2. Komplexe Kurvenintegrale und Windungszahl

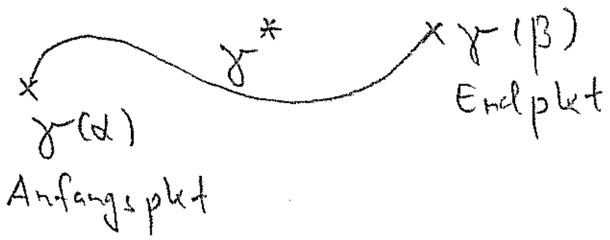
2.1. Def: Eine Kurve in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, wobei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$.

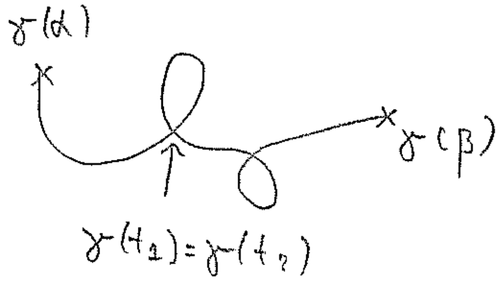
$I = [\alpha, \beta]$ heißt Parameterintervall, und

$$\gamma^* = \mathrm{Spur}(\gamma) := \{ \gamma(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta \} \subset \mathbb{C}$$

die Spur von γ.

Die Kurve ist geschlossen, falls $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.





2.2. Bem: 1) Eine Kurve in $\mathbb{C}$ ist das gleiche wie eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$ aus Analysis II, Kap. 6. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

Die Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t)$ ist also aus Analysis II bekannt, man sollte sich nur versichern, dass dies auch mit der Multiplikation auf $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ zusammenpaßt.

2) Sei $\varphi : I \to \mathbb{C}$ Kurve

Wir schreiben $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)$

wobei $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

φ ist dann stetig / diffbar in t, falls

φ_1 und φ_2 stetig / diffbar in t sind.

Die Ableitung $\dot{\varphi}(t)$ ist dann gegeben durch

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_1(t) + i\,\dot{\varphi}_2(t) \in \mathbb{C}$$

2.3. Proposition: 1) Summen, Produkte, Quotienten diffbarer Kurven sind wieder diffbar.

Insbesondere: Sind $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ diffbar, und ist $\psi(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$, so gilt

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'(t) = \frac{\varphi'(t)\,\psi(t) - \varphi(t)\,\psi'(t)}{\psi(t)^2}$$

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph

Sei $\psi : I \to \mathbb{C}$ diffbare Kurve mit

$\psi(I) \subset \Omega$. Dann ist auch

$\varphi : I \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) := f(\psi(t))$

diffbar und es gilt:

$$\dot{\varphi}(t) = f'(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t)$$

Beweis: Übungsaufgabe ! $\square$

Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ integrieren wir komponentenweise

2.4. Def.: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, mit

$$f = f_1 + i f_2 \quad , \quad f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Dann definieren wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b f_1(t)\,dt + i \int_a^b f_2(t)\,dt$$

2.5. Proposition: 1) Die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ ist linear, d.h. es gilt

i) $$\int_a^b (f(t) + \varphi(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

für $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig

ii) $$\int_a^b c \cdot f(t)\,dt = c \cdot \int_a^b f(t)\,dt$$

für $c \in \mathbb{C}$, $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig

2) Es gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, d.h.

i) $$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(s)\,ds\right) = f(t)$$ für $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ ...

