16. Der Riemannsche Abbildungssatz

16.1. Motivation: In 14.3. haben wir gesehen, dass die obere Halbebene H konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe D ist. Wir wollen nun die zu D konform äquivalenten Gebiete G charakterisieren.

Sei $f: G \to D$ konforme Abb.

Dann ist f insbesondere ein Homöomorphismus (d.h. f, f^{-1} stetig) und aus D einfach zshgd folgt G einfach zshgd, d.h. G darf "keine Löcher haben".

Dies ist aber, abgesehen von $G \neq \emptyset$, die einzige Bedingung an G, damit es konform äquivalent zu D ist.

Das ist die Aussage vom Riemannschen Abb Satz.

nicht trivial ist!

Beachte, dass selbst die Konstruktion eines homöomorphen $f: G \to D$ für einfach zshgdes G

16.2. Erinnerung: 1) Ω heißt einfach zshgd, falls es zshgd ist und jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist (d.h. stetig zu einem Pkt zusammengezogen werden kann).

2) Sei Ω einfach zshgd und $\alpha \notin \Omega$.

Sei γ geschlossene, stückweise glatte Kurve in Ω. Dann ist γ nullhomotop, d.h. homotop zu konstanten Kurve

$$\gamma_1(t) = z_0 \qquad (0 \leq t \leq 1,\ z_0 \in \Omega)$$

d.h. nach 7.10 gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)}_{=0}$$

$= 0$ da Punktkurve Windungszahl Null hat für jeden Pkt $\notin \gamma_1^*$

Somit gilt für jeden Zyklus Γ in Ω:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \Omega^c$$

Jeder Zyklus Γ in Ω erfüllt also Voraussetzung von globalem Satz von Cauchy (7.4), d.h.
für jeden Zyklus Γ in Ω und jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

<u>16.3. Satz:</u> Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zshgd Gebiet. Dann gilt:

(a) Für jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ und jede geschlossene, stückweise glatte Kurve in G gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

(b) Zu jedem $f \in \mathcal{O}(G)$ gibt es ein $F \in \mathcal{O}(G)$, so dass $F' = f$

(c) Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in G, so existiert ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit
$f = \exp(g)$

(d) Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ nullstellenfrei in G, so existiert ein $\varphi \in \mathcal{O}(G)$ mit
$$f = \varphi^2.$$

<u>Beweis:</u> (a) siehe 16.2.

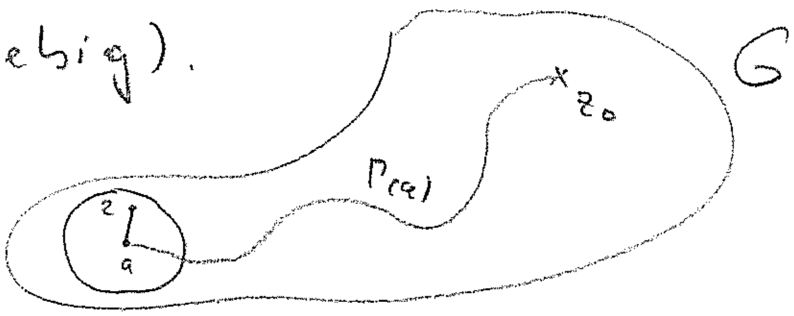
(a) $\Rightarrow$ (b): Fixiere $z_0 \in G$ und setze

$$F(z) := \int_{\Gamma(z)} f(\xi)\,d\xi \qquad (z \in G)$$

wobei $\Gamma(z)$ beliebiger Weg in Ω von z_0 nach z ist. (a) zeigt, dass Def. von $F(z)$ unabhängig von Wahl von $\Gamma(z)$ ist.

Beh.: $F'(a) = f(a) \qquad \forall a \in G$

Betrachte $a \in G$ und wähle $r > 0$, so dass $D_r(a) \subset G$. Wähle für $z \in D_r(a)$ den Weg $\Gamma(z)$ als $\Gamma(a) \cup [a, z]$ (mit $\Gamma(a)$ beliebig).



$$\Rightarrow F(z) - F(a) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta \quad \forall z \in D_r$$

$$\Rightarrow \frac{F(z) - F(a)}{z-a} - f(a) =$$

$$\frac{1}{z-a} \int_{[a,z]} [f(\zeta) - f(a)]\, d\zeta \xrightarrow{z \to a} 0$$

(vgl. Beweis zu 3.3.)

