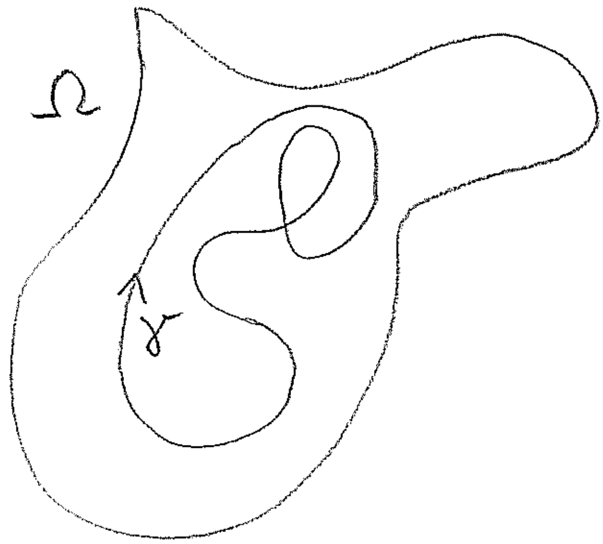
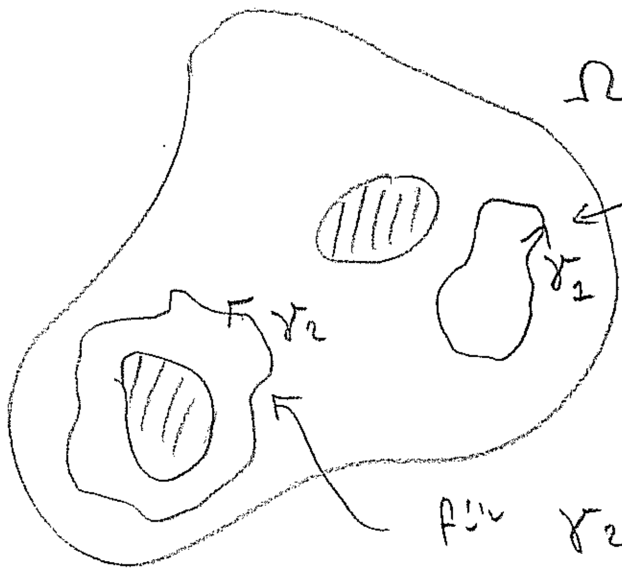
7. Der globale Satz von Cauchy

7.1. Motivation: Bis jetzt haben wir Satz von Cauchy nur für "schöne" (nämlich konvexe) Gebiete. Wesentlich dabei ist, dass Ω "keine Löcher" hat



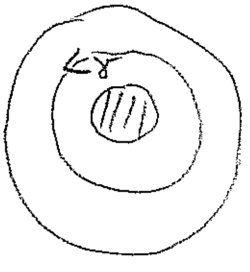
sowas ist okay

aber was ist wenn Ω Löcher hat



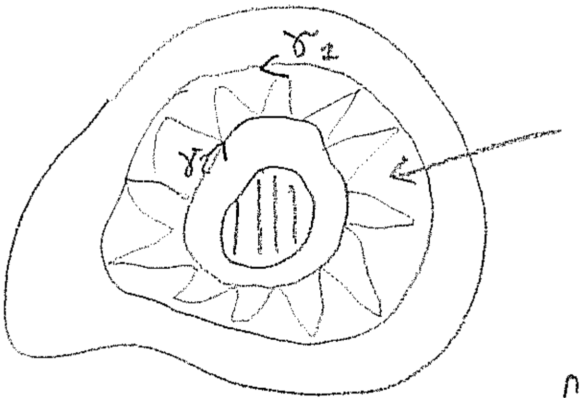
γ_1 ist okay

für γ_2 gilt Satz von Cauchy typischerweise nicht, z. B.



$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

Wir brauchen, dass γ in seinem "Inneren" keinen Teil von Ω^c enthält, d.h. γ soll keine Pkte von Ω^c umlaufen!



