u> (bzw. $-G_\mu$ heißt <u>Stieltjes-Transformierte</u>) von μ.

Wie die Fourier-Transformierte enthält sie alle Information über μ in einer recht brauchbaren Art und Weise.

<u>1.14. Ausblick</u>: Darstellbarkeit durch Potenzreihen ist nichts anderes als Taylorreihenentwicklung. Im Reellen sind (selbst so-oft) diff'bare Fkten i.a. nicht in Taylorreihen entwickelbar. Im Komplexen ist dies anders: "komplex diff'bar" (=holomorph) ist so starke Forderung, dass jede holomorphe Fkt durch Potenzreihen darstellbar ist; insbesondere impliziert einmal diff'bar also auch beliebig oft diff'bar im Komplexen. Um dies zu sehen, müssen wir Integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ über Kurven $\gamma \subset \mathbb{C}$ verstehen, insbesondere den Cauchyschen Integralsatz.