9. Der Residuensatz

9.1. Def.: Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

die Laurententwicklung von f um a.
(für $0 < |z-a| < R$, $R > 0$ hinr. klein)

Dann heißt der Koeffizient c_{-1} das Residuum von f in a,

$$\mathrm{Res}(f; a) := c_{-1}$$

9.2. Bem: 1) Gemäß § 6. ist dies gegeben durch

$$\mathrm{Res}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a| = \rho} f(w)\, dw$$

für hinreichend kleines ρ (nämlich so dass $\rho < R$, wobei $f \in \mathcal{O}(K_a(0, R))$)

2) In hebbaren Singularitäten ist das Residuum 0.

9.3. Beispiele: 1) $f(z) = z^n$, $a = 0$

Dann ist

$$\operatorname{Res}(z^n, 0) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

2) $$f(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = 1$$

3) $$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$$

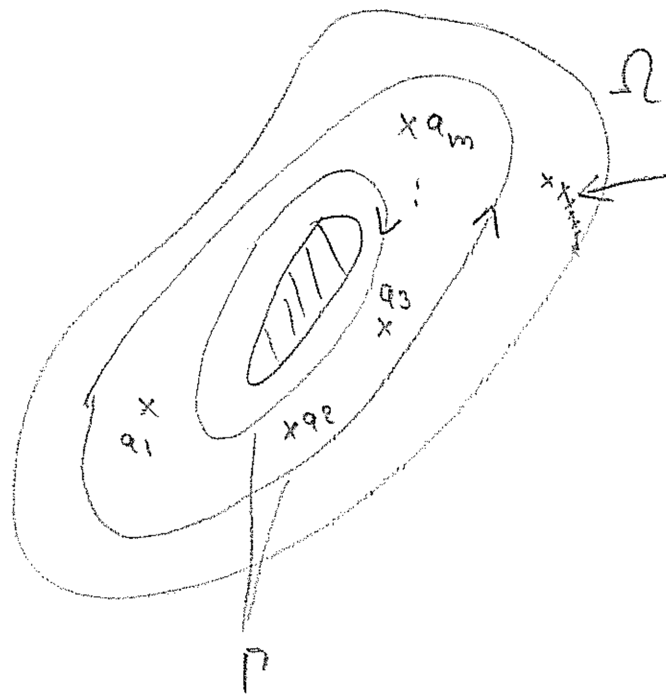
9.4. Residuensatz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und f in Ω holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Sei Γ ein Zyklus in $\Omega \setminus \{\text{Singularitäten von } f\}$, so dass gilt

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in \Omega} \operatorname{Res}(f; a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

[Beachte dass Summe über $a \in \Omega$ effektiv endliche Summe ist, da es nur endlich viele isolierte Singularitäten a gibt mit $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0$
Diese werden wir mit $a_1, .., a_m$ bezeichnen.



andere Singularitäten von f, außerhalb von Γ; davon kann es unendlich viele geben

]

9.5. Beispiele: 1) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

dann ist rechte Seite $= 0$ und

Residuensatz $=$ Satz von Cauchy

2) Sei $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, setze

$$f(z) := \frac{g(z)}{z-a}$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ und

$$\mathrm{Res}(f;a) = g(a)$$

Dann sagt Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = g(a) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a)$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-a}\,dz$$

Dies ist Cauchysche Integralformel für g.

<u>Beweis von 9.4</u>: Seien $a_1, \dots, a_m$ die isolierten Singularitäten von f mit $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_i) \neq 0$

Sei h_p der Hauptteil der Laurententwicklung von f um a_p (d.h. in $K_{a_p}(0, R_p)$ für hinr. kleines R_p).

beachte: h_p ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a_p\}$

und somit ist

$$F := f - \sum_{p=1}^{m} h_p$$

holomorph auf $\Omega \cap \{\mathrm{Ind}_\Gamma(\cdot) \neq 0\}$

(h_p hebt Singularität bei a_p auf, erzeugt aber auch keine anderen Singularitäten.)

$$\overset{7.4.}{\Longrightarrow} \int_\Gamma F(z)\,dz = 0$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_p(z)\,dz$$

$$h_p(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k^{(p)} (z-a_p)^k$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma h_p(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k^{(p)} \int_\Gamma (z-a_p)^k\,dz$$

und

$$\int_\Gamma (z-a_p)^k\,dz = 0 \quad \text{für} \quad k \neq -1$$

(da $(z-a_p)^k$ dann Stammfkt besitzt und Γ aus geschlossenen Kurven besteht)

$$\int_\Gamma (z-a_p)^{-1}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a_i)$$

gemäß Def. von Ind

also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_p(z)\,dz = c_{-1}^{(p)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-a_p)^{-1}\,dz$$

$$= \mathrm{Res}(f; a_p) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a_p)$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

