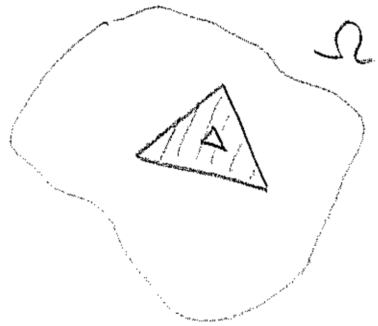
3. Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Mengen

3.1. Satz von Cauchy für Dreiecke: Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in einer offenen Menge Ω, $\Delta \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt



$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

Beweis: i) allgemeine Abschätzung

Ist f diffbar in $z_0 \in \Delta$, so ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \eta(z)(z - z_0)$$

wobei η in Ω stetig und $\eta(z) \longrightarrow 0$ für $z \to z_0$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \left(f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)\right) \int_{\partial\Delta} z^0\,dz$$

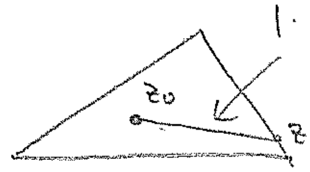
$$+ f'(z_0) \int_{\partial\Delta} z\,dz \quad \leftarrow = 0 \text{ nach } 2.14$$

$$+ \int_{\partial\Delta} \eta(z)(z - z_0)\,dz$$

also:

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| \le L(\partial\Delta)\cdot \underbrace{\max_{z\in\partial\Delta} |\eta(z)|\cdot|z-z_0|}_{\le \|\eta\|_{L^\infty(\partial\Delta)}\cdot L(\partial\Delta)}$$

$|\cdot| \le L(\partial\Delta)$



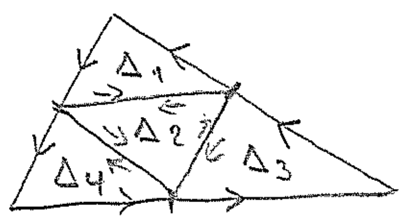
$$\le L(\partial\Delta)^2\cdot \|\eta\|_{L^\infty(\partial\Delta)}$$

beachte: LS ist linear in $L(\partial\Delta)$, RS quadratisch
für $L(\partial\Delta)\to 0$ ist dies nicht kompatibel;
um dies auszunutzen, werden wir unser Dreieck in kleinere Dreiecke zerlegen.

ii) Verfeinerung der Dreiecke

Wir setzen $\quad J := \Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big|$

und zerlegen Δ gemäß:



beachte: die inneren Strecken heben sich in der Summe der $\int$ weg!

Dann gilt

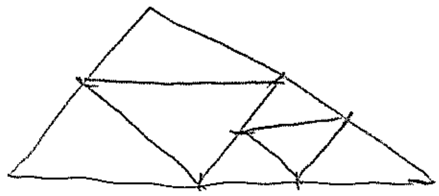
$$\underbrace{\int_{\partial\Delta}}_{|\cdot| = J} = \underbrace{\int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} + \int_{\partial\Delta_3} + \int_{\partial\Delta_4}}$$

$|\cdot| = J \Rightarrow$ mindestens eins dieser Integrale muß $|\cdot| \ge J/4$ erfüllen

Gelte dies für Δ_3, d.h.

$$\left| \int_{\partial \Delta_3} f(z)\, dz \right| \geq \frac{J}{4}$$

Wir setzen dann $\Delta^{(1)} := \Delta_3$ und zerlegen dieses weiter ...



– und wiederholen Argument, d.h. für mindestens eins der vier kleinen Dreiecke gilt $|\cdot| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta^{(1)}} f(z)\, d(z) \right|$

$$\geq \frac{J}{16}$$

Wir nennen dieses $\Delta^{(2)}$ und iterieren weiter, d.h.

Wir haben unendliche Folge von Dreiecken

$$\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit

- $L(\partial \Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L \qquad (L := L(\Delta))$
- $J \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta^{(n)}} f(z)\, dz \right|$

beachte nun: Nach Cantorschem Durchschnittsprinzip (vgl. Ana II Blatt 5, Aufg 2)

$$\exists!\; z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^{(n)} \subset \Delta \subset \Omega$$

