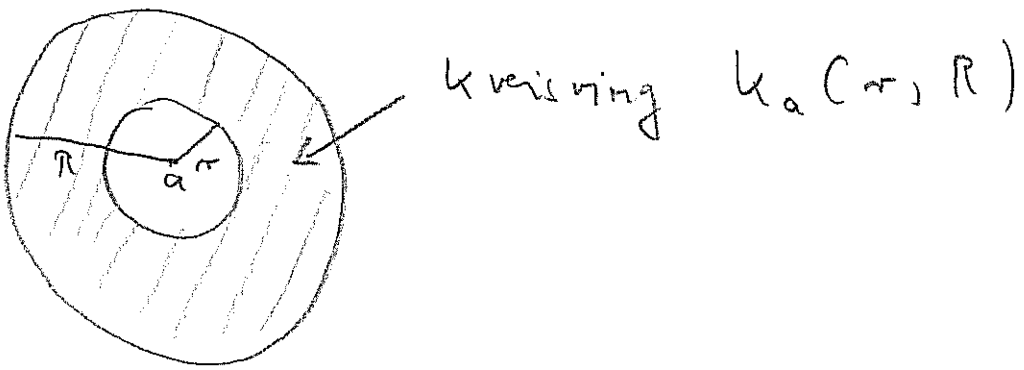
8. Laurent-Reihen

8.1. Motivation:

$f \in \mathcal{O}$(Kreisscheibe)

$\Rightarrow$ f hat dort Potenzreihenentwicklung

Frage: Gibt es für holomorphe Fkten auf Kreisringen vergleichbare Darstellung



Insbesondere: $r = 0 \Rightarrow K_a(0, R) = \dot{D}_a(r)$

Gibt es Analogon zu Potenzreihendarstellung um isolierte Singularitäten?

Betrachte Beispiele aus 6.1.

i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ hebbar, d.h. normale Potenzreihendarstellung

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \ldots$$

ii) $$f(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$$

Polstelle 1. Ordnung

iii) $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!}$$

wesentliche Singularität

Wir erwarten allgemein für Kreisring $K_a(r, R)$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{normale Potenzreihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k}_{\text{Potenzreihe in } \frac{1}{z-a}}$$

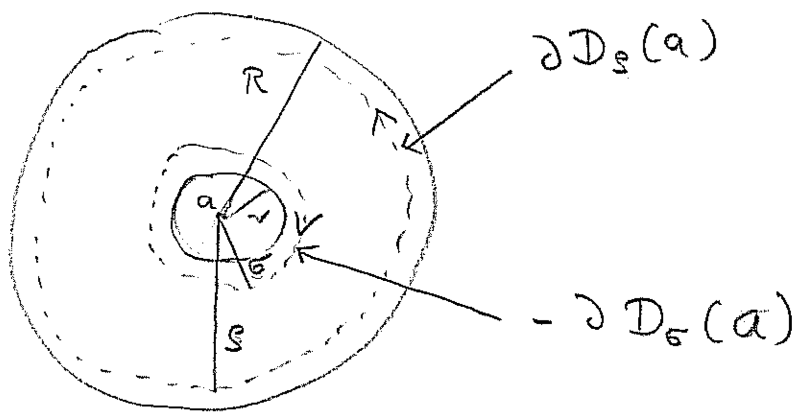
normale Potenzreihe
konvergiert für
$|z-a| < R$
"Nebenteil" f_2 von f

Potenzreihe in $\frac{1}{z-a}$
konvergiert für
$|z-a| > r$
"Hauptteil" f_1 von f
hat Eigenschaft
$\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$

$$f = f_2 + f_1$$

8.2. Satz: Sei f holomorph im Kreisring $K_a(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R$ $(a \in \mathbb{C},\ 0 < r < R)$. Dann gibt es eine in $U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > r\}$ holomorphe Fkt f_1 und eine in $U_2 := D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ holomorphe Fkt f_2, so dass auf $K_a(r,R) = U_1 \cap U_2$ die Zerlegung $f = f_1 + f_2$ besteht. Dabei kann f_1 so gewählt werden, dass $\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$ gilt. Durch diese Bedingungen werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.

