12. Der Weierstraßsche Produktsatz

12.1. Motivation: Wir wissen, gemäß S.1, dass die Nullstellen von $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sich in Ω nicht häufen können (falls Ω Gebiet und $f \not\equiv 0$).

Frage: Gilt es sonst noch Einschränkungen an $N(f)$, oder können wir es beliebig vorschreiben.

Weierstraßsche Produktsatz zeigt: Es gibt keine weiteren Einschränkungen, wir können sogar die Ordnungen der Nullstellen beliebig vorschreiben.

Idee: Sei A gewünschte Nullstellenmenge

- Für $A = \{a_1\}$ ist es einfach, ein entsprechendes f_1 zu finden, z.B.

  $f_1(z) = z - a_1$

- Für $A = \{a_1, .., a_n\}$ endlich, nehmen wir einfach $f_1 \dots f_n$

- Allgemeines A muß abzählbar sein, $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$, dann ist

$$\lim_{n \to \infty} f_1 \cdots f_n = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

unser Kandidat.

Zunächst müssen wir aber unendliche Produkte besser verstehen.

12.2. Def.: Sei $u_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, für

$$p_n := (1+u_1)(1+u_2) \ldots (1+u_n)$$

existiere der Grenzwert $p = \lim_{n \to \infty} p_n$.

Dann schreiben wir

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \qquad (*)$$

Die p_n sind Partialprodukte des unendlichen Produktes $(*)$.

Ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ konvergiert, falls die zugehörige Folge der p_n konvergiert.

12.3. Bem.: Für ein nicht-triviales unendliches Produkt brauchen wir, dass die Faktoren gegen 1 gehen (bzw. die u_n gegen Null). Aber selbst dann kann es passieren, dass das Produkt Null ist, obwohl kein Faktor Null ist, z.B.

$$1\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1-\tfrac{1}{4}\right)\cdots$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}}_{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{4}}_{\frac{1}{4}}\cdot\frac{4}{5}\cdots = 0$$

Sowas müssen wir ausschließen, da wir sonst ungewollte Nullstellen erzeugen würden.

12.4 Lemma: Für $u_1,\dots,u_N \in \mathbb{C}$ sei

$$p_N := \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \quad \tilde{p}_N := \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$$

Dann ist

$$\tilde{p}_N \leq \exp(|u_1| + \dots + |u_N|)$$

und

$$|p_N - 1| \leq \tilde{p}_N - 1, \text{ d.h. } |p_N| \leq \tilde{p}_N$$

<u>Beweis:</u> Für $x \geq 0$ gilt: $1 + x \leq e^x$

also: $1 + |u_i| \leq e^{|u_i|} \quad \forall i = 1, \dots, N$

$$\overset{\text{Mult.}}{\Longrightarrow} \underbrace{(1+|u_1|)\dots(1+|u_N|)}_{\tilde{p}_N} \leq e^{|u_1| + \dots + |u_N|}$$

Beweise $|p_N - 1| \leq \tilde{p}_N - 1$ durch Induktion nach N.

$N = 1$: trivial

$N \to N+1$:

$$p_{N+1} - 1 = p_N(1 + u_{N+1}) - 1$$

$$= (p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}$$

$$\Rightarrow |p_{N+1} - 1| \leq \underbrace{|p_N - 1|}_{\tilde{p}_N - 1}(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}|$$

$$= \tilde{p}_{N+1} - 1$$

<u>12.5. Satz:</u> Sei $\{u_n\}$ Folge beschränkter komplexer Fkten auf Menge S, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ glm auf S konvergiert.

Dann konvergiert das Produkt

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s))$$

glm auf S; für $s_0 \in S$ gilt:

$$f(s_0) = 0 \iff \exists n : \quad 1 + u_n(s) = 0$$

<u>Beweis:</u> Glm. Grenzwert von beschränkten Fkten ist beschränkt, also: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ ist beschränkt auf S, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)| \leq C_0 \quad \forall s \in S$

Setze $p_N(s) := \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(s))$

$$\overset{15.3.}{\Rightarrow} |p_N(s)| \leq \tilde{p}_N(s) \leq e^{|u_1(s)| + \ldots + |u_N(s)|} \leq C_1$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ s \in S$$

$$(\text{wobei } C_1 = e^{C_0})$$

Sei $M \geq N$, betrachte

$$p_M(s) - p_N(s) = p_N(s)\,(1 + u_{N+1}(s)) \ldots (1 + u_M(s)) - p_N(s)$$

$$\Rightarrow |p_M(s) - p_N(s)| \leq |p_N(s)| \cdot \underbrace{\left| \prod_{i=N+1}^{M} (1 + u_i(s)) - 1 \right|}$$

$$\leq e^{\sum_{i=N+1}^{M} |u_i(s)|} - 1$$

$$\leq e^{\varepsilon} - 1$$

falls N so groß, dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(s)| < \varepsilon \qquad \forall s \in S'$$

