13. Der Satz von Mittag-Leffler

13.1. Motivation: Analog zu Nullstellen wollen wir nun Polstellen von meromorphen Fkten vorschreiben. Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und hat Nullstelle der Ordnung m bei a so hat $\frac{1}{f}$ Polstelle der Ordnung m bei a. Der Weierstraßsche Produktsatz erlaubt uns also, durch Übergang zu $1/f$, die Vorgabe der Polstellen. Wir wollen nun aber mehr: nämlich das Vorschreiben der Hauptteile an allen Polstellen

13.2. Satz von Mittag-Leffler: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ so dass A keine Häufungspkte in Ω besitzt. Sei für jedes $a \in A$ eine natürliche Zahl $m(a) \geq 1$ und eine rationale Fkt

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)} c_{j,a} (z-a)^{-j} \quad \text{gegeben.}$$

Dann gibt es eine meromorphe Fkt $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ deren Hauptteil in jedem $a \in A$ gleich P_a ist und die keine anderen Pole in Ω besitzt.

<u>Beweis</u>: Wir beweisen Satz nur für Spezialfall $\Omega = \mathbb{C}$. Für allgemeines Ω siehe Bem. 13.3.

Sei im Folgenden $\Omega = \mathbb{C}$

<u>Idee</u>: Falls A endlich, dann setzen wir einfach

$$f(z) = \sum_{a \in A} P_a(z)$$

Falls A unendlich (also abzählbar!), dann wird $\sum_{a \in A} P_a(z)$ im Allgemeinen divergieren. Wir werden es konvergent machen, indem wir ganze Fkten R_a abziehen, so dass

$\sum_{a \in A} (P_a(z) - R_a(z))$ konvergiert

Schreibe $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, so dass

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

Beachte dass $|a_n| \to \infty$ (da $\Omega = \mathbb{C}$, somit keine Häufungspkte)

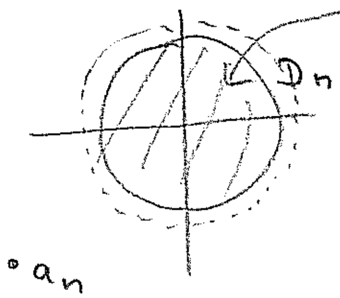
Wir setzen $r_n := \frac{1}{2} |a_n|$

$$D_n := \overline{D}_{r_n}(0) = \{ z \mid |z| \le r_n \}$$

$\Rightarrow D_1 \subset D_2 \subset \cdots$

und

$$\bigcup_n D_n = \mathbb{C}$$



P_n ist holomorph auf offener Umgebung $U \supset D_n$, d.h. kann auf kompakten D_n glm durch (Taylor-) Polynome R_n approx. werden, d.h. $\forall \varepsilon_n > 0 \; \exists$ Polynom R_n

$$| P_n(z) - R_n(z) | < \varepsilon_n \quad \forall z \in D_n$$

Wir wählen die $\{\varepsilon_n\}$ nun so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

Sei $\{R_n\}$ die zugehörige Folge von Polynomen

<u>Beh</u>: $\sum_n (P_n(z) - R_n(z))$ konvergiert gegen meromorphe Fkt mit gewünschtem Polverhalten

(1) Konvergenz

Sei $R > 0$ und betrachte $D_R := \{ z \mid |z| \leq R \}$

$\Rightarrow \exists N \ \forall n \geq N : D_R \subset D_n$

$\Rightarrow \forall n \geq N$: $P_n(z) - R_n(z)$ holomorph auf D_R

(da Pol a_n von P_n außerhalb von $D_n \supset D_R$ liegt)

und

$|P_n(z) - R_n(z)| < \varepsilon_n$

$\Rightarrow \sum_{n \geq N} (P_n(z) - R_n(z))$ konvergiert

glm auf D_R gegen holomorphe Fkt auf D_R

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (P_n(z) - R_n(z))$ konvergiert gegen meromorphe Fkt auf D_R

dies gilt für alle $R > 0$ $\Rightarrow$ Konvergenz gegen meromorphe Fkt f auf $\mathbb{C}$

(2) Polverhalten

Betrachte $R > 0$, sei N wie vorher

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} (P_n(z) - R_n(z))}_{\substack{\text{hat die gewünschten} \\ \text{Pole und Hauptteile} \\ \text{in } D_R}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} (P_n(z) - R_n(z))}_{\substack{\text{holomorph} \\ \text{auf } D_R}}$$

□

13.3. Bem: Fall allgemeinen Ωs ist komplizierter da man im Allgemeinen nicht immer Polynome für die R_n nehmen kann; man kann aber rationale Fkten wählen, deren Pole außerhalb von Ω liegen; dass dies immer möglich ist, ist die Aussage des Satzes von Runge.

13.4. Beispiel: konstruiere eine meromorphe Fkt auf $\mathbb{C}$, die Pole der Ordnung 1 hat für $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$

Lösung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ konvergiert nicht,

da für $z \in \mathbb{C}$: $\sum \frac{1}{z-n} \sim \sum \frac{1}{n} = \infty$

Wir verbessern dies durch Wahl

$$R_n(z) = -\frac{1}{n}$$

dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$ konvergiert, da

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{|z|}{n\,|z-n|} \leq \frac{2R}{n^2}$$

betrachte $z \in D_R \subset D_n$

d.h. $|z| \leq \frac{1}{2} n$

$\Rightarrow |z-n| \geq \frac{1}{2} n$

und

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty$$