Innere von

$\gamma_1 + \gamma_2 =: \Gamma$

formale Summe von geschlossenen Kurven

Zyklus

7.2. Definition: Seien $\gamma_1, .., \gamma_n$ stückweise glatte Kurven in $\mathbb{C}$. Die formale Summe

$$\Gamma := \gamma_1 + .. + \gamma_n$$

heißt Kette. Wir setzen

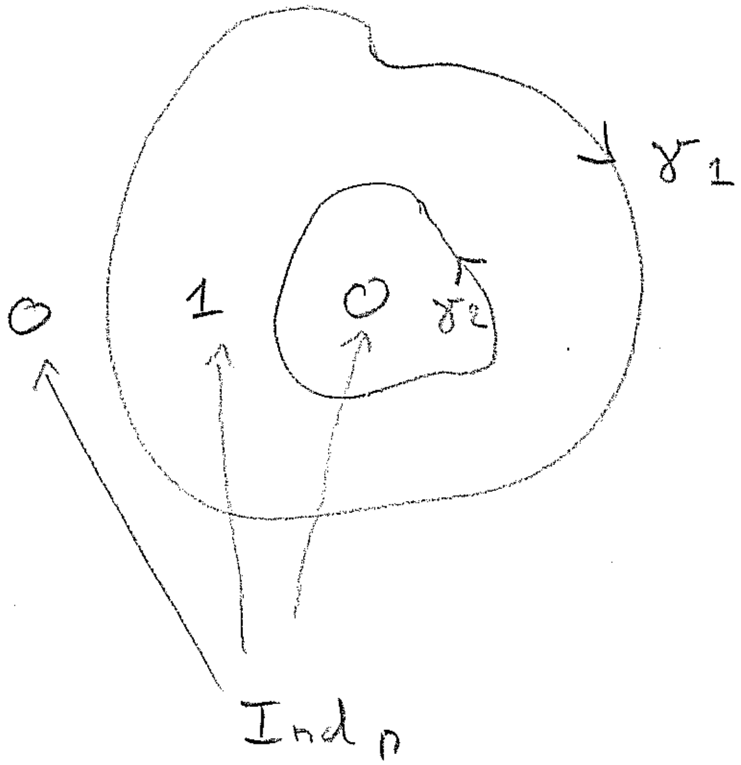
$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

und $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup .. \cup \gamma_n^*$

Sind die γ_i geschlossen, so heißt Γ ein Zyklus. Dann definieren wir den Index von $z \notin \Gamma^*$ bzgl. Γ durch

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(w)$$

7.3. Beispiel: Sei $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ wie folgt



7.4. Satz (Globale Satz von Cauchy): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, und Γ ein Zyklus in Ω, so dass gilt

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in \Omega^c$$

Dann gilt

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \qquad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

und

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

Insbesondere gilt also: Seien Γ_0 und Γ_1 Zyklen in Ω, so dass

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \quad \forall\, \alpha \notin \Omega.$$

Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$$

<u>Beweis:</u> Wir definieren auf $\Omega \times \Omega$ die Fkt

$$g: \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \neq z \\[2ex] f'(z) & \text{für } w = z \end{cases}$$

Es gilt: g ist auf $\Omega \times \Omega$ stetig (siehe Lemma 7.5

Dann definiere

$$h: \Omega \to \mathbb{C}$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z,w)\,dw \qquad (z \in \Omega)$$

Wir behaupten: $h(z) = 0 \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ $\qquad$ (*

(*) ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \underbrace{\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw}_{f(z)\cdot\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw}$$

$$= f(z)\cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z)$$

Dies ist unsere Integralformel.

Daraus folgt $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ wie folgt:

Wähle $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ und setze

$$F(z) := (z-a)\,f(z) \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \underbrace{F(a)}_{=0}\cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$$

Letzte Beh. folgt durch Anwendung von Integralformel auf Zyklus $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ $(= \Gamma_1 + (-\Gamma_0))$

zu Γ_0 entgegengesetzten Zyk

also bleibt z.z.: L. 7.5. und $h(z) = 0$

Für letzteres zeigen wir:

(i) h stetig in Ω

(ii) $h \in \mathcal{O}(\Omega)$

(iii) $h \equiv 0$ in Ω

(i) Standardargumente (benutze glm Stetigkeit von g auf kompakten Mengen

(ii) benutze Satz von Morera, d.h. wir müssen zeigen

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = 0 \qquad \forall \text{ Dreiecke } \Delta \subset \Omega$$

Es gilt

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \int_{\Gamma} g(z,w)\,dw\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \underbrace{\int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz}_{=0 \quad \forall w}\,dw \qquad \text{(Fubini)}$$

da, für $w \in \Omega$,

$z \mapsto g(z,w)$ holomorph

iii) Sei $\Omega_1 := \{ z \in \mathbb{C},\ z \notin \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}$

Definiere

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in \Omega_1)$$

$z \in \Omega \cap \Omega_1 \Rightarrow h_1(z) = h(z)$

$\Rightarrow \exists\, \varphi \in \mathcal{O}(\Omega \cup \Omega_1) : \varphi|_\Omega = h$