Somit ist f in z_0 diffbar und wir benutzen nun Abschätzung von (i) für dieses z_0 (und zugehöriges η) und für die Dreiecke $\Delta^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, also gilt $\forall n$:

$$\left| \int_{\partial \Delta^{(n)}} f(z)\,dz \right| \leq L(\partial \Delta^{(n)})^2 \cdot \|\eta\|_{L^\infty(\partial \Delta^{(n)})}$$

$$\Rightarrow \quad J \leq 4^n \cdot \underbrace{L(\partial \Delta^{(n)})^2}_{(2^{-n} \cdot L)^2} \cdot \|\eta\|_{L^\infty(\partial \Delta^{(n)})}$$

$$= L^2 \cdot \underbrace{\|\eta\|_{L^\infty(\partial \Delta^{(n)})}}_{\substack{\text{beliebig klein für} \\ n \text{ hinreichend groß,} \\ \text{da } \eta \text{ stetig in } z_0}}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow J = 0$$

$\square$

3.2. Satz von Cauchy (verschärfte Version für Dreiecke)

Die Aussage von 3.1 gilt auch unter folgenden schwächeren Voraussetzungen an f:

$\exists\, p \in \Omega$ s.d. f stetig auf Ω

und

$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{p\})$

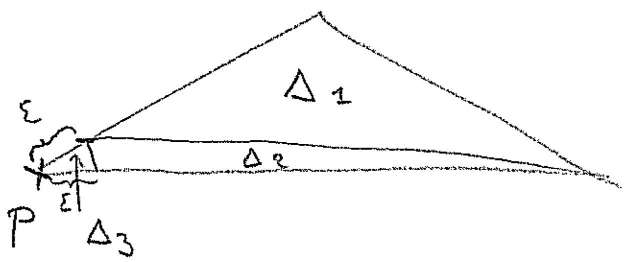
<u>Beweis:</u> Wir betrachten Dreieck $\Delta \subset \Omega$ und wollen zeigen:

$$\int_{\partial \Delta} f(z)\,dz = 0$$

i) $p \notin \Delta$: Beweis wie für 3.1

ii) $p =$ Vertex von Δ

Dann zerlegen wir Δ in Unterdreiecke gemäß



... und es gilt

$$\int_{\partial \Delta} = \underbrace{\int_{\partial \Delta_1} + \int_{\partial \Delta_2}}_{\substack{=0 \text{ da} \\ 3.1. \text{ auf } \Delta_1, \Delta_2}} + \int_{\partial \Delta_3}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz \right|$$

$$\leq \underbrace{L(\partial\Delta_3)}_{\leq 4\varepsilon} \cdot \underbrace{\|f\|_{L^\infty(\partial\Delta_3)}}_{\leq \|f\|_{L^\infty(\Delta)}}$$

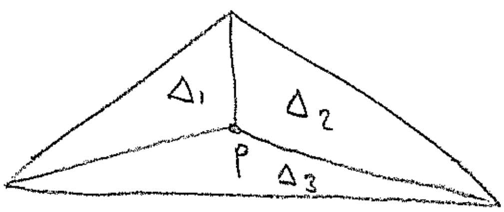
$$\leq 4\varepsilon \underbrace{\|f\|_{L^\infty(\Delta)}}_{<\infty \text{, da } f \text{ stetig}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

iii) p liegt im Innern von Δ

Dann zerlege Δ gemäß



also: $\int_{\partial\Delta} = \int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} + \int_{\partial\Delta_3}$ $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

alle $= 0$ nach (ii)

3.3. Satz von Cauchy für konvexe Menge:

Sei Ω konvexe offene Menge, $p \in \Omega$, f stetig auf Ω und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{p\})$.

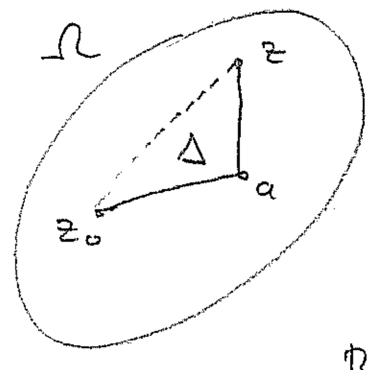
Dann ist $f = F'$ für ein $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, und somit gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede geschlossene stückweise glatte Kurve γ in Ω.

