11. Das Argumentprinzip und der Satz von Rouché

Als eine der wichtigsten Anwendungen des Residuensatzes (Satz 9.4) behandeln wir in diesem Kapitel das sogenannte Argumentprinzip, mit dessen Hilfe Null- und Polstellen holomorpher Funktionen gezählt werden können.

11.1. Beispiel:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ habe in $a \in \Omega$ eine Nullstelle der Ordnung m. Nach Satz 5.1 existiert $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit

$$f(z) = (z-a)^m h(z) \quad \forall z \in \Omega$$

und $h(a) \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad f'(z) = m(z-a)^{m-1} h(z) + (z-a)^m h'(z)$$

für alle $z \in \Omega$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

für alle $z \in \dot{D}_r(a)$, wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $D_r(a) \subseteq \Omega$ gilt und $h|_{D_r(a)}$ keine Nullstellen hat.

$\Longrightarrow$ Die Funktion $\frac{f'}{f}$ hat in a einen Pol erster Ordnung und es gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = m.$$

Ist Γ ein Zyklus in $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$, so liefert der Residuensatz 9.4

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in f^{-1}(\{0\})} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

$$= \sum_{a \in f^{-1}(\{0\})} m(a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

(vgl. Aufgabe 1, Blatt 5)

Eine solche Aussage gilt allgemeiner auch für meromorphe Funktionen.

11.2. Definition:

Eine Funktion f wird als meromorph in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet, falls es eine Menge $A \subset \Omega$ gibt, so dass

(a) A keinen Häufungspunkt in Ω besitzt,

(b) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$,

(c) f in jedem Punkt von A einen Pol besitzt.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$.
Offenbar gilt $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ (für $A = \emptyset$).

11.3. Satz (Argumentprinzip):

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ sei

- $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ die Menge der Polstellen von f mit den Ordnungen $m(a_1), m(a_2), \dots$
- $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ die Menge der Nullstellen von f mit den Ordnungen $n(b_1), n(b_2), \dots$

Ist Γ ein Zykel in $\Omega \setminus (A \cup B)$, so dass

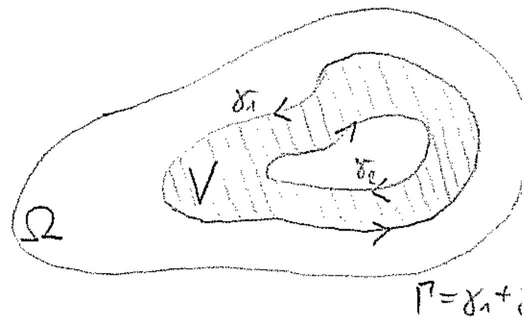
$$\forall \alpha \notin \Omega : \quad \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0,$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in A} m(a)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(a) - \sum_{b \in B} n(b)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(b)$$

Speziell gilt: Ist Γ der Rand-Zykel einer offenen Menge $V \subset \Omega$, d. h. $\partial V = \Gamma^*$,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1, & z \in V \\ 0, & z \notin \overline{V} \end{cases},$$



$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \#\left\{\begin{matrix}\text{Nullstellen von} \\ f \text{ in } V\end{matrix}\right\} - \#\left\{\begin{matrix}\text{Polstellen von} \\ f \text{ in } V\end{matrix}\right\}$$

gezählt mit Vielfachheiten.

11.4. Korollar (Satz von Rouché):

Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ und sei Γ der Rand-Zykel einer offenen Menge $V \subset \Omega$. Es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \Gamma^*.$$

Dann ist

$$\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } V\} = \#\{\text{Nullstellen von } g \text{ in } V\}.$$

Beweis:

Für $0 \le t \le 1$ setzen wir

$$h_t := f + t \cdot (g - f) \in \mathcal{O}(\Omega).$$

$$\Longrightarrow \quad h_0 = f, \; h_1 = g.$$

Ferner gilt:

$$|t(g(z) - f(z))| \le |g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \Gamma$$

$$\Longrightarrow \quad |h_t(z)| \geq \big| |f(z)| - |t(g(z) - f(z))| \big| > 0,$$

d.h. $h_t(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma^*$.

Nach Satz 11.3 folgt:

$$\#\{\text{Nullstellen von } h_t \text{ in } V\} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} \, dz$$

Das Integral hängt stetig von $t \in [0,1]$ ab und nimmt nur Werte in $\mathbb{N}_0$ an, ist also konstant.

$\square$

11.5. Beispiel:

$N := \#\{\text{Nullstellen von } g(z) := z^4 - 4z + 2 \text{ in } D(0,1)\}$

$\Gamma^* = \partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Wir betrachten $f(z) := -4z + 2$. Es gilt:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4| = 1 < 2 \leq |-4z+2| = |f(z)|$$

für alle $z \in \Gamma^*$.

Der Satz von Rouché besagt dann

$$N = \#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } D(0,1)\} = 1$$