$\varphi|_{\Omega_1} = h_1$

Da $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in \Omega^c$

$\Rightarrow \Omega^c \subset \Omega_1$

$\Rightarrow \Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$

d.h. φ ist ganze Fkt (d.h. $\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$)

Ω_1 enthält auch unbeschr. komp. von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$

(da Ind_Γ dort $= 0$)

$\Rightarrow \lim\limits_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0$

$\Rightarrow \varphi$ beschränkt

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ $\varphi = \text{konst}$, d.h. $\varphi(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow h(z) = \varphi(z) = 0 \qquad \forall z \in \Omega$

<u>7.5. Lemma:</u> Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, und g in $\Omega \times \Omega$ definiert durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z-w} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dann ist g stetig in $\Omega \times \Omega$.

<u>Beweis:</u> Stetigkeit in Pkten $(z,w) \in \Omega \times \Omega$ mit $z \neq w$ ist klar.

Betrachte also (a,a) für $a \in \Omega$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, r > 0 : D_r(a) \subset \Omega$ und $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon \quad \forall \xi \in D_r(a)$

(da f' stetig)

Seien $z,w \in D_r(a)$; betrachte (für $z \neq w$)

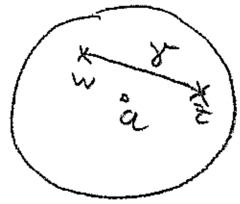
$$g(z,w) - g(a,a) = \frac{f(z) - f(w)}{z-w} - f'(a)$$

$$= \frac{1}{z-w} \underbrace{\int_{[w,z]} f'(\xi)\, d\xi}_{\int_0^1 f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt} - f'(a)$$

(siehe 2.12

$\gamma(t) = t \cdot z + (1-t)w \qquad (0 \le t \le 1)$

$\Rightarrow \gamma'(t) = z - w$



also (gilt auch für $z = w$)

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 \underbrace{\left(f'(\gamma(t)) - f'(a)\right)}_{|\cdot| < \varepsilon \quad \forall t} dt$$

$$\Rightarrow |g(z,w) - g(a,a)| < \varepsilon$$

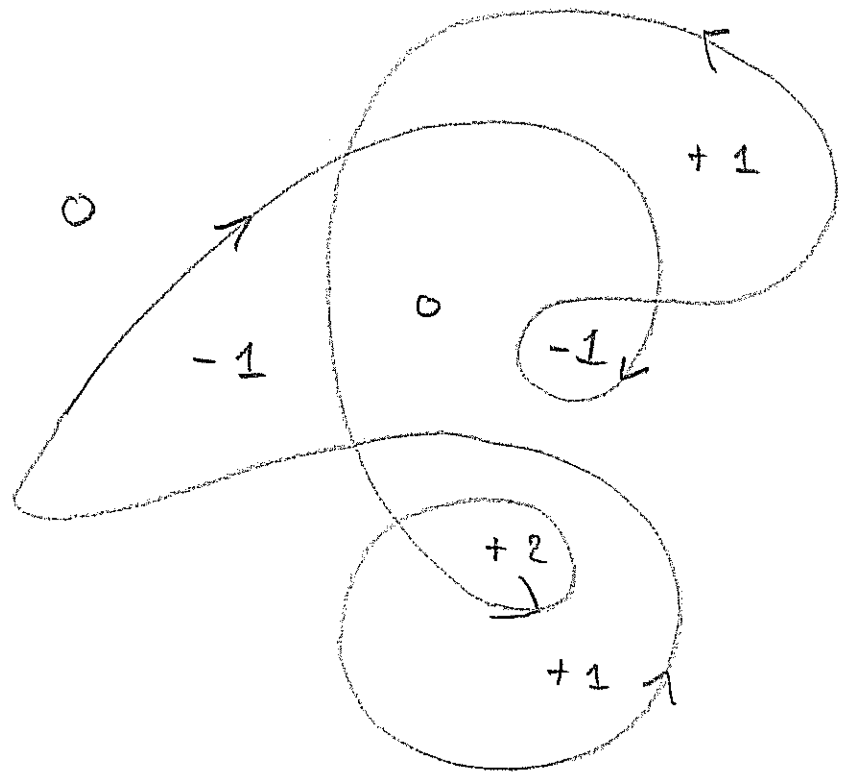
<u>7.6. Bemerkung</u>: Durch Differentiation unter den Integral folgt, dass man in 7.4. auch die verallgemeinerten Cauchyschen Integralformeln hat, d. h.

$$f^{(k)}(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw$$

$$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

<u>7.7. Bemerkung</u>: Es ist wichtig, Umlaufzahlen $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)$ zu berechnen. Zwei wesentliche Möglichkeiten dazu sind wie folgt:

1) Ind erhöht sich um 1 wenn man kurve von rechts nach links kreuzt.



