4. Direkte Folgerungen aus Cauchyschen Integralformeln: Satz von Liouville und Maximumprinzip

4.1. Satz (Cauchysche Ungleichungen):

Sei $\mathbb{D} := D_r(a)$ (für ein $a \in \mathbb{C}, r > 0$) mit $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Es gelte für ein $M > 0$:

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}$$

Dann gilt

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\, M}{r^n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Nach 3.7. gilt für

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}\, i r e^{it}\, dt$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a+re^{it})|}{r^n}\, dt$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} M\, dt = \frac{n!}{r^n} \cdot M \qquad \square$$

4.2. Bemerkung: Beachte, dass für komplexe Kurvenintegrale nicht die Dreiecksungleichung in der Form

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \not\leq \int_\gamma |f(z)|\, dz$$

gilt. Um die Dreiecksungleichung zu benutzen, müssen wir zu reellen Integralen übergehen!

4.3. Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt ganze Fkt.

4.4. Satz von Liouville: Eine beschränkte ganze Fkt ist konstant.

Beweis: Benutze 4.1 für $n = 1$.

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $f(z) \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\overset{4.1.}{\Longrightarrow} \quad |f'(a)| \leq \frac{M}{r} \qquad \text{für beliebiges } r >$$

$$\xrightarrow{r \to \infty} 0$$

also: $|f'(a)| = 0$, d.h. $f'(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f = \text{konstant}$

(siehe Aufgabe 6, Blatt 1) $\square$

4.5. Korollar (Fundamentalsatz der Algebra):

Sei $p(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat $p(z)$ (mindestens) eine komplexe Nullstelle. Somit läßt sich jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in ein Produkt von n Linearfaktoren zerlegen.

Beweis: Sei $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z) := \dfrac{1}{p(z)}$ ist in $\mathbb{C}$ definiert und überall diffbar, d.h.

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist ganze Fkt

Wir behaupten: f ist beschränkt

denn: Sei $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \quad (a_N \neq 0)$

d.h.

$$p(z) = a_N z^N \Big(1 + \underbrace{\frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_1}{a_N}\frac{1}{z^{N-1}} + \frac{a_0}{a_N}\frac{1}{z^N}}_{}$$

$\to 0$ für $|z| \to \infty$

d.h. $|\cdot| < \frac{1}{2}$ für $|z| \geq R$

für hinr. großes R

$\Rightarrow |p(z)| \geq |a_N|\, z^N \cdot \frac{1}{2}$ für $|z| \geq R$

$\Rightarrow |f(z)| = \dfrac{1}{|p(z)|} \leq \dfrac{2}{|a_N|} \cdot \dfrac{1}{|z|^N}$ — " —

$\leq \dfrac{2}{|a_N| \cdot R^N}$ — " —

also: f beschränkt auf $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$

aber auch beschränkt auf $\overline{D}_R(0)$

(da f stetig)

$\Rightarrow f$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt

$\Rightarrow f$ ist beschränkte ganze Fkt

$\Rightarrow f = \text{konst} \Rightarrow p = \text{konst}$ Wdsp

4.6. Satz: Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{für } z \in D_R(a).$$

Dann gilt für $0 < r < R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

Beweis: $f(a+re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$ (*)

konvergiert glm auf $[-\pi, \pi]$ für $r < R$

Betrachte Hilbertraum

$L^2[-\pi,\pi]$ = Vervollständigung von $C^1[-\pi,\pi]$ bzgl.

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

glm Konvergenz impliziert Konvergenz in L^2

$\Rightarrow$ (*) gilt auch in $L^2[-\pi,\pi]$

$$\langle e^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle = 2\pi \delta_{nm}$$

$\Rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist ONS in $L^2[-\pi,\pi]$

Stone-Weierstraß $\Rightarrow$ ist auch ONB

(vgl. Kap 15, Ana II)

Behauptung ist dann Satz von Parseval für ONB: (e_n) ONB

$$x = \sum \alpha_n e_n \Rightarrow \|x\|^2 = \sum \alpha_n^2 \qquad \square$$

<u>4.7. Satz (Maximumprinzip):</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhgd. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$. Dann gilt

$$|f(a)| \leq \max_{\Theta} |f(a + re^{i\Theta})| \qquad (*)$$

und Gleichheit gilt genau dann wenn f konstant ist auf Ω.

<u>Beweis:</u> Gemäß 4.1 (für $n=0$) gilt $(*)$.

Gelte dort Gleichheit, d.h.

$$|f(a + re^{i\Theta})| \leq |f(a)| \qquad \forall \Theta \in \mathbb{R}$$

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ in $D_r(a)$

$$\overset{4.6.}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(a + re^{i\Theta})|^2}_{\leq |f(a)|^2} d\Theta$$

$$\leq |f(a)|^2$$

$$= |c_0|^2$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = 0$

$\Rightarrow f(z) = f(a)$ in $D_r(a)$

$\Rightarrow f(z) = 0$ in Ω

↑ siehe nächstes Kapitel! □

4.8. Korollar: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sei $K \subset \Omega$ kompakt.
Die stetige reellwertige Fkt
$$|f| : K \to \mathbb{R}$$
nimmt dann ihr Maximum auf dem Rand ∂K von K an.

Beweis: Sei a innerer Pkt von K, wo $|f|$ Maximum annimmt.

$\Rightarrow |f(a)| \geq \max_{\Theta} |f(a + re^{i\Theta})|$ für r hinr. klein

$\overset{4.7.}{\Rightarrow}$ f konstant auf Ω, nimmt also Maximum auch auf ∂K an.