$\forall t \in [a,b]$

ii) $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diffbar

3) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

<u>Beweis:</u> einfaches Nachrechnen für 1), 2)

beachte auch: 1), 3) sind Spezialfälle von entsprechenden Aussagen für Integrale $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ für bel. integrierbare Fkten $f : X \to \mathbb{C}$

Wir zeigen hier die einzig nicht direkt offensichtliche Aussage, nämlich (3)

(3) Falls $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, ist Aussage klar;

andernfalls haben wir Polarzerlegung

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \cdot \alpha$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$

beachte $\alpha^{-1} =: \beta$ erfüllt auch $|\beta| = 1$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \varphi(t)\,dt \right| = \beta \cdot \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \beta\,\varphi(t)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_a^b \beta\,\varphi(t)\,dt \right) \qquad (\text{da reell})$$

$$= \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}\,(\beta\,\varphi(t))}_{\leq |\beta\,\varphi(t)| \;=\; |\beta|\,|\varphi(t)| \;=\; |\varphi(t)|}\,dt$$

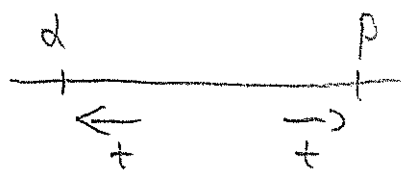
$$\leq \int_a^b |\varphi(t)|\,dt \qquad \square$$

<u>2.6. Bemerkung:</u> Im Analysis II, Kap. 6 hatten wir die <u>Länge</u> $L(\gamma)$ einer Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2 \mathrel{\hat=} \mathbb{C}^2$ definiert und für stetig diffbare γ gezeigt:

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)|\,dt \qquad (*)$$

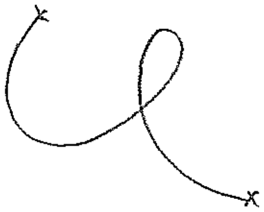
beachte hierbei: diffbar auf $[\alpha, \beta]$ heißt, dass auch in α, β die einseitigen Grenzwerte

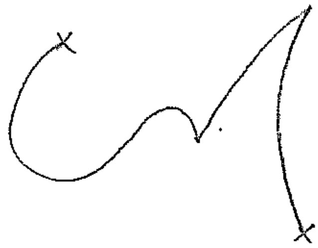
$$\dot\gamma(\alpha) = \lim_{\substack{t \to \alpha \\ t > \alpha}} \frac{\gamma(t) - \gamma(\alpha)}{t - \alpha}$$ existieren



$$\dot\gamma(\beta) = \lim_{t \to \beta} \frac{\gamma(t) - \gamma(\beta)}{t - \beta}$$

<u>2.7. Notation:</u> Eine Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, die auf $[\alpha, \beta]$ stetig diffbar ist, heißt <u>glatt</u>. Sie heißt <u>stückweise glatt</u>, falls γ stetig ist und es $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \beta$ gilt, so dass $\gamma|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}$ glatt ist für alle $i = 1, \dots, n-1$.





<u>2.8. Bemerkungen:</u> 1) Die Formel

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)| \, dt$$

gilt auch für stückweise glatte Kurven, wobei die rechte Seite dann als

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |\dot\gamma(t)| \, dt + \dots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} |\dot\gamma(t)| \, dt$$

zu interpretieren ist.

2) Wir wollen nun Integrale der Form

$\int_\gamma f(z) \, dz$ entlang Kurven γ in $\mathbb{C}$

definieren.. Approximation gemäß $\sum f(\xi_i)(z_{i+1} - z_i)$ führt zu folgender Definition

2.9. Def.: Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit $\gamma^* = \gamma[\alpha, \beta] \subset \Omega$. Dann definieren wir das <u>komplexe Kurvenintegral</u> von f über γ als

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt$$

2.10. Bemerkungen: 1) Formal ergibt sich dies aus:

$$dz = d\gamma(t) = \dot\gamma(t)\, dt$$

2) Für stückweise glattes γ mit Zerlegung $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \beta$ ist dies natürlich zu verstehen als

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt + \dots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, d$$

3) Kurvenintegral ist invariant unter glatten Parametertransformationen. Sei

$\varphi : [\tilde\alpha, \tilde\beta] \to [\alpha, \beta]$ bijektiv, stetig diffbar

und $\varphi(\tilde\alpha) = \alpha$

$\varphi(\tilde\beta) = \beta$

Dann gilt: Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, dann ist auch $\tilde\gamma := \gamma \circ \varphi : [\tilde\alpha, \tilde\beta]$

stückweise glatt und es gilt:

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = \int_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} f(\tilde\gamma(t))\,\dot{\tilde\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_{\tilde\alpha}^{\tilde\beta} f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\dot\gamma(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\cdot\dot\gamma(s)\,ds$$

$$= \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

beachte: $\tilde\gamma^* = \gamma$

D.h. insbesondere: Wir können unser Parameterintervall beliebig verschieben und verskalieren.

