14. Konforme Abbildungen und Schwarzsches Lemma

14.1. Definition: 1) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt <u>konform</u> (oder <u>biholomorph</u>), falls gilt:

(i) f ist bijektiv

(ii) f ist holomorph

(iii) f^{-1} ist holomorph

2) Zwei Gebiete Ω_1, Ω_2 heißen <u>konform äquivalent</u>, falls es eine konforme Abbildung $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ gibt.

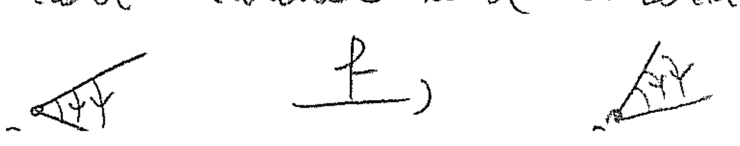
3) Für ein Gebiet Ω heißt

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{ f: \Omega \to \Omega \mid f \text{ konform} \}$$

die Automorphismengruppe von Ω.

(Beachte: dies ist eine Gruppe bzgl. Komposition!)

14.2. Bemerkungen: 1) Eine konforme Abb. erhält Winkel und Orientierung



2) Zwei Gebiete, die konform äquivalent sind, haben die gleichen funktionen-theoretischen Eigenschaften. Mit Hilfe von konformen $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ kann man Lösung eines Problemes in Ω_1 zu Lösung eines Problemes in Ω_2 transportieren.

3) Somit hat man die kanonischen Probleme:

(a) Welche Gebiete sind konform äquivalent, d.h. bestimme die Äquivalenzklassen von Gebieten in $\mathbb{C}$

(b) Bestimme $Aut(\Omega)$ für gegebenes Ω.

Für $\Omega = D_1(0)$ Einheitskreisscheibe wird dies durch Riemannschen Abbildungssatz und Schwarzsches Lemma beantwortet.

14.3. Beispiele: Sei

$D := D_1(0)$ Einheitskreisscheibe

$H := \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ obere komplexe Halbebe[ne]

1) Dann sind H und D konform äquivalent vermöge der Möbius-Transformation $f: H \to D$

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

denn: $f(z) \in \mathbb{D}$

$$\Longleftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1 \Longleftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(z-i)(\bar{z}+i)}_{= |z|^2 + i(z-\bar{z}) + 1} < \underbrace{(z+i)(\bar{z}-i)}_{= |z|^2 - i(z-\bar{z}) + 1}$$

$$\Longleftrightarrow 2i(z-\bar{z}) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2i} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$$

$$\Longleftrightarrow z \in H$$

2) $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind nicht konform äquivalent

denn: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konform

$\Rightarrow$ f ist beschränkte ganze Fkt

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ f ist konstant

d.h. f nicht injektiv

Wdsp

14.4. Schwarzsches Lemma: Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

und

$$|f'(0)| \leq 1$$

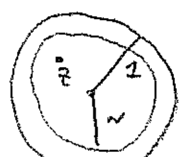
gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so gilt schon

$$f(z) = \lambda z \qquad \text{für ein } \lambda \text{ mit } |\lambda| = 1$$

Beweis: $f(0) = 0 \Rightarrow \frac{f(z)}{z}$ hat hebbare Singularität bei $z = 0$

$$\Rightarrow \exists\, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;:\; f(z) = z \cdot g(z)$$

$$\overset{4.8}{\underset{\text{Maximum pr.}}{\Longrightarrow}} \quad |g(z)| \leq \max_{\Theta} |g(r e^{i\Theta})| \qquad \text{für } |z| < r < 1$$



$$= \max_{\Theta} \frac{|f(r e^{i\Theta})|}{r}$$

$$\leq \frac{1}{r} \qquad (\text{da } |f(r e^{i\Theta})| \leq 1)$$

$$\overset{r \to 1}{\Longrightarrow} \quad |g(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

d.h. $|f(z)| = |z|\,|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \underbrace{\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}}_{\frac{f(z)}{z} = g(z)} = g(0)$$

$\Rightarrow |f'(0)| = |g(0)| \leq 1$

Sei $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$

oder sei $|f'(0)| = 1$

d.h. also $|g(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{D}$

d.h. $|g|$ nimmt Maximum im Innern an

$\overset{\text{Max Prinz}}{\Rightarrow}$ $g = \text{konst} = \lambda$ wobei $|\lambda| = 1$

$\Rightarrow f(z) = z\,g(z) = \lambda z$ □

<u>14.5. Satz:</u> Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass gilt

$$f(z) = \lambda z,$$

d.h. f ist eine Drehung um den Nullpkt.

<u>Beweis:</u> Beachte: $f^{-1}: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ erfüllt auch $f^{-1}(0) = 0$, d.h. wir können Schwarzsches Lemma sowohl auf f als auch f^{-1} anwenden; also

$$\left.\begin{array}{l} |f(z)| \leq |z| \text{ und} \\ |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow f(z) = \lambda z \text{ mit } |\lambda| = 1 \qquad \square$$

<u>14.6. Lemma:</u> Sei $a \in \mathbb{D}$. Setze

$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}$$

Dann ist $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform und es gilt

(i) $\varphi_a(0) = a$

(ii) $\varphi_a(a) = 0$

(iii) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$

<u>Beweis:</u> nachrechnen!

z.B.: $$\varphi_a(\varphi_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a}\,\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} = \frac{(z-a) - a(\bar{a}z-1)}{\bar{a}(\cancel{z}-a) - (\cancel{\bar{a}z}-1)}$$

<u>14.6 Satz:</u> Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und ein $a \in \mathbb{D}$, so dass gilt

$$f(z) = \lambda \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

<u>Beweis:</u> Setze $a := f^{-1}(0)$

$\Rightarrow f \circ \varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konform und

$$f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0$$

$\overset{14.5.}{\Longrightarrow} \quad f \circ \varphi_a(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$

$$\Rightarrow f(z) = \lambda \varphi_a(z)$$

$$= \lambda \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}$$

$\square$