2. Positive Elemente in einer C^*-Algebra

2.1. Def.: Sei A eine C^*-Algebra.

1) $a \in A$ heißt <u>selbstadjungiert</u>, falls $a = a^*$.

$A_{sa} := \{a \in A \mid a = a^*\}$

2) $a \in A$ heißt <u>positiv</u> ($a \geq 0$), falls

$a = a^*$ und $\sigma(a) \subset [0, \infty)$

$A^+ := \{a \in A \mid a \geq 0\}$

(beachte: $a = a^* \Rightarrow \sigma(a) \subset \mathbb{R}$)

2.2. Beispiel: 1) Ω kompakter Raum

$A = C(\Omega)$

$f \in A \Rightarrow \sigma(f) = \operatorname{ran} f$

$$((\lambda - f)^{-1}(t) = \frac{1}{\lambda - f(t)} \in C(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \neq f(t) \quad \forall t \in \Omega)$$

$f^* = f \Leftrightarrow f$ reellwertig

$f \geq 0 \Leftrightarrow f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \Omega$

(Übung: betrachte $C_0(\Omega)$ für Ω lokalkompakt!)

2) Sei $A = B(\mathcal{H})$ für $\mathcal{H}$ Hilbertraum. Dann gilt für $a = a^* \in A$:

$a \geq 0 \Leftrightarrow \langle a\eta, \eta \rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$ Übung!

<u>2.3 Bemerkung:</u> Sei $B \subset A$ Inklusion von C^*-Algebren, und $a \in B \subset A$. Dann gilt

$\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$ falls A, B mit Eins und $1_A = 1_B$

und

$\sigma_B(a) \cup \{0\} = \sigma_A(a) \cup \{0\}$ im allgemeinen Fall (Übung)

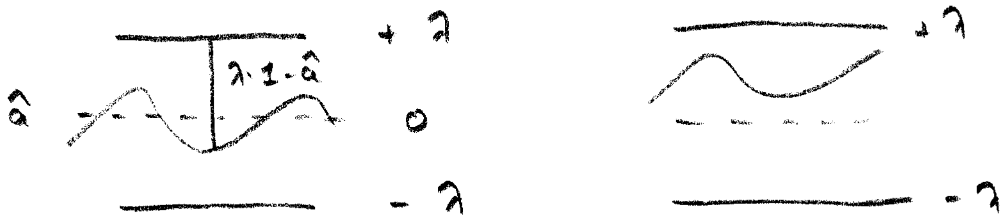
Somit ist Aussage $a \geq 0$ unabhängig von speziell betrachteter C^*-Algebra und es gilt

$B^+ = A^+ \cap B$

2.4. Lemma: Sei A C^*-Algebra mit $\mathbb{1}$ und $\lambda \geq \|a\|$. Dann gilt:

$$a \geq 0 \iff \|\lambda \mathbb{1} - a\| \leq \lambda$$

Beweis: $A \cong C(\Omega)$ $\quad a \cong \hat{a}$



$\square$

2.5. Folgerung: A^+ ist abgeschlossen in A.

Beweis: o.E. A mit Eins

$a_n \geq 0$, $a_n \to a$

$\Downarrow$

$\|\lambda \mathbb{1} - a_n\| \leq \lambda \quad$ (mit $\lambda \geq \|a_n\| \; \forall n \Rightarrow \lambda \geq \|a\|$)

$\big\downarrow {\scriptstyle n \to \infty}$

$\|\lambda \mathbb{1} - a\| \quad \Rightarrow \quad \|\lambda \mathbb{1} - a\| \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad a \geq 0$

$\square$

2.6. Folgerung: A C^*-Algebra, $a, b \in A$. Dann gilt:

$a, b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a + b \geq 0$

Beweis: o.E. A mit $\mathbb{1}$

Setze $\lambda := \|a\| + \|b\|$

Dann gilt

$$\|\lambda \mathbb{1} - (a+b)\| \leq \underbrace{\|\,\|a\| \cdot \mathbb{1} - a\,\|}_{\leq \|a\|} + \underbrace{\|\,\|b\| \cdot \mathbb{1} - b\,\|}_{\leq \|b\|} \quad (2.4)$$

$$\leq \|a\| + \|b\| = \lambda \overset{2.4}{\Rightarrow} a + b \geq 0$$

$\square$

2.7. Satz: Sei A C^*-Algebra und $a \in A^+$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $b \in A^+$ mit $b^2 = a$.