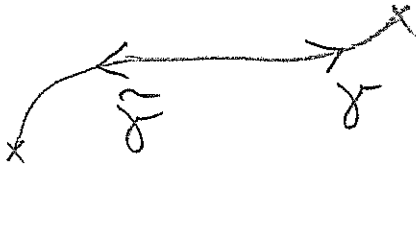
4) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, dann ist

$$\tilde\gamma(t) := \gamma(1-t), \quad 0 \le t \le 1$$

die zu γ <u>entgegengesetzte</u> Kurve; es gilt

$\tilde\gamma^* = \gamma^*$, aber

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz \qquad \forall \text{ stetigen } f$$



5) Es gilt

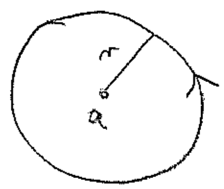
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right|$$

$$\overset{2.4}{\leq} \int_\alpha^\beta \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\leq \|f\|_\infty := \max\{|f(z)| \,|\, z \in \gamma^*\}} |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$$

$$= \|f\|_\infty \cdot L(\gamma)$$

2.11. Beispiele: 1) $\gamma(t) = a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

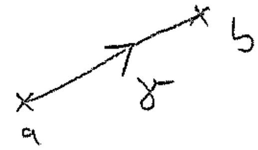


$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,e^{it}\,dt$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{|ire^{it}|}_{r}\,dt = r\,2\pi$$

2) Für $a, b \in \mathbb{C}$ bezeichne

$[a,b] = \gamma$, wobei



$$\gamma(t) = a + (b-a)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Dann gilt:

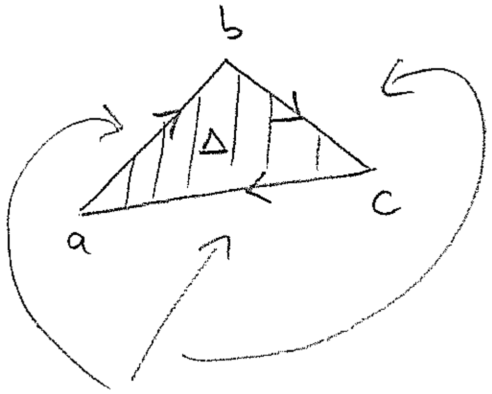
$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|$$

$[b,a]$ ist der zu $[a,b]$ entgegengesetzte Weg

3) Für $a,b,c \in \mathbb{C}$ bezeichne

$\Delta = \Delta(a,b,c)$ das Dreieck mit Vertizes a,b,c



$$\partial\Delta = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$$

Rand von Δ

also

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz$$

<u>2.12. Satz:</u> Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und besitze eine Stammfkt F, d.h. $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $F' = f$. Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve mit Anfangspkt $z_1 = \gamma(\alpha)$ und Endpunkt $z_2 = \gamma(\beta)$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

<u>Beweis:</u> i) Sei γ glatt. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t))}_{F'(\gamma(t))}\,\dot\gamma(t)}_{(F\circ\gamma)'(t) \quad (2.3(2))}\,dt$$

$$\overset{2.4}{=} (F\circ\gamma)(\beta) - (F\circ\gamma)(\alpha)$$

$$= F(z_2) - F(z_1)$$

ii) Für stückweise glattes γ folgt Aussage durch Zusammensetzen der glatten Stücke:

$$\gamma_i := \gamma\Big|_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \qquad z_i = \gamma(\alpha_i) = \gamma_i(\alpha_i)$$
$$= \gamma_{i-1}(\alpha_i)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \int f(z)\,dz$$

$$= f(z_2) - f(z_1) + (f(z_3) - f(z_2)) + \ldots$$
$$\ldots + (f(z_n) - f(z_{n-1}))$$

$$= f(z_n) - f(z_1) \qquad \square$$

<u>2.13. Korollar:</u> Sei $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ und F' stetig in Ω. Dann ist

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = 0$$

für jede geschlossene stückweise glatte Kurve in Ω.