Beweis:



Zyklus $\Gamma := \partial D_\varrho(a) - \partial D_\sigma(a)$ erfüllt Voraussetzung von 7.4., mit $\Omega = K_a(r, R)$

$\Rightarrow$ $\forall z \in K_a(\sigma, \rho)$ gilt (beachte: für diese z ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

(*)

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}_{\substack{\text{dies ist holomorph} \\ \text{innerhalb von } D_\rho(a); \\ \text{ist Kandidat für } f_2}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}_{\substack{\text{dies ist holomorph} \\ \text{außerhalb von } D_\sigma(a) \\ \text{ist Kandidat für } f_1}}$$

[vgl. Übungsblatt 7, Aufg. 3 :

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ definiert holomorphe Fkt in z außerhalb von γ^*]

Definiere

$$f_2^{(\rho)}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad (z \in D_\rho(a))$$

und

$$f_1^{(\sigma)}(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\sigma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad (z \in D_\sigma(a)^c)$$

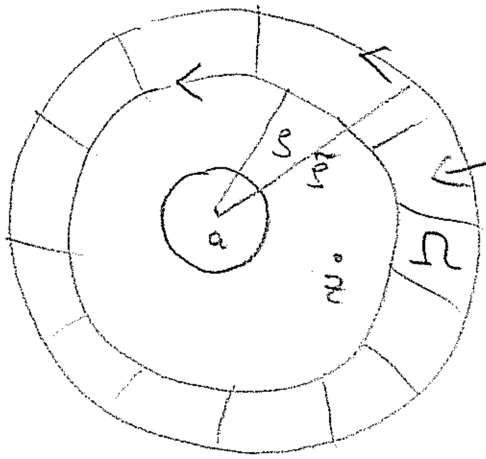
Diese sind von ρ, σ unabhängig, solange diese nur so gewählt sind, dass

$$r < \sigma < |z-a| < \rho < R$$

[denn: ist $|z-a| < \rho < \tilde{\rho} < R$,

so gilt nach 7.4.

$$\int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{|w-a|=\tilde{\rho}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



$w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ ist holomorph in Ω]

Somit ist f_2 für $z \in U_2$ durch

$f_2(z) := f_2^{(\rho)}(z)$ mit $|z-a| < \rho < R$

und f_1 für $z \in U_1$ durch

$f_1(z) := f_1^{(\sigma)}(z)$ mit $|z-a| > \sigma > r$

wohldefiniert.

Zerlegung $f = f_1 + f_2$ in $U_1 \cap U_2$

gilt nach (*), falls wir dort σ, ρ wählen mit

$r < \sigma < |z-a| < \rho < R$

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=5} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \to \infty$$

Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei

$$f_1 + f_2 = f = g_1 + g_2 \quad \text{analoge Zerlegung}$$

mit $\lim_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$

$$\Rightarrow f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \quad \text{auf } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$$

Definiere dann $h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf } \mathcal{U}_1 \\ g_2 - f_2 & \text{auf } \mathcal{U}_2 \end{cases}$

$\Rightarrow h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (da $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathbb{C}$)

und $h(z) \longrightarrow 0$ für $|z| \to \infty$

also h beschränkt ganze Fkt

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} h = \text{konst} \underset{\substack{\text{da} \\ h \to 0 \text{ für } |z|\to\infty}}{\overset{\uparrow}{=}} 0$

also: $h = 0 \Rightarrow f_1 = g_1$ auf $\mathcal{U}_1$

und $g_2 = f_2$ auf $\mathcal{U}_2$ $\square$

8.3. Notation: Sei f, f_1, f_2 wie in 8.2. Dann heißt f_1 der Hauptteil von f und f_2 der Nebenteil von f.

8.4. Satz: Sei f holomorph auf $K_a(r, R)$. Dann besteht dort eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Die erste Reihe konvergiert auf

$U_1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > r \}$

gegen den Hauptteil von f, die zweite Reihe konvergiert auf $U_2 := D_R(a)$ gegen den Nebenteil von f. Die Konvergenz ist dabei jeweils gleichmäßig auf kompakten Mengen.

