6. Polstellen holomorpher Fkten

6.1. Beispiele: Folgende Fkten $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ sind für $z=0$ nicht definiert:

i) $f_1(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\qquad \left(\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots\right.$

ii) $f_2(z) = \dfrac{e^z}{z}$

iii) $f_3(z) = e^{1/z}$

Die "Singularität" dieser Fkten bei $z=0$ ist aber ganz verschieden

i) $\lim\limits_{z \to 0} f_1(z) = 1$

f_1 kann durch Def. $f_1(1) := 1$ zu $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ fortgesetzt werden

$\Uparrow$ mit Potenzreihenentwicklung

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Die Singularität bei 0 ist "hebbar".

ii) $\lim\limits_{z \to 0} |f_2(z)| = \lim\limits_{z \to 0} |e^z| \cdot \frac{1}{|z|} = +\infty$

$f_2(z)$ verhält sich wie $\frac{1}{z}$ für $z \approx 0$,

kann also nicht in $z = 0$ fortgesetzt werden

aber $\frac{1}{f_2(z)}$ macht Sinn für $z = 0$, hat

dort Nullstelle

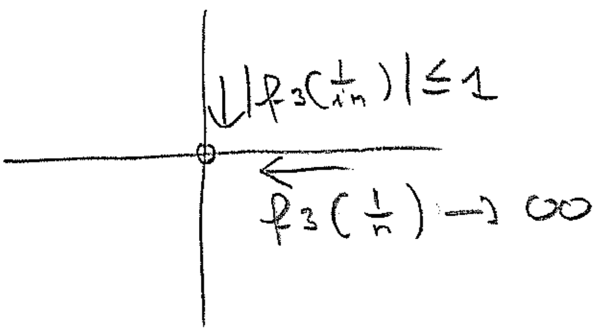
f_2 hat "Pol" bei $z = 0$

iii) f_3 verhält sich total irregulär in der Nähe von 0; gibt kein kontrollierbares Grenzwertverhalten

z.B. $f_3\left(\frac{1}{n}\right) = e^n \to \infty \quad (n \to \infty)$

aber

$\left|f_3\left(\frac{1}{in}\right)\right| = |e^{in}| = 1$, d.h. bleibt beschränkt für $n \to \infty$



$\frac{1}{f_3(z)}$ kann nicht zu $z = 0$ fortgesetzt werden

Die Singularität von f_3 bei $z = 0$ ist "wesentlich".

<u>6.2. Def.:</u> Sei $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$,

Dann heißt a <u>(isolierte) Singularität</u> von f.

Falls es ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ gibt mit

$$\tilde{f}(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\},$$

so heißt die Singularität a von f

<u>hebbar</u>.

[beachte: da $\tilde{f}$ in a stetig, ist $\tilde{f}(a)$, d.h. $\tilde{f}$, eindeutig durch f bestimmt]

<u>6.3. Satz (Riemannsche Hebbarkeitssatz)</u>:

Für $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ sind äquivalent:

(i) a ist hebbar

(ii) f ist beschränkt auf

$$\dot{D}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$$

für ein $r > 0$

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii)

klar, da die Fortsetzung $\tilde{f}$ stetig in $z = a$ und somit in Kreisscheibe beschränkt ist

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Wir definieren

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0 & z = a \end{cases}$$

$\Rightarrow h \in \mathcal{O} \in \Omega \setminus \{a\}$

und in a gilt:

$$h'(a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{h(z) - h(a)}{z-a}$$

$$= \lim_{z \to a} \underbrace{(z-a)}_{\to 0} \underbrace{f(z)}_{\text{beschränkt}}$$

$$= 0$$

also: $h'(a) = 0$ und $h \in \mathcal{O}(\Omega)$

Sei $D_r(a) \subset \Omega$

$$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in D_r(a)$$

Da $h(a) = 0 = h'(a) \Rightarrow c_0 = 0 = c_1$

Somit ist

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-2} \quad \text{in } \dot{D}_r(a)$$

und $f(a) := c_2$ gilt gewünschte Fortsetzung. □

6.4. Satz: Sei $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$.

Dann muß einer der drei folgenden Fälle eintreten:

(a) f hat eine hebbare Singularität in a.

(b) $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ mit $c_m \neq 0$, s.d.

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

eine hebbare Singularität in a besitzt.

(c) Für jedes $r > 0$ mit $D_r(a) \subset \Omega$ liegt $f(D_r(a))$ dicht in $\mathbb{C}$

(d.h. $\forall\, w \in \mathbb{C}\ \exists\, z_n \to a$, s.d. $f(z_n) \to w$)

6.5. Bezeichnungen: Im Fall (b) sagen wir:

f hat Pol der Ordnung m in a;

$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ heißt dann Hauptteil von f in a

Im Fall (c) hat f eine wesentliche Singularität bei a.

<u>Beweis:</u> Falls (c) nicht zutrifft

$\Rightarrow \exists r > 0, \delta > 0, w \in \mathbb{C}$ s.d.

$$|f(z) - w| > \delta \qquad \forall z \in \dot{D}_r(a)$$

Wir setzen

$\dot{D} := \dot{D}_r(a)$

und

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \qquad z \in \dot{D}$$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g \in \mathcal{O}(\dot{D}) \\ |g| < \frac{1}{\delta} \end{array}\right\} \overset{6.3.}{\Longrightarrow}$ Singularität hebbar, d.h. g kann ausgedehnt werden zu $g \in \mathcal{O}(D)$ wobei $D := D_r(a)$

Falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow f$ beschränkt in Umgebung von a

$\overset{6.3.}{\Longrightarrow}$ f hat hebbare Singularität in a

somit gilt Fall (a)

Falls g bei a Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$

$\overset{5.1.}{\Longrightarrow}$ $g(z) = (z-a)^m \, g_1(z) \qquad \forall z \in D$

wobei $g_1 \in \mathcal{O}(D)$

$g_1(a) \neq 0$

Gemäß (*) : $g_1(z) \neq 0 \quad \forall z \in \dot{D}$

also g_1 in D ohne Nullstelle

Setze $h := \frac{1}{g_1}$ in D

$\Rightarrow h \in \mathcal{O}(D)$

$$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad (z \in D)$$

wobei $b_0 = h(a) = \frac{1}{g_1(a)} \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) - w = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m} h(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} \qquad (z \in \dot{D})$$

somit gilt Fall (b)

(mit $c_k = b_{m-k}$) $\square$