<u>2.14. Beispiele:</u> 1) Da

$$\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

folgt für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_\gamma z^n\, dz = 0 \qquad \forall \text{ geschl. Kurven in } \mathbb{C}$$

und für $n = -2, -3, \ldots$

$$\int_\gamma z^n\, dz = 0 \qquad \forall \text{ geschl. Kurven in } \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

oder


2) Frage: Was passiert für $n = -1$, d.h.

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = ?$$

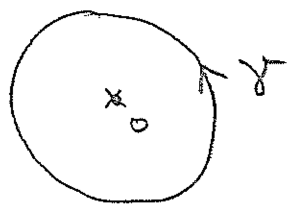
Wir berechnen einfachste Situation, wo γ Kreis mit Mittelpunkt 0 durchläuft

$$\gamma(t) = r \cdot e^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{r}\,\cancel{e^{it}}} \cdot \cancel{r} \cdot i\, \cancel{e^{it}}\, dt$$

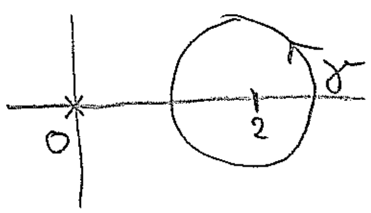
$$= 2\pi i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 1$$



[beachte: nach 2.11. impliziert dies, dass $\frac{1}{z}$ keine Stammfkt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzen kann; d.h. $\log z$ kann nicht stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert werden!]

betrachte nun auch Situation



$$\gamma(t) = 2 + e^{it}$$
$$0 \leq t \leq 2\pi$$

also:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{it}} \cdot i e^{it}\,dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}(2+e^{-it})}{(2+e^{it})(2+e^{-it})}\,dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}+1}{4+2(e^{it}+e^{-it})+1}\,dt$$

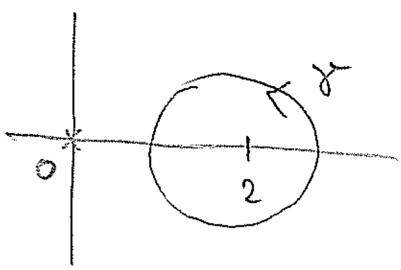
$$= i \int_0^{\pi} \frac{(2\cdot\cos t+1)+i2\sin t}{5+4\cos t}\,dt$$

$$= \int_0$$

Gemäß Übungsaufgabe wissen wir allerdings, dass auf $D_2(2)$ komplexer Logarithmus $\log z$ existiert, mit $\log z' = \frac{1}{z}$

Somit gilt nach Korollar 2.13:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$$



Wir werden nun sehen, dass die Werte 1 und 0 für diese Integrale eine fundamental Bedeutung haben: sie zählen, wie oft die Kurve den Pkt 0 umrundet!

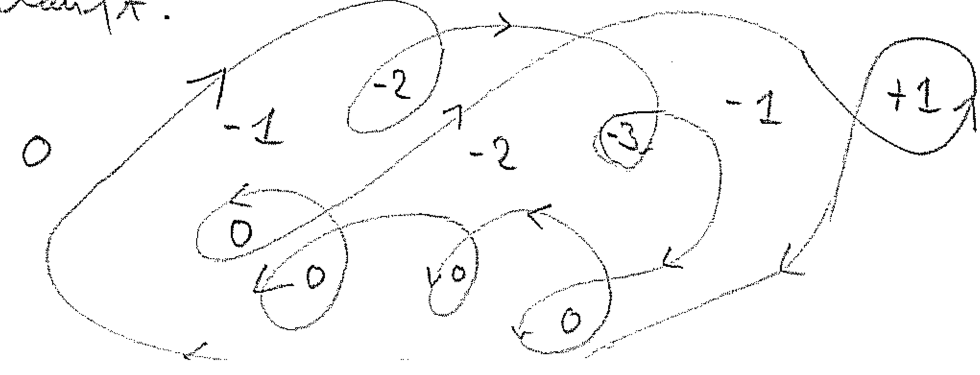
<u>2.15. Satz:</u> Sei γ eine geschlossene stückweise glatte Kurve, und $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Wir definieren

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \Omega)$$

Dann ist $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot) : \Omega \to \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Fkt auf Ω, welche konstant auf jeder Komponente von Ω ist und auf der unbeschränkten Komponente von Ω den Wert 0 hat.