9.6. Satz: Es gelten die folgenden Regeln zur Berechnung von Residuen.

(i) $\operatorname{Res}(\alpha f + \beta g; a) = \alpha \operatorname{Res}(f; a) + \beta \operatorname{Res}(g; a)$

(ii) Hat f einen Pol erster Ordnung bei a, so ist

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

(iii) Sei g in a holomorph, und f habe einen Pol erster Ordnung bei a; dann ist

$$\operatorname{Res}(g f; a) = g(a) \cdot \operatorname{Res}(f; a)$$

(iv) h habe eine Nullstelle erster Ordnung in a, dann ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{h}; a\right) = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)}{h(z)} = \frac{1}{h'(a)}$$

(v) f habe einen Pol n-te Ordnung in a; setze $g(z) := (z-a)^n f(z)$

dann gilt:

$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)$$

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

9.7. Beispiel: Berechnung eines reellen Integrals mit Hilfe des Residuensatzes

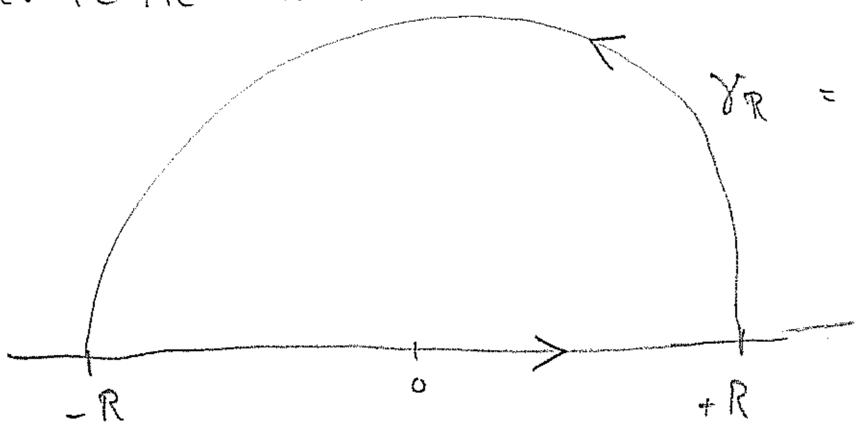
Betrachte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = ?$$

Wir wollen dies direkt berechnen, ohne Stamm fkt zu finden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

Betrachte nun



γ_R = Halbkreis um 0 mit Radius R

Residuensatz gibt:

$$\int_{-R}^{+R} + \int_{\gamma_R} = 2\pi i \cdot \text{Summe der Residuen im Inne}$$

Halbkreis ist für $R \to \infty$ vernachlässigbar, da i

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz \right| = \left| \int_0^1 \frac{R^2 e^{i2\pi t}}{1+R^4 e^{i4\pi t}} \cdot R i \pi \cdot e^{i\pi t}\, dt \right|$$

$$\gamma_R(t) = R \cdot e^{i\pi t}$$

$$\leq \pi \int_0^1 \underbrace{\left| \frac{R^3}{1+R^4 e^{i4\pi t}} \right|}\, dt$$

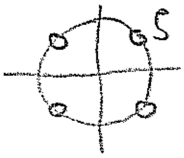
$$\leq \frac{c}{R} \quad \text{für } R \text{ hinreichend groß}$$

$$\xrightarrow{R \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^2}; a\right)$$

beachte: $\frac{z^2}{1+z^4}$ hat nur endlich viele (=4) Singularitäten

$$1+z^4 = 0 \iff z \in \{ e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4} \}$$



Sei $\varsigma = e^{i\pi/4}$ $\Rightarrow$ ς, ς^3 haben $\operatorname{Im} a > 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i \left\{ \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}; e^{i\pi/4}\right)}_{\frac{\varsigma^2}{(\varsigma-\varsigma^3)(\varsigma-\varsigma^5)(\varsigma-\varsigma^7)}} + \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}; e^{i3\pi/4}\right)}_{\frac{\varsigma^6}{(\varsigma^3-\varsigma)(\varsigma^3-\varsigma^5)(\varsigma^3-\varsigma^2)}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2} i}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$