Beweis: i) Betrachte $f \in C(\sigma(a))$ mit $f(t) = \sqrt{t}$.

Da $f(0) = 0 \overset{1.23}{\Longrightarrow} b := f(a) \in C^*(a) \subset A$ definiert

$f \cdot f = id \Rightarrow b^2 = f(a) \cdot f(a) = a$.

ii) Sei c anderes Element in A^+ mit $c^2 = a$

$\Rightarrow a \in C^*(c)$

$\Rightarrow b = f(a) \in C^*(c)$

also: $a, b, c \in C^*(c) \mathrel{\hat{=}} C(\Omega)$

und $c^2 = a = b^2$, d.h. $\hat{c}^2 = \hat{a} = \hat{b}^2$ und $\hat{c}, \hat{b} \geq 0$

d.h. $\hat{c}(t) = \sqrt{\hat{a}(t)} = \hat{b}(t)$

$\Rightarrow c = b$

$\square$

2.8. Satz: Sei A C^*-Algebra und $a \in A$.

Dann gilt: $a^* a \geq 0$

Beweis: i) betrachte zunächst Fall a normal (z.B. $a^* = a$)

dann ist Aussage einfach, da

$C^*(a) \mathrel{\hat{=}} C(\Omega)$

$a^* a \mathrel{\hat{=}} |\hat{a}(\ )|^2 \geq 0$

ii) nun allgemeiner Fall

zeige zunächst: $-a^* a \in A^+ \Rightarrow a = 0$

Wegen

$\sigma(-aa^*) \cup \{0\} = \sigma(-a^*a) \cup \{0\}$ $\quad$ $\left(\begin{array}{l} \text{da allgemein} \\ \sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\} \end{array}\right)$

$\Rightarrow \; -aa^* \geq 0$

Schreibe nun

$a = b + ic$ $\quad$ mit $\quad b = \frac{a+a^*}{2}$ s.a

$a^* = b - ic$

$\qquad\qquad\qquad c = \frac{a-a^*}{2i}$ s.a.

$\Rightarrow \; aa^* + a^*a = 2b^2 + 2c^2$

$$\Rightarrow \; a^*a = \underbrace{2b^2}_{\geq 0} + \underbrace{2c^2}_{\geq 0} \underbrace{- aa^*}_{\geq 0} \geq 0 \qquad (2.6.)$$

also $\; -a^*a \geq 0 \quad \Rightarrow \sigma(a^*a) = -\sigma(-a^*a) \subset (-\infty, 0]$

$\qquad a^*a \geq 0 \quad \Rightarrow \sigma(a^*a) \subset [0, \infty)$

$\Rightarrow \; \sigma(a^*a) = \{0\}$

$\Rightarrow \; \|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0$

$\Rightarrow \; a = 0$

Betrachte nun allgemeines $a \in A$, 2.2.: $a^*a \geq 0$

Setze $b := a^*a \quad \Rightarrow b^* = b \quad \Rightarrow |b| := \sqrt{b^2} \geq 0$ eind. def.

Schreibe $b = b^+ - b^-$ wobei $b^+ = \max(0, b) = \frac{1}{2}(|b| + b) \geq 0$

$\qquad b^- = -\min(b, 0) = \frac{1}{2}(|b| - b) \geq 0$

beachte: $b^+ \cdot b^- = b^- \cdot b^+ = 0$ $\qquad$ (Funktionalkalkül)

Sei $c := ab^-$

$$\Rightarrow -c^*c = -b^- a^* a b^-$$
$$= -b^-(b^+ - b^-) b^-$$
$$= +(b^-)^3$$
$$\geq 0$$

$$\overset{\text{oben}}{\Rightarrow} \quad c = 0$$

$$\Rightarrow (b^-)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^- = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^*a = b = b^+ \geq 0$$ $\square$

<u>2.9. Notation:</u> Sei A C^*-Algebra, $a, b \in A_{sa}$

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \geq 0$$

<u>2.10. Bemerkung:</u> Es gilt:

i) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \qquad (a, b, c \in A_{sa})$

ii) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad ta \leq tb \qquad (a, b \in A_{sa},\ t \geq 0)$

(da $a \geq 0 \Rightarrow ta \geq 0$)

iii) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -a \geq -b$

iv) $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq c$

$$c - a = \underbrace{(c-b)}_{\geq 0} + \underbrace{(b-a)}_{\geq 0} \geq 0$$

<u>2.11 Satz:</u> Sei A C^*-Algebra. Es gilt:

1) $A^+ = \{a^*a \mid a \in A\}$

2) $a, b \in A_{sa}$, $c \in A$: $\quad a \leq b \Rightarrow c^*ac \leq c^*bc$

3) $0 \leq a \leq b \quad \Rightarrow \quad \|a\| \leq \|b\|$

4) A mit $\mathbb{1}$, $a, b \geq 0$ und invertierbar:

$$0 \leq a \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$$

<u>Beweis:</u> 1) klar nach 2.7. und 2.8.