<u>2.16. Notation:</u> $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ heißt <u>Windungszahl</u> (oder Index, Umlaufzahl) von γ bzgl. z. Sie mißt, wie oft die Kurve γ den Pkt z umläuft.



2.

<u>Beweis</u>: Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ und $S \subset [\alpha, \beta]$ die endlich vielen Stellen, wo γ nicht diffbar. Dann ist

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$$

Wir wollen zeigen (für beliebiges $z \notin \gamma^*$):

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$$

beachte: für $w \in \mathbb{C}$ ist

$$w \in \mathbb{Z} \iff e^{2\pi i w} = 1 \qquad \text{(vgl. Ana I, Kap 13)}$$

Wir setzen

$$\varphi(t) := \exp\left\{ \int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right\} \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

und müssen zeigen:

$$\varphi(\beta) \overset{!}{=} 1$$

$$\parallel$$

$$\exp\{2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z)\}$$

Es gilt: $\varphi'(t) = \varphi(t) \cdot \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \setminus S$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = \left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \right)' \quad -\parallel-$$

also: $\dfrac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ stetig auf $[\alpha,\beta]$

hat Ableitung 0 auf $[\alpha,\beta]\setminus$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} = \text{konst.} \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$$

(vgl. Übungsblatt 1, Auf. 6)

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z} = \frac{\varphi(\beta)}{\gamma(\beta)-z}$$

$$\overset{\varphi(\alpha)=1}{\Rightarrow} \quad \varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta)-z}{\gamma(\alpha)-z} = 1$$

da γ geschlossen,
d.h. $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$

$$\Rightarrow e^{2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z)} = 1$$

d.h. $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$

Wie in 1.12. zeigt man nun, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ durch Potenzreihen darstellbar ist, d.h. $\mathrm{Ind}_\gamma \in \mathcal{O}(\Omega)$, somit insbesondere:

$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ ist eine stetige Fkt in $z \in \Omega$

(alternativ: zeige dies direkt)

nun gilt aber (vgl. Blatt 0):

$$\left.\begin{array}{l}\text{stetig}\\ \text{ganz-zahlig}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{konstant auf jeder Zuslgskompone}$$

Betrachte nun unbeschränkte Komponente von Ω, d.h. dort $\exists z_n$ mit $|z_n| \to \infty$

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_n)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_n} \, d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(\gamma) \cdot \underbrace{\left\| \frac{1}{\cdot - z_n} \right\|_\infty}$$

$$= \sup_{\zeta \in \gamma^*} \left| \frac{1}{\zeta - z_n} \right|$$

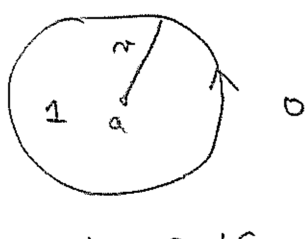
$$\to 0$$

falls $|z_n| \to \infty$

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ in unbeschränkte Komponente □

<u>2.17. Korollar:</u> Sei γ der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt a und Radius r. Dann ist

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |z-a| < r \\ 0 & \phantom{\text{falls }} |z-a| > r \end{cases}$$



$\gamma(t) = a + re^{it}$

<u>Beweis:</u> Nach 2.15. ist Ind_γ konstant im Inneren und 0 im Äußeren. Der Wert im Inneren ist gleich

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \cancel{ir} \int_0^{2\pi} (\cancel{r}\cancel{e^{it}})^{-1} \cancel{e^{it}} \, dt = 1$$ □