2) Stetige Deformationen der kurve ändern Index nicht.

~~<u>7.8 Def.</u>: 1) Seien γ_0, γ_1 geschlossene stetige kurven in einem topologischen Raum X,~~

~~$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$~~

~~γ_0 und γ_1 heißen X-homotop~~

7.8. Def.: 1) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ_0, γ_1 zwei stetige geschlossene Kurven in Ω mit Parameterintervall $[0,1]$, d.h.

$$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$$

γ_0, γ_1 heißen homotop in Ω, falls es eine stetige Abb.

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

gibt s.d. $\forall s,t \in [0,1]$:

$$H(s,0) = \gamma_0(s) \quad , \quad H(s,1) = \gamma_1(s)$$

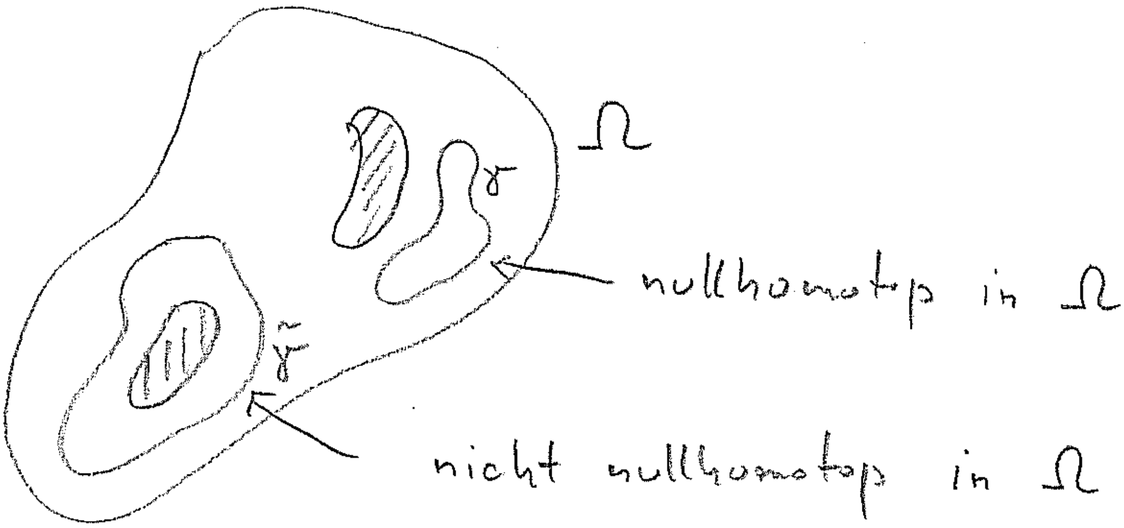
$$H(0,t) = H(1,t)$$

[d.h. $\gamma_s(t) := H(s,t)$ ist eine stetige Familie von geschlossenen Kurven, die γ_0 in γ_1 deformiert]

2) γ_0 ist nullhomotop in Ω, falls es homotop in Ω zu einer Konstanten Kurve $\gamma_1(t) = z_0$ $(0 \leq t \leq 1,\ z_0 \in \Omega)$ ist

3) Ω heißt einfach zusammenhängend, falls es zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop in Ω ist.

7.9. Beispiele und Bem.:

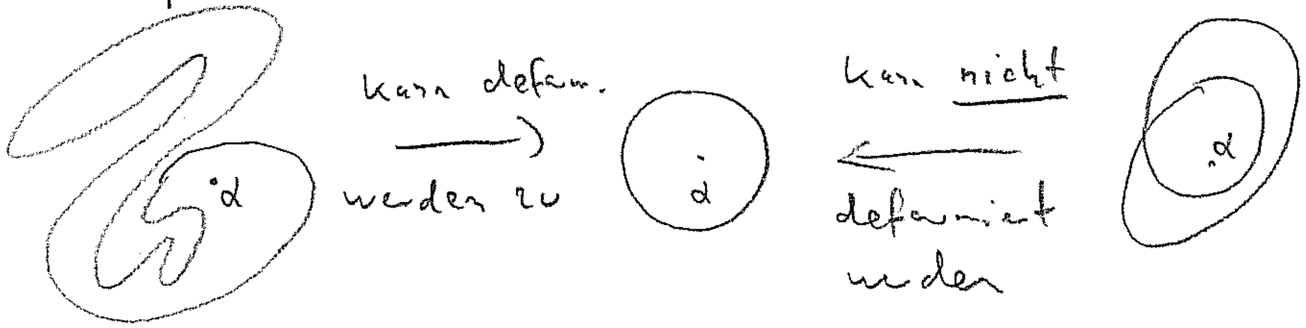


Ω einfach zusammenhängend heißt, dass Ω "keine Löcher hat"