Die Koeffizienten c_k sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \, dw \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

wobei $r < \rho < R$.

Beweis: Aussage für zweite Reihe ist Potenzreihenentwicklung von f_2.

Für f_1 betrachte:

$$F: w \mapsto a + \frac{1}{w}$$

$$\dot{D}_{1/r}(0) \to U_1$$

$\Rightarrow f_1 \circ F$ holomorph auf $\dot{D}_{1/r}(0)$

Da $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f_1(z)| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{w \to 0} f_1 \circ F(w) = 0$

also $f_1 \circ F$ holomorph auf $D_{1/r}(0)$ fortsetzbar, vermöge $f_1 \circ F(0) := 0$

$\Rightarrow f_1 \circ F$ hat auf $D_{1/r}(0)$ Potenzreihenentw.

$$f_1(F(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$ (Beachte: $b_0 = f_1(F(0)) = 0$)

Setze $w = (z-a)^{-1}$

$$\Rightarrow f_1(z) = f_1\left(a + \frac{1}{w}\right) = f_1(F(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-a)^n}$$

Setze dann $c_{-n} = b_n$

Formel für c_{-n} ergibt sich dann aus Formel für b_n (nachrechnen!) $\square$

8.5. Def.: Eine Laurent-Reihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn sowohl $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ als auch

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k (z-a)^k$$

konvergieren.

8.6. Korollar: 1) Sei f holomorph im Kreisring $K_a(r, R)$. Dann läßt sich f dort in eine Laurent-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

entwickeln; die Koeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw \qquad \text{wobei } r < \rho < R.$$

2) Sei $f \in \mathcal{O}(\dot{D}_R(a))$. Dann hat f eine Laurent-Reihen-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

und die Singularität bei a ist

(a) hebbar $\Leftrightarrow$ $a_k = 0 \quad \forall k < 0$

(b) ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ $a_k = 0 \quad \forall k < -m$

(c) wesentlich $\Leftrightarrow$ $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$

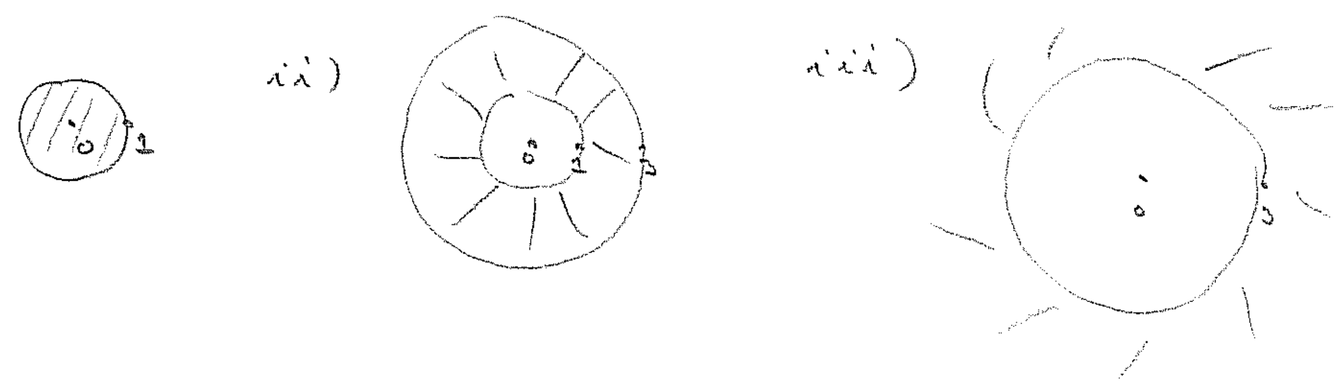
<u>8.7. Beispiel:</u> Betrachte

$$f(z) := \frac{2}{z^2 - 4z + 3} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}$$

f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$

Betrachte Laurentreihen auf

i) ii) iii)



i) $0 < |z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n \quad \text{auf } K_0(0,1)$$

ii) $1 < |z| < 3$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\frac{1}{3-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(-z^k\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

auf $K_0(1,3)$

iii) $|z| > 3$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(3^{-k-1} - 1\right) z^k \quad \text{auf } K_0(3,\infty)$$