(b) $\Rightarrow$ (c): f keine Nullstelle in G

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(G)$$

$$\overset{(b)}{\Longrightarrow} \exists g : g' = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow f = c \cdot e^g \qquad \text{(vgl. 12.14)}$$

wobei $c = 1$ gewählt werden kann

(c) $\Rightarrow$ (d): Aus (c) folgt $\exists g \in \mathcal{O}(G)$:

$$f = e^g$$

Setze $\varphi := e^{\frac{1}{2} g}$

$\square$

16.4 Riemannsche Abbildungssatz:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$. Dann ist G konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Beweis: 1) Reduktion auf Fall, dass $G \subset \mathbb{D}$

$$G \neq \mathbb{C} \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C},\ c \notin G$$

$\Rightarrow f(z) := z - c$ hat keine Nullstelle auf G

und $f \in \mathcal{O}(G)$

$$\overset{16.3(d)}{\Rightarrow} \exists\, \varphi : G \to \mathbb{C} \text{ mit } \varphi^2(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

Es gilt: φ ist injektiv

denn: $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ für $z_1, z_2 \in G$

$$\Rightarrow \varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^2(z_1) & = & \varphi^2(z_2) \\ \| & & \| \\ f(z_1) & & f(z_2) \\ \| & & \| \\ z_1 - c & & z_2 - c \end{array}$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

$\Rightarrow \quad f: G \to f(G) =: \tilde{G}$

ist biholomorph, d.h. $\tilde{G}$ ist konform äquivalent zu G

Weiterhin gilt: $\left.\begin{array}{l} w \in \tilde{G} \\ w \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -w \notin \tilde{G}$

denn: sei $w \in \tilde{G} \Rightarrow w = f(z_1)$

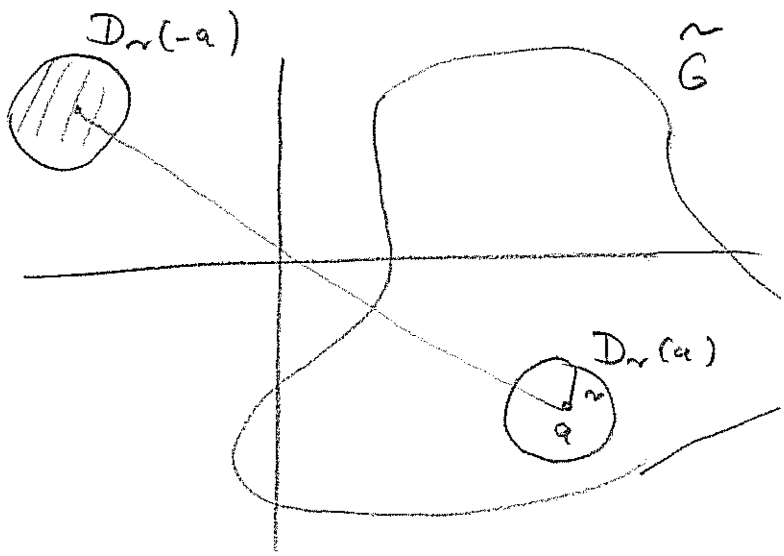
$-w \in \tilde{G} \Rightarrow -w = f(z_2)$

$\Rightarrow f(z_1) = -f(z_2) \Rightarrow f(z_1)^2 = f(z_2^2)$

$\Rightarrow z_1 = z_2$

$\Rightarrow w = -w$

$\Rightarrow w = 0$



Betrachte nun $a \neq 0$, $r > 0$, so dass

$D_r(a) \subset \tilde{G}$ und $0 \notin D_r(a)$

$\overset{\text{oben}}{\Rightarrow} \quad -w \notin \tilde{G} \quad \forall w \in D_r(a)$

d.h. $D_r(-a) \subset \tilde{G}^c$ $\qquad$ Setze $b := -a$

Betrachte nun $g(w) := \frac{1}{w-b}$

g ist auf $\tilde{G}$ holomorph und injektiv

Wegen

$$w \in \tilde{G} \Rightarrow |w-b| \geq r \Rightarrow |g(w)| = \frac{1}{|w-b|} \leq \frac{1}{r}$$

ist $g(\tilde{D}) \subset \overline{D}_{1/r}(0)$, und somit

$G^* := g(\tilde{D})$ konform äquivalent zu $\tilde{G}$ und beschränkt.

Durch Translation und Schrumpfung mit geeignetem Faktor (beide konform) können wir auch erreichen, dass

$0 \in G^*$ und $G^* \subset D$

2) oBdA können wir also annehmen:

$0 \in G \subset D$

Setze

$$\Sigma := \{ g : G \to D \mid \overset{g(0)=0}{g \in \mathcal{O}(G)}, \text{ injektiv}$$

(d.h. $g : G \to g(D)$ konform)

(beachte: $\Sigma \neq \emptyset$, da $g(z) = z \in \Sigma$

Wir zeigen: Falls $g \in \Sigma$ nicht surjektiv, d.h. $g(G) \neq D$, dann gibt es ein $h \in \Sigma$ mit

$$|h'(0)| > |g'(0)|$$

Wir setzen (vgl. 14.6), $\alpha \in \mathbb{D}$

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha} z - 1}$$

$\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist konform,

$\varphi_\alpha(0) = \alpha$, $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$

Sei $g \in \Sigma$, $g(G) \neq \mathbb{D}$, d.h.