7.10. Satz: Seien γ_0 und γ_1 geschlossene, stückweise glatte Kurven in Ω, welche homotop in Ω sind. Dann gilt für $\alpha \notin \Omega$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

Beispiel:



Beweis von 7.10. beruht auf

<u>7.11. Lemma:</u> Seien γ_0, γ_1 geschlossene stückweise glatte Kurven mit Parameterintervall $[0,1]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und gelte

$$(*) \quad |\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad \forall\, 0 \le s \le$$

Dann gilt

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$$

<u>Beweis:</u> $(*) \Rightarrow \alpha \notin \gamma_0^*$ und $\alpha \notin \gamma_1^*$

Wir setzen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) := \frac{\gamma_1(t) - \alpha}{\gamma_0(t) - \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - \alpha} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - \alpha}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - 0}\, dt}_{\operatorname{Ind}_\gamma(0)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - \alpha}\, dt}_{\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - \alpha}\, dt}_{\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)}$$

beachte: $0 \notin \gamma^*$ (da $\alpha \notin \gamma_1^*$)

Nun gilt aber:

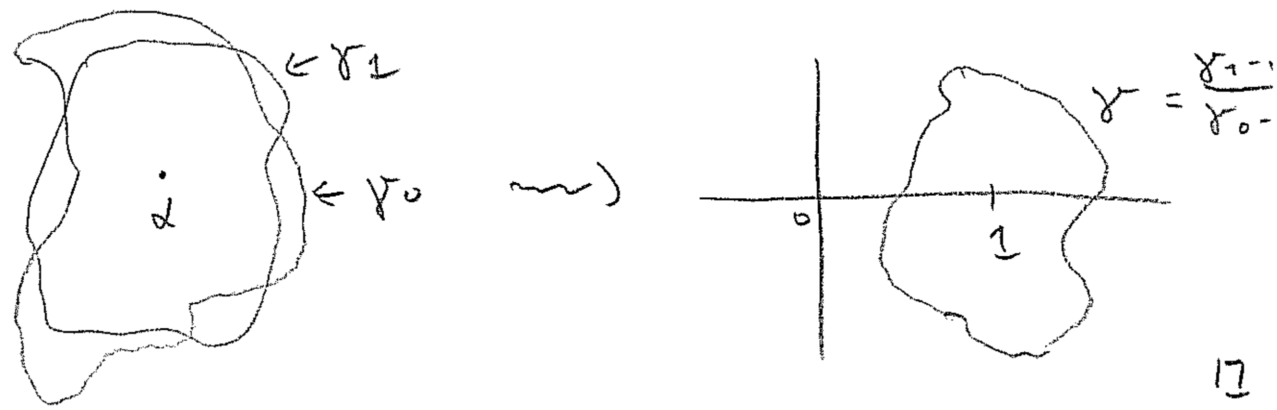
$$1 - \gamma(t) = \frac{(\gamma_0(t) - \alpha) - (\gamma_1(t) - \alpha)}{\gamma_0(t) - \alpha}$$

$$\Rightarrow |1 - \gamma(t)| = \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_0(t) - \alpha|} \overset{(*)}{<} 1 \quad \forall t \in [0,$$

$$\Rightarrow \gamma^* \in D_1(1)$$

d.h. $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$ (da 0 in unbeschr. Komp. von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$)

$$\Rightarrow \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$$



$\square$

<u>Beweisskizze von 7.10:</u> Deformiere γ_0 in γ_1 in endlich vielen Schritten

$$\gamma^{(0)} = \gamma_0, \; \gamma^{(1)} = H(\cdot, \tfrac{1}{n}), \; \gamma^{(2)} = H(\cdot, \tfrac{2}{n}), \ldots$$

$$\ldots \gamma^{(n)} = H(\cdot, 1) = \gamma_1$$

mit n so groß, dass für jeden Übergang $\gamma^{(k)} \to \gamma^{(k+1)}$ Lemma 7.11 anwendbar ist

Problem: da H nur stetig (und nicht glatt) sein muß, sind die $\gamma^{(k)}$ eventuell nicht stückweise glatt. Um dies zu korrigieren, werden die $\gamma^{(k)}$ durch geeignete Polygonapproximationen ersetzt. $\square$