15. Holomorphe Fkten als Abbildungen

15.1. Satz von der offenen Abbildung: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant. Dann ist $f(\Omega)$ offen in $\mathbb{C}$.

15.2. Bem.: Für Fkten auf $\mathbb{R}$ gilt dies nicht, z. B.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 \qquad \text{ist nicht offen}$$

$$f(\underbrace{(-1,+1)}_{\text{offen}}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht offen}}}{[0,1)}$$

in $\mathbb{C}$ gilt für $f(z) = z^2$

$$f(\underbrace{D_1(0)}_{\text{offen}}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{offen}}}{D_1(0)}$$

Beweis von 15.1: Sei $w_0 \in f(\Omega)$, d.h. $w_0 = f(z_0)$ für ein $z_0 \in \Omega$

Sei G Zushgskomp. von Ω mit $z_0 \in G \subset \Omega$

$\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ f nicht konstant auf G.

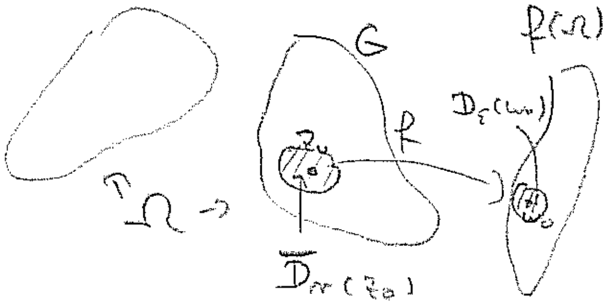
Betrachte $h : G \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto h(z) := f(z) - f(z_0)$$

$\Rightarrow h \in \mathcal{O}(G)$, $h(z_0) = 0$

$\overset{S.1}{\Longrightarrow} \exists\, g \in \mathcal{O}(G)$, $k \in \mathbb{N}$ mit
$g(z_0) \neq 0$

$$h(z) = (z - z_0)^k g(z) \qquad \forall z \in G$$

g stetig $\Rightarrow \exists\, r > 0$ so dass $\overline{D}_r(z_0) \subset G$



$f(\Omega)$ und $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}_r(z_0)$

also: h hat in $\overline{D}_r(z_0)$ keine andee Nullstelle als z_0

Setze $\varepsilon := \min\limits_{z \in \partial \overline{D}_r(z_0)} |h(z)|$

Da $\partial \overline{D}_r(z_0)$ kompakt, existiert min und $\varepsilon > 0$

Dann gilt $\forall\, w \in D_\varepsilon(w_0)$, $z \in \partial D_r(z_0)$:

$$\begin{aligned} |(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| &= |w - w_0| \\ &< \varepsilon \\ &\leq |h(z)| \\ &= |f(z) - f(z_0)| \end{aligned}$$

$\overset{\text{Rouché}}{\underset{11.4.}{\Longrightarrow}}$ # { Nullstellen von $z \mapsto f(z) - w$ in $D_r(z_0)$ }

$=$ # { Nullstellen von $h(z) = f(z) - w_0$ in $D_r(z_0)$ }

$h(z) = (z - z_0)^k g(z)$ hat k (gezählt mit Vielfachheit) Nullstellen in $D_r(z_0)$

$\Rightarrow$ $f(z) - w$ hat k Nullstellen in $D_r(z_0)$

$k > 0 \Rightarrow \exists$ (mindestens ein) $z \in D_r(z_0)$ mit

$f(z) = w$

also: $\forall\, w \in D_\varepsilon(w_0)\ \exists\, z \in D_r(z_0) : f(z) = w$

d.h. $D_\varepsilon(w_0) \subset f(\Omega)$

gilt für jedes $w_0 \in f(\Omega)$

$\Rightarrow f(\Omega)$ offen $\square$

15.3. Korollar (Satz von der Gebietstreue):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Beweis: Nach 15.1. ist $f(G)$ offen

f stetig, G zusammenhgd $\Rightarrow f(G)$ zusammenhgd

$\Rightarrow f(G)$ Gebiet $\square$

<u>15.4. Satz:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv. Dann ist $f(\Omega)$ offen und es gilt $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$.

