10. Der Satz von Montel

Der Satz von Montel ist die holomorphe Version des aus der Analysis II bekannten Satzes von Arzelà-Ascoli. Er charakterisiert die relativkompakten Teilmengen von $\mathcal{O}(\Omega)$. Für diesen benötigen wir einige topologische Vorbereitungen.

10.1. Definition:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(\Omega)$ heißt

- <u>Cauchy-Folge bezüglich der kompakten Konvergenz</u> (oder <u>kompakt konvergent</u>) auf Ω, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ die Folge $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist, d.h.

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geq N$:

  $$\|f_n - f_m\|_K = \max_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

- <u>kompakt konvergent gegen $f: \Omega \to \mathbb{C}$</u>, falls für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ gilt

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \ \|f_n - f\|_K < \varepsilon.$

10.2. Lemma:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(\Omega)$ gilt:

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt auf Ω

$\iff$ $\forall z \in \Omega\ \exists r > 0: \overline{D(z,r)} \subset \Omega$ und $(f_n|_{\overline{D(z,r)}})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\overline{D(z,r)}$.

(D.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokal eine gleichmäßige Cauchy-Folge.)

(b) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent auf Ω, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt auf Ω gegen eine stetige Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Klar, da $\overline{D(z,r)}$ für alle $z \in \Omega$ und $r > 0$ kompakt ist.

"$\Longleftarrow$": Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so gibt es zu jedem $z \in \Omega$ ein $r(z) > 0$, so dass $(f_n|_{\overline{D(z,r(z))}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Dann ist $(D(z,r(z)))_{z\in K}$ eine offene Überdeckung von K.

Es gibt also $z_1, \dots, z_k \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} D(z_j, r(z_j))$$

Für $\varepsilon > 0$ existieren dann $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{\overline{D(z_j, r(z_j))}} < \varepsilon \ \forall n, m \geq N_j$

Wir setzen $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$ und erhalten $\|f_n - f_m\|_K < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$.

(b) • Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakt konvergent, so ist für $z \in \Omega$ die Folge $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ (da wir speziell $K = \{z\}$ betrachten können), also konvergent gegen $f(z) \in \mathbb{C}$.
Wir erhalten eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

• Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so stellt $(f_n|K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $(C(K), \|\cdot\|_K)$ dar, ist also gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g \in C(K)$.
Da $(f_n|K)_{n \in \mathbb{N}}$ auch punktweise gegen g konvergiert, folgt $f|_K = g$.
Insbesondere ist $f|K$ stetig.

<u>Also:</u> f ist stetig und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert kompakt auf Ω gegen f.

□

Wir zeigen nun, dass kompakte Konvergenz auf Ω durch eine Metrik auf Ω induziert wird.

10.3. Satz:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\Omega \neq \emptyset$.

(a) Es existiert eine <u>kompakte Ausschöpfung von Ω</u>, d.h. eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von Ω mit

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω, dann wird durch

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}, \quad f,g \in C(\Omega)$$

eine Metrik d auf $C(\Omega)$ definiert.

(c) In der Situation von (b) gilt für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(\Omega)$:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt auf Ω

$\iff$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C(\Omega), d)$

und für $f \in C(\Omega)$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt auf Ω gegen f

$\iff$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in $(C(\Omega), d)$.

Beweis:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$K_n := \{ z \in \Omega \mid \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \tfrac{1}{n} \} \cap \overline{D(0,n)}.$$

(b) und (c) rechnet man leicht nach. $\square$

Auch für $\mathcal{O}(\Omega) \subset C(\Omega)$ ist dies der "richtige" Konvergenzbegriff.

10. 4. Satz (von Weierstraß)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge aus $\mathcal{O}(\Omega)$.

(a) Die nach Lemma 10.2. (b) stetige Grenzfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)} \text{ für } n \to \infty$$

mit kompakter Konvergenz.

Mit anderen Worten:

$\mathcal{O}(\Omega)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $(C(\Omega), d)$ und die Abbildung

$$\mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega), \quad f \longmapsto f'$$

ist stetig bezüglich $d|_{\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega)}$.

Beweis:

(a) Nach dem Satz von Morera (Satz 3.8.) genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset \Omega$ gilt. Nach Satz 3.1. wissen wir, dass wegen $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset \Omega$ erfüllt ist.
Da $\partial\Delta$ für ein Dreieck $\Delta \subset \Omega$ kompakt ist, folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta} (f(z) - f_n(z))\,dz\right|$$

$$\leq L(\partial\Delta) \cdot \|f - f_n\|_{\partial\Delta}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

und damit $(*)$.

(b) Seien $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, 2r)} \subset \Omega$ vorgegeben. Nach Satz 4.1. gilt dann

$$\left|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \|f - f_n\|_{\overline{D(z,r)}}$$

$$\overline{D(z,r)} \subseteq \overline{D(z_0,2r)} \qquad \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \|f - f_n\|_{\overline{D(z_0,2r)}}$$

für alle $z \in D(z_0,r)$, so dass wir

$$\|f^{(k)} - f_n^{(k)}\|_{\overline{D(z_0,r)}} \leq \frac{k!}{r^k} \|f - f_n\|_{\overline{D(z_0,2r)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

erhalten. Nach Lemma 10.2. konvergiert damit $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen $f^{(k)}$. $\square$

10.5. Beispiel:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $C(\Omega)$. Wir sagen „Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert normal in Ω."

wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty$.

Offenbar gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert normal in Ω

$\Longrightarrow$ $\left(\sum_{n=0}^{m} f_n\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert kompakt auf Ω.

Nach Satz 10.4. ist damit $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ holomorph, falls alle f_n holomorph sind, und es gilt in diesem Fall

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

mit kompakter (und sogar normaler) Konvergenz

10.6. Satz (von Montel):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent

(a) $\mathcal{F}$ ist relativkompakt in $\mathcal{O}(\Omega)$, d.h. jede Folge aus $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.