2) $$c^* b c - c^* a c = c^*(b-a)c = c^*\sqrt{b-a}\sqrt{b-a}\,c = (\sqrt{b-a}\,c)^*(\sqrt{b-a}\,c) \geq 0$$

3) o.E. A mit 1

Es gilt allgemein

$$0 \leq a \Rightarrow \|a\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \lambda 1 \geq a\}$$

also: $$\|b\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \underbrace{\lambda 1 \geq b}_{\Rightarrow \lambda 1 \geq a}\} \geq \|a\|$$

4) allgemein gilt (Funktionalkalkül):

- $\left.\begin{array}{l} c \geq 0 \\ c \text{ invert} \end{array}\right\} \Rightarrow c^{-1} \geq 0 \qquad \left(\hat{c}^{-1}(t) = \frac{1}{\hat{c}(t)}\right)$

- $c \geq \varepsilon \cdot 1 \Rightarrow c$ invertierbar und $\|c^{-1}\| \leq \varepsilon^{-1}$ (für $\varepsilon > 0$)

Nun gilt:

$$a \leq b \Rightarrow 1 = \sqrt{a^{-1}}\, a \sqrt{a^{-1}} \overset{2)}{\leq} \sqrt{a^{-1}}\, b \sqrt{a^{-1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{a^{-1}}\, b \sqrt{a^{-1}}\right)^{-1}}_{= \sqrt{a}\, b^{-1} \sqrt{a}} \leq 1 \quad \Rightarrow b^{-1} = \sqrt{a^{-1}}\left(\sqrt{a}\, b^{-1}\sqrt{a}\right)\sqrt{a^{-1}} \overset{2)}{\leq} \sqrt{a^{-1}}\sqrt{a^{-1}} = a^{-1} \qquad \square$$

<u>Frage</u>: $0 \leq a \leq b \overset{?}{\Longrightarrow} 0 \leq a^\alpha \leq b^\alpha$ für $\alpha \geq 0$

<u>2.12 Gegenbeispiel</u>: Im Allgemeinen falsch für $\alpha = 2$:

$$0 \leq a \leq b \not\Longrightarrow a^2 \leq b^2$$

Sei $A = M_2$ $\quad 2\times 2$ - Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\gamma \\ \bar\beta & \bar\delta \end{pmatrix}$$

Sei

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ p, q Projektionen: $p^2 = p = p^*$, $q^2 = q = q^*$

also: $\sigma(p) = \sigma(q) = \{0, 1\}$

$\Rightarrow$ $p \geq 0$, $q \geq 0$

Es gilt:

- $p \leq p + q$ $\quad$ (da $0 \leq q$)
- $p^2 \not\leq (p+q)^2$

denn: Sei $p = p^2 \leq (p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2$

$$= p + pq + qp + q$$

$$0 \leq q + pq + qp = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{}$$

nicht positiv, da Eigenwerte

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \lightning$$

$\square$

2.13. Bemerkung: Es gilt sogar

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le a \le b \Rightarrow a^2 \le b^2 \\ \forall\, a,b \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ kommutativ}$$

2.14. Satz: Sei A C^*-Algebra und $a,b \in A$. Dann gilt:

$$0 \le a \le b \Rightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$$

Beweis: o.E. A mit 1

Sei $0 \le a \le b$ und $x := \sqrt{a}$, $y := \sqrt{b}$

also z.z.:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \le y^2 \\ x,y \ge 0 \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} x \le y$$

Sei $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$

wir zeigen: $-t \notin \sigma(y-x)$

$(\Rightarrow \sigma(y-x) \subseteq [0,\infty) \Rightarrow y-x \ge 0 \Rightarrow y \ge x)$

d.h.: $t+y-x$ invertierbar!

Betrachte