Die Abbildung

$$f : \Omega \to f(\Omega)$$

ist biholomorph, für die Umkehrabbildung

$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ gilt:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \forall w \in f(\Omega)$$

<u>Beweis:</u> f injektiv $\Rightarrow$ f nicht konstant auf Zushgskomponente

$\overset{15.1}{\Rightarrow} f(\Omega)$ offen

$U \subset \Omega$ offen $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(U)$

$\overset{15.1.}{\Rightarrow} f(U)$ offen

also: U offen $\Rightarrow f(U)$ offen

$$f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$$

$\Rightarrow f^{-1}$ stetig

Sei $f(z) = w$ und $f'(z) \neq 0$

Dann folgt genau wie im Reellen (vgl. Ana I, 14.

dass f^{-1} bei w diffbar ist mit

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad (*)$$

Sei $N(f') := \{ z \in \Omega \mid f'(z) = 0 \}$

$\overset{5.1.}{\Longrightarrow}$ $N(f')$ hat keinen Häufungspkt in Ω

$\Longrightarrow$ $f(N(f'))$ —— " —— $f(\Omega)$

Nach obigem ist $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(\Omega) \setminus f(N(f')))$.

Da f^{-1} auf ganz $f(\Omega)$ stetig ist, ist jede Singularität von f^{-1} in $f(N(f'))$ hebbar

$\Rightarrow$ $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(\Omega))$

Die Gleichung $(*)$ gilt wegen Stetigkeit überall (in der Form $(f^{-1})'(w) \cdot f'(f^{-1}(w)) = 1$)

somit ist insbesondere $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$

$\square$

15.5 Bemerkungen: 1) Im Reellen gibt es diffbare injektive Abb. für die f' verschwinden kann, z.B.:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^3$$

f ist injektiv, aber $f'(0) = 0$

Umkehrabb. f^{-1} existiert auch bei 0, ist dort stetig, aber nicht diffbar

[beachte: $z \mapsto z^3$ ist in komplexen in der Nähe der Null nicht injektiv]

2) Im komplexen ist eine bijektive holomorphe Fkt also automatisch biholomorph

3) Zur Anwendung dieses Satzes muß man allerdings entscheiden können, ob eine Abb. injektiv ist. Dazu gilt wie im Reellen:

Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $z \in \Omega$ mit $f'(z) \neq 0$

Dann gibt es offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z, so dass $f: U \to \mathbb{C}$ injektiv ist

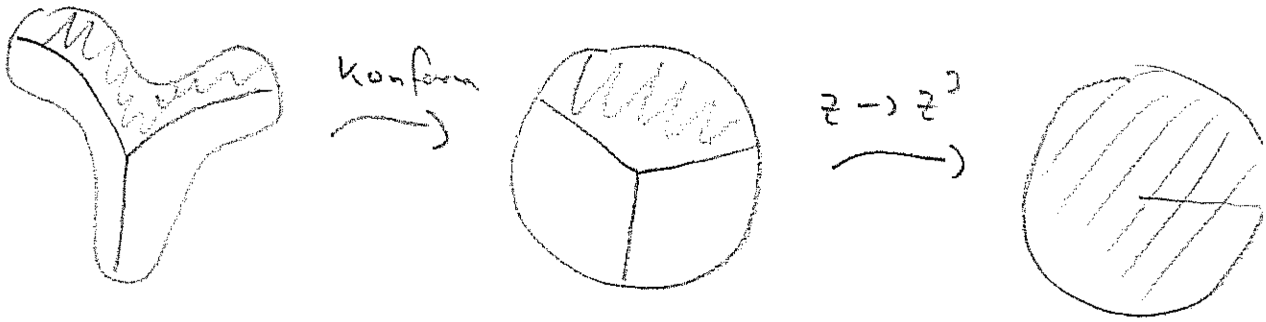
4) Beachte, dass dies kein globales Kriterium liefert.

z.B.: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllt

$$\exp'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

aber exp nicht injektiv auf $\mathbb{C}$

5) Genauere Analyse des Beweises von 15.1 zeigt das folgende Abbildungsverhalten einer holomorphen Fkt: Jede nichtkonstante holomorphe Fkt f mit $f(0) = 0$ ist in einer kleinen offenen Umgebung von 0 die Zusammensetzung einer konformen Abb. mit der n-ten Potenz. Die Winkel im Nullpkt werden ver-n-facht.



<u>15.6. Korollar:</u> Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Gilt

Re f = const oder Im f = const oder $|f|$ = const,

so ist f selbst konstant.

<u>Beweis:</u> Unter den Vor. ist $f(z)$ für kein $z \in G$ ein innerer Pkt von $f(G)$, d.h. $f(G)$ nicht offen $\overset{15.1}{\Longrightarrow}$ f konstant

□