(Man sagt auch: „$\mathcal{F}$ ist eine normale Familie.")

(b) $\mathcal{F}$ ist lokalbeschränkt, d.h. für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K < \infty .$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen. Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

10.7. Lemma:

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ lokalbeschränkt und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt:

$$\forall z \in \Omega \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)} :$$

$$|f(w_1) - f(w_2)| < \varepsilon .$$

Beweis:

Für $z \in \Omega$ finden wir $r > 0$ mit $\overline{D(z,2r)} \subset \Omega$.

Weiter gilt nach Voraussetzung

$$M := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\partial D(z,2r)} < \infty \quad \text{(o.B.d.A. } M > 0$$

Wir setzen

$$\delta := \min\left\{\frac{r}{4M}\cdot\varepsilon, r\right\} > 0$$

und rechnen für $f \in \mathcal{F}$ und $w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)}$ nach:

$$f(w_1) - f(w_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,2r)} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - w_1} - \frac{1}{\zeta - w_2}\right] d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,2r)} f(\zeta)\,\frac{w_1 - w_2}{(\zeta - w_1)(\zeta - w_2)}\, d\zeta$$

$$\Longrightarrow \quad |f(w_1) - f(w_2)| \leq \frac{2}{r}\|f\|_{\partial D(z,2r)}\cdot|w_1 - w_2|$$

(da $|(\zeta - w_1)(\zeta - w_2)| \geq r^2$ für alle $\zeta \in \partial D(z,2r)$ mit $w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)} \subset \overline{D(z,r)}$ gilt.)

Wegen $\|f\|_{\partial D(z,2r)} \leq M$ und $|w_1 - w_2| < 2\delta$ folgt

$$|f(w_1) - f(w_2)| < \frac{4M}{r}\cdot\delta \leq \varepsilon.$$

□

10.8. Satz (von Montel für Folgen):

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalbeschränkte Folge in $\mathcal{O}(\Omega)$, so hat diese eine kompakt konvergente Teilfolge.

Beweis:

Wir setzen $\Omega_{\mathbb{Q}} := \Omega \cap \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Dann ist $\Omega_{\mathbb{Q}}$ abzählbar und dicht in Ω.

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\Omega_{\mathbb{Q}}$.

Da $(f_n(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung beschränkt ist (denn $\{z_1\}$ ist kompakt), gibt es nach

dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(f_{n_1(k)}(z_1))_{k\in\mathbb{N}}$.
Induktiv finden wir zu der Teilfolge $(f_{n_j(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, die in $z_1,\dots,z_j$ konvergiert, eine Teilfolge $(f_{n_{j+1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, die zudem noch in z_{j+1} konvergiert.
Die Folge $(f_{n_k(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in $\Omega_{\mathbb{Q}}$ konvergiert. Diese bezeichnen wir wieder mit $(f_n)_{n\in}$

Ist nun $K\subset\Omega$ kompakt und $\varepsilon>0$, so gibt es aus der offenen Überdeckung $(D(z,\delta(z)))_{z\in\Omega}$, für die $\delta(z)>0$ zu $z\in\Omega$ und $\frac{\varepsilon}{3}$ gemäß Lemma 10.7 gewählt ist, eine endliche Teilüberdeckung $(D(z_j,\delta(z_j)))_{j=1,\dots,k}$. Für $j=1,\dots,k$ wähle $z_j'\in D(z_j,\delta(z_j))\cap\Omega$ und $N_j\in\mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(z_j')-f_m(z_j')|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\forall n,m\geq N_j.$$

Für alle $z\in K$ gibt es nun ein $j\in\{1,\dots,k\}$ mit $z\in D(z_j,\delta(z_j))$, womit wir

$$|f_n(z)-f_m(z)|$$
$$\leq|f_n(z)-f_n(z_j')|+|f_n(z_j')-f_m(z_j')|+|f_m(z_j')-f_m(z)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

für alle $n,m\geq N$ mit $N:=\max\{N_1,\dots,N_k\}$ erhalten. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent. $\square$

Beweis von Satz 10.6.:

"(a) => (b)":

Sei (a) erfüllt. Gäbe es eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K = \infty,$$

so könnten wir eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}$ finden mit $\|f_n\|_K \geq n$, die also keine kompakt konvergente Teilfolge besitzen kann, was aber im Widerspruch zu (a) stehen würde.

"(b) => (a)": Dies folgt direkt aus Satz 10.8. $\square$

Bemerkung:

Der funktionentheoretische Teil des Beweises zum Satz von Montel ist Lemma 10.7., nach dem jede lokalbeschränkte Familie aus $\mathcal{O}(\Omega)$ lokal gleichgradig stetig ist. Der Rest des Beweises könnte auch durch eine Anwendung des Satzes von Arzelà - Ascoli erbracht werden.

10. 9. Korollar (Satz von Vitali)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalbeschränkte Folge aus $\mathcal{O}(G)$ mit der Eigenschaft, dass

$$A := \{ z \in G \mid (f_n(z))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \}$$

einen Häufungspunkt in G hat, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt auf G.

Beweis: als Übungsaufgabe!

10. 10. Beispiel:

In Satz 1.12. haben wir gesehen, dass durch

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}^+$$

für ein endliches Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}$ eine holomorphe Funktion

$$G_\mu : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert wird. Ferner haben wir dort

$$|G_\mu(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|z-t|}\, d\mu(t) \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\operatorname{Im}(z)}$$

gezeigt. Insbesondere ist

$$\mathcal{F} = \{ G_\mu \mid \mu \text{ W-Maß auf } \mathbb{R} \} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$$

eine normale Familie.