5. Nullstellen holomorpher Funktionen und Identitätssatz

5.1. Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Bezeichne

$$N(f) := \{ a \in \Omega \mid f(a) = 0 \}$$

Dann gilt entweder

(i) $N(f) = \Omega$

oder

(ii) $N(f)$ hat keinen Häufungspkt in Ω;

in diesem Fall gilt:

$\forall\, a \in N(f)\ \exists\, m = m(a) \in \mathbb{N}$ s.d.

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega)$$

wobei $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $g(a) \neq 0$

$N(f)$ ist dann höchstens abzählbar

5.2. Bezeichnung: $N(f)$ heißt <u>Nullstellenmenge</u> von f.

$m = m(a)$ heißt <u>Ordnung</u> der Nullstelle von f im Pkt a

<u>Beweis:</u> Sei $a \in N(f)$

Wähle $D_r(a) \subset \Omega$

$$\overset{3.5}{\Longrightarrow} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D_r(a)$$

Es gilt nun: Entweder

(a) $c_n = 0 \quad \forall n \Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in D_r(a)$

d.h. a ist innere Pkt von $N(f)$

oder

(b) $\exists$ kleinstes m mit $c_m \neq 0$

Dann setzen wir

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & z = a \end{cases}$$

$\Rightarrow g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$

und

$$\left.\begin{array}{l} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z-a)^k \\ \forall z \in D_r(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \in \mathcal{O}(D_r(a))$$

$\Rightarrow g \in \mathcal{O}(\Omega$

$$g(a) = c_m \neq 0 \overset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow} g \neq 0 \text{ in Umgebung } U \text{ von } a$$

$\Rightarrow f \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$

$\Rightarrow a$ ist isolierte Nullstelle von f.

Setze nun

$M := \{ a \in N(f) \mid$ Fall (a) tritt ein $\}$

$\Rightarrow$ M offen

und

M ist relativ abg. in Ω, d.h. $\Omega \setminus M$ offen

(d.h. $a_n \to a$, $a_n \in M$, $a \in \Omega \Rightarrow a \in M$

dies gilt, da: $\left. \begin{array}{l} f(a_n) = 0 \\ \forall n \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) = 0$

und, da $a_n \to a$, ist a keine isolierte Nullstelle)

$\Rightarrow$ $\Omega = M \cup (\Omega \setminus M)$ disjunkte Vereinigung

beide offen

Da Ω zusammenhängend

$\Rightarrow$ entweder $M = \Omega = N(f)$ $\Rightarrow$ (i)

oder $M = \emptyset$ $\Rightarrow$ (ii)

Im Fall (ii) ist $N(f)$ abzählbar, da jede kompakte Teilmenge von Ω nur endlich viele Nullstellen enthält, und Ω ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen (z.B. abg. Kugeln)

$\square$

5.3. Korollar (Identitätssatz): Sei Ω ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sei $A \subset \Omega$ eine Menge, welche einen Häufungspkt in Ω hat. Dann gilt:

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in A \implies f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Beweis: Betrachte $N(f-g)$. Voraussetzungen schliessen Fall (ii) von 5.1. aus, daher muss Fall (i) zutreffen. □

5.4. Bemerkungen: 1) Beachte: Satz gilt nicht, falls Ω nicht zusammenhängend

z.B.: $f \equiv 0$ in einer Komponente

$f \equiv 1$ in andere —"—

2) Beachte: 5.1. verbietet nur Häufungspkte in Ω; am Rand von Ω können die Nullstellen sich häufen. Dementsprechend muß A von 5.3. Häufungspkt in Ω besitzen, auf dem Rand von Ω reicht nicht aus!

3) Typische Anwendung von 5.3. ist wie folgt: beweise Identität zwischen holomorphen Fkten auf Ω durch Überprüfen der Identität auf "kleiner" Menge A mit Häufungspkt in Ω

5.5. Beispiel: Ausdehnen von Identitäten von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$

Betrachte $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

e^z ist Ausdehnung der entsprechenden Fkt.

$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Für diese wissen wir: $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

daraus wollen wir folgern: $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Zunächst betrachte für festes $x_1 \in \mathbb{R}$

$g(z) := e^{x_1 + z}, \quad f(z) := e^{x_1} e^z$

$g, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $g(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$\overset{5.3}{\Rightarrow} g(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

d.h. $e^{x_1 + z} = e^{x_1} e^z \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

Nun betrachte für festes $z_2 \in \mathbb{C}$

$\tilde{g}(z_1) := e^{z_1 + z_2}, \quad \tilde{f}(z_1) := e^{z_1} e^{z_2}$

$\tilde{g}, \tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $\tilde{g}(z_1) = \tilde{f}(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}$

$\overset{5.3.}{\Rightarrow} \tilde{g}(z_1) = \tilde{f}(z_1) \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}$

$\square$