<u>Beweis:</u> Fixiere $a \in \Omega$

Ω konvex $\Rightarrow$ alle $[z,a] \subset \Omega \quad \forall z \in \Omega$



Nun definiere für $z \in \Omega$

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi$$

Betrachte nun $z_0 \in \Omega$; wir wollen zeigen $F'(z_0) = f(z_0)$

Sei $\Delta = \Delta(a, z, z_0)$

$$\overset{3.2.}{\Longrightarrow} \int_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0$$

d.h. $0 = \underbrace{\int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi}_{F(z)} + \int_{[z,z_0]} f(\xi)\,d\xi + \underbrace{\int_{[z_0,a]} f(\xi)\,d\xi}_{-F(z_0)}$

$$\Rightarrow \quad F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} \underbrace{[f(\xi)-f(z_0)]}_{|\cdot| < \varepsilon \ \forall \xi \in [z_0,z] \text{ falls } |z-z_0| \text{ hinr. klein}} d\xi$$

$$\leq \frac{1}{z-z_0} \cdot L([z_0,z]) \cdot \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon \qquad \text{für } |z-z_0| \text{ hinr. klein}$$

$$\xrightarrow{z \to z_0} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = f(z_0)$$

d.h. $f(z_0) = F'(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega$

$\Rightarrow F \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz$$

$$= 0 \qquad \text{nach 2.13}$$

(beachte: $F' = f$ stetig)

$\square$

3.4. Satz (Cauchysche Integralformel):

Sei γ geschlossene stückweise glatte Kurve in konvexen offenen Menge Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ gilt dann

$$f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

Insbesondere gilt für eine Kreisscheibe $D := D_r(a)$ mit $\overline{D} \subset \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad \forall z \in D$$

[∂D = im mathematisch positiven Sinn einmal durchlaufene Kreislinie um a mit Radius r]

also: Wert von f in z ist durch Werte von f auf Kreis ∂D bestimmt!

<u>Beweis:</u> Fixiere $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ und setze

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \xi \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \xi = z \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf Ω und
$g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z\})$ (da Quotient zweier holomorphe Fkten)

$$\overset{3.3.}{\Longrightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\xi)\, d\xi = 0$$

d.h. $$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= f(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi}_{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}$$

<u>3.5. Satz:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf Ω durch Potenzreihen darstellbar.

<u>Beweis:</u> Sei $D = D_r(a) \subset \Omega$ Kreisscheibe in Ω

Wir betrachten Fall wo $\overline{D} \subset \Omega$; ansonsten mache folgende Rechnung für $D_R(a) \subset D_r(a)$ $(0 < R < r)$ und $|R - r| \to 0$ am Schluss

$$\overset{3.4.}{\Longrightarrow} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \qquad \forall z \in D$$

Beweis ist nun analog zu 1.12, d.h. entwickle $\frac{1}{\xi - z}$ in geometrische Reihe

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)}$$

$$= \frac{1}{\xi - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}}$$

$$= \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^n$$

da $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| = \frac{|z-a|}{r} < 1 \quad \forall \xi \in \partial D$

ist konvergenz glm in ξ auf ∂D

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^n d\xi$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^n d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \underbrace{\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi}_{=: c_n}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

d.h. wir haben Potenzreihenentwicklung in $D = D_r(a)$

zu (*) beachte: falls $g_n \to g$ glm auf γ, dann gilt: $\int_\gamma g_n(z)\,dz \to \int_\gamma g(z)\,dz$

da $\left| \int_\gamma g_n(z)\,dz - \int_\gamma g(z)\,dz \right|$

$$= \left| \int_\gamma (g_n(z) - g(z))\, dz \right|$$

$$\leq L(\gamma) \cdot \| g_n - g \|_{L^\infty(\gamma)}$$

$$\to 0$$

$\square$

<u>3.6. Korollar:</u> Für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ist auch $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$; d.h. eine einmal komplex diff'bare Fkt ist beliebig oft komplex diff'bar.

<u>Beweis:</u> 3.5 und 1.10 $\square$

<u>3.7. Satz (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformeln):</u> Für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $D := D_r(a)$ mit $\overline{D} \subset \Omega$ gilt für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, d\xi \quad \forall z \in D$$

<u>Beweis:</u> Gemäß Beweis von 3.5. gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

$$\overset{1.10}{\Longrightarrow} \quad f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\xi) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^{n-k} \cdot \frac{1}{(\xi - a)^{k+1}} \, d\xi$$

da Konvergenz gleichmäßig

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(k)}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)}$$

$$= k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

also:

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\zeta) k! \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(\zeta - a)^{k+1}}}_{\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}} d$$

$\square$

<u>3.8. Satz von Morera:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, so dass

$$\int_{\partial \Delta} f(z)\, dz = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset \Omega$. Dann ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

<u>Beweis:</u> Betrachte $V \subset \Omega$ konvex

Wie im Beweis vom Satz von Cauchy 3.3.

folgt dann: $\exists\, F \in \mathcal{O}(V) : F' = f$

$\overset{3.6.}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{O}(V)$

also: $f \in \mathcal{O}(V)$ $\forall$ konvexen $V \subset \Omega$

$\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\square$