$\exists\, \alpha \notin g(G)$

$\Longrightarrow$ $\varphi_\alpha \circ g \in \mathcal{O}(G)$ und

wegen

$\varphi_\alpha \circ g\,(z) = 0 \iff g(z) = \alpha$

hat

$\varphi_\alpha \circ g$ keine Nullstelle in G

$\Longrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{O}(G) : \psi^2 = \varphi_\alpha \circ g$

ψ ist injektiv (da g injektiv)

$\psi(G) \subset \mathbb{D}$ (da $g(G) \subset \mathbb{D}$)

Sei $\beta = \psi(0)$ und $h := \varphi_\beta \circ \psi$

Dann gilt $h: G \to D$ injektiv und

$$h(0) = \varphi_\beta(\psi(0)) = \varphi_\beta(\beta) = 0$$

also $h \in \Sigma$

Weiterhin

$$g = \varphi_\alpha \circ \psi^2 = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta \circ h)^2$$

$$= \varphi_\alpha \circ s \circ \varphi_\beta \circ h$$

wobei $s(z) = z^2$

$$= F \circ h$$

wobei $F = \varphi_\alpha \circ s \circ \varphi_\beta$

$$\Rightarrow g'(0) = F'(h(0)) \cdot h'(0)$$

$$= F'(0) \cdot h'(0)$$

$$F(0) = \varphi_\alpha(\beta^2)$$

aber $\beta^2 = \psi^2(0) = \varphi_\alpha(g(0)) = \varphi_\alpha(0) = \alpha$

also $F(0) = 0$

Da $F: D \to D$ nicht injektiv (s nicht inj.!)

Schwarzsches Lemma 14.4.

$$|F'(0)| < 1$$

Da g, h injektiv $\Rightarrow$ $|g'(0)|, |h'(0)| \neq$

und somit

$$|g'(0)| = \underbrace{|F'(0)|}_{< 1} \cdot |h'(0)|$$

$$< |h'(0)|$$

3) Setze nun

$$\eta := \sup\{|g'(0)| : g \in \Sigma\} \in [0, \infty$$

Nach (2) gilt also: Gibt es ein $h \in \Sigma$ mit $|h'(0)| = \eta$, dann ist

$h : G \to D$ surjektiv, also konform

4) Konstruiere solches h durch Approximation.

Wähle $h_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$|h_n'(0)| \xrightarrow{n \to \infty} \eta$$

(falls $\eta = \infty$, wähle z.B. so dass

$$|h_n'(0)| \geq n \quad)$$

beachte nun: $|h_n(z)| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, z \in G$

$\Rightarrow \{h_n\}$ lokalbeschränkt

$\overset{\text{Montel}}{\underset{10.8.}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ kompakt konvergente Teilfolge

$\{h_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Setze $\tilde{h}_k := h_{n(k)}$

$\Rightarrow \exists\, h : \tilde{h}_n \to h$ glm auf kompakten Teilmenge von G

$\overset{10.4.}{\Longrightarrow}$ h ist holomorph

und

$$|\tilde{h}_n'(0)| \to |h'(0)|$$
$$\downarrow$$
$$\eta$$

$\Rightarrow |h'(0)| = \eta$ [insbesondere also $\eta < \infty$]

Da $\underbrace{|\tilde{h}_n(z)|}_{< 1 \,\forall n} \to |h(z)|$

folgt $|h(z)| \leq 1 \quad \forall z \in G$

also: $h : G \to \overline{\mathbb{D}}$

aber, nach Satz der offenen Abb. ist $h(G)$ offen, d.h.

$$h : G \to D$$

[beachte : $\eta > 0 \Rightarrow h$ nicht konstant]

Somit bleibt noch 2.2.: h ist injektiv

5) Dies folgt aus

Satz von Hurwitz: Sei (f_n) eine kompakt konvergente Folge von holomorphen Fkten auf Gebiet G. Seien alle f_n injektiv. Dann ist die Grenzfkt f entweder injektiv oder konstant

(direkte Folgerung aus Aufgabe 5, Blatt 10)

Da h nicht konstant $\Rightarrow h$ injektiv

6) also : $h \in \Sigma_1$ mit $|h'(0)| = \eta$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $h : G \to D$ konforme Abbildung

$\square$