(was nach Vor. für jedes $\varepsilon > 0$ möglich)

$$\Rightarrow \| p_M - p_N \| \leq (e^{\varepsilon} - 1) \cdot C$$

für $M \geq N$ hinreichend groß

$\Rightarrow \{p_N\}$ Cauchyfolge in $C(S')$

$C(S)$ vollständig $\Rightarrow \exists f \in C(S')$ mit

$p_N \to f$ glm auf S'

Sei ε so dass $e^{\varepsilon} - 1 \leq 1/2$

Dann $\exists N_0 \; \forall M \geq N_0$

$$|p_M(s) - p_{N_0}(s)| \leq |p_{N_0}(s)| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overset{N\to\infty}{\Longrightarrow} \quad |f(s) - p_{N_0}(s)| \leq |p_{N_0}(s)| \, \frac{1}{2} \qquad \forall\, s \in S$$

$$\Rightarrow |f(s)| = |p_{N_0}(s) - (f(s) - p_N(s))|$$

$$\geq |p_{N_0}(s)| - \underbrace{|f(s) - p_{N_0}(s)|}_{< \frac{1}{2} p_{N_0}(s)}$$

$$\geq \frac{1}{2} |p_{N_0}(s)|$$

also: $|f(s)| \geq \frac{1}{2} |p_{N_0}(s)|$

d.h. $f(s) = 0$ gdw $p_{N_0}(s) = 0$

d.h. wenn einer der Faktoren 0 ist

$\square$

<u>12.6. Satz:</u> Sei $0 \leq u_n < 1$. Dann existiert $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$ und es gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$$

<u>Beweis:</u> Für $p_N = (1-u_1) \dots (1-u_N)$ ist

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N > 0$$

$\Rightarrow \ p = \lim_{N \to \infty} p_N$ existiert

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty \overset{12\,S}{\Longrightarrow} p \neq 0$ (d.h. > 0)

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, so gilt

$$p \leq p_N = \prod_{i=1}^{N} (1 - u_i) \leq \exp\{-u_1 - u_2 - \dots - u$$

$$\xrightarrow{N \to \infty} 0$$

$\Rightarrow p = 0$ $\square$

<u>12.7. Beispiel:</u> Es gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) = 0 \qquad \text{da } \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = \infty$$

aber

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right) > 0 \qquad \text{da } \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} < \infty$$

<u>12.8. Satz:</u> Sei $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ für $n = 1, 2, \dots$

Die f_n seien in keiner Komponente von Ω identisch Null und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

konvergiere glm auf kompakten Teilmengen von Ω

Dann konvergiert das Produkt

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

glm auf allen kompakten Teilmengen von Ω, d.h. (nach 10.4) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

Ferner gilt:

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;z) \qquad \forall z \in \Omega$$

wobei $m(f;z)$ = Ordnung der Nullstelle von f in z

($m(f;z) = 0$ falls $f(z) \neq 0$)

<u>Beweis:</u> Konvergenzbeh. folgt aus 12.5 (wobei S = kompakte Teilmenge von Ω)

Betrachte $z \in \Omega$ und sei k kompakt mit $z \in k \subset \Omega$; da $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ glm auf k konvergiert ist $|1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}$ $\forall z \in k$, $n \geq n_0$ (für ein $n_0 \in \mathbb{N}$)

Somit haben die f_n für $n \geq n_0$ keine Nullstelle in k

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n_0 - 1} f_n \cdot \underbrace{\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n}_{\text{keine Nullstelle in } k}$$

also $m(f;z) = m\left(\prod_{n=1}^{n_0-1} f_n ; z\right)$

$$= \sum_{n=1}^{n_0-1} m(f_n; z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n; z)$$

da $m(f_n;z) = 0$ für $n \geq n_0$

$\square$

<u>12.9. Motivation:</u> Wollen wir Nullstellen auf $A = \{z_1, z_2, ..\}$ vorschreiben, so bietet sich

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \qquad (\text{falls alle } z_n \neq 0$$

an.

Problem: Je nach Wahl der $\{z_n\}$ muß dies nicht konvergieren, oder zusätzliche Nullstellen werden erzeugt

z.B.: $z_n = n \rightsquigarrow f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$

$$\Rightarrow f \equiv 0$$

Problem: $1 - \frac{z}{z_n}$ ist Null bei $z = z_n$, aber in Nähe von z_n liegt es nicht nahe genug bei 1 $\rightsquigarrow$ wir ersetzen $(1 - z)$ durch Fkten $E_n(z)$ mit besserem Verhalten!

12.10. Def: Wir setzen

$$E_0(z) = 1 - z$$

und für $p = 1, 2, 3, \dots$

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right\}$$

12.11. Lemma: Für $|z| \le 1$ und $p = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$|1 - E_p(z)| \le |z|^{p+1}$$

Beweis: $p = 0$ klar

$p \ge 1$: Da $E_p \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gibt es Potenzreihenentwicklung um 0

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$E_p'(z) = -e^{\{\dots\}} + \cancel{(1-z)}\, e^{\{\dots\}} \cdot \underbrace{(1 + z + z^2 + \dots + z^{p-1})}_{\frac{1-z^p}{\cancel{1-z}}}$$

$$= -z^p \cdot e^{\{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\}}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

$\overset{\text{koeff.vergleich}}{\Longrightarrow}$ $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$

und

$a_k \leqslant 0 \quad \forall k \geq p+1$

$\Rightarrow |a_k| = -a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = -\underbrace{E_p(1)}_{=0} + 1 = 1$$

Somit für $|z| \leq 1$:

$$|E_p(z) - 1| = \left|\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \cdot \underbrace{|z^k|}_{\leq |z|^{p+1}}$$

$$\leq |z|^{p+1} \cdot \underbrace{\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k|}_{=1}$$

$\square$

12.12. Satz: Sei (z_n) Folge komplexer Zahlen mit $z_n \neq 0 \; \forall n$ und $|z_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Ist (p_n) Folge in $\mathbb{N}_0$, so dass

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n} < \infty \qquad \forall r > 0$$

dann definiert das unendliche Produkt

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

eine ganze Fkt P, die eine Nullstelle in jedem Pkt z_n hat und die keine anderen Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat.

Genauer: Wenn a m-mal in der Folge $\{z_n\}$ vorkommt, dann hat P eine Nullstel der Ordnung m in a.

Die Bedingung $(*)$ ist stets für $p_n = n-1$ erfüllt.

<u>Beweis</u>: Für $r > 0$ ist $|z_n| > 2r$ für $n \geq n_0$ mit hinr. großem n_0

also: $\frac{r}{|z_n|} < \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geq n_0$

und somit $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$

Somit ist $(*)$ erfüllt für die Wahl $1+p_n = n$

Wir zeigen nun, dass

$$f_n(z) = E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

die Voraussetzungen von 12.8. erfüllt. für $\Omega = \mathbb{C}$

Sei $r > 0$. Dann gilt für $|z| \leq r$

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}$$

falls $|z_n| \geq r \geq |z|$

d.h. für hinr. großes n

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{|z_n|}\right)\right| \quad \text{konvergiert glm auf } \overline{D}_r(0)$$

d.h. glm Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$

$\overset{12.8.}{\Longrightarrow}$ Beh. $\square$

<u>12.13. Beispiele:</u> Oft kann p_n viel besser als $p_n = n-1$ gewählt werden, z.B.

$p_n = \text{const}$

Ist z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty$,

dann gilt $(*)$ mit $1 + p_n = 1 \quad \forall n$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} = \infty$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^2} < \infty$

dann gilt $(*)$ mit $1 + p_n = 2 \quad \forall n$

12.14. Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent:

(a) f hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$

(b) $\exists\, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$: $f(z) = e^{g(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$

Beweis: (b) $\Rightarrow$ (a) klar, da $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ (vgl. 12.18)

(a) $\Rightarrow$ (b) f keine Nullstelle

$\Rightarrow \frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Da $\mathbb{C}$ konvex, hat $\frac{f'}{f}$ eine Stammfkt auf $\mathbb{C}$ (vgl. 3.3.), d.h.

$\exists\, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \ : \ g' = \frac{f'}{f}$

$$\Rightarrow (f e^{-g})' = f' e^{-g} - \underbrace{f e^{-g} \cdot g'}_{\cancel{f} e^{-g} \frac{f'}{\cancel{f}}} = 0$$

$\Rightarrow f e^{-g} = \text{konst.} = c$

$\Rightarrow f = c \cdot e^{+g}$

c kann gleich 1 gesetzt werden durch Add. einer Konstanten zu g

12.15. Weierstraßsche Produktsatz: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f(0) \neq 0$ und $z_1, z_2, z_3, \ldots$ seien die Nullstellen von f, aufgelistet gemäß ihrer Vielfachheit. Dann existiert ein $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und eine Folge $\{p_n\}$ in $\mathbb{N}_0$, so dass gilt:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

Beweis: Sei P gemäß 12.12, gebildet mit den Nullstellen von f.

$\Rightarrow \frac{f}{P}$ hat nur hebbare Singularitäten

$\Rightarrow \frac{f}{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und hat keine Nullstellen

$\overset{12.14}{\Rightarrow} \frac{f}{P} = e^g$ für ein $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ □

12.16. Satz: Jede meromorphe Fkt in $\mathbb{C}$ ist der Quotient von zwei ganzen Fkten, d.h. $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist ein Körper.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ und $A = \{$Pole von $f\}$

$\overset{12.12}{\Rightarrow} \exists\, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, so dass die Nullstellen von h genau die Polstellen von f sind (jeweils mit gleicher Ordnung)

Betrachte $g := fh$

$\Rightarrow$ Singularitäten von g in Pkten von A sind hebbar, d.h. g fortsetzbar zu $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ $f = \frac{g}{h}$ in $\mathbb{C} \setminus A$ $\square$

12.17. Bem.: 12.12. und somit auch 12.16 lassen sich auch auf beliebige Gebiete Ω übertragen. Der Beweis davon bedarf nur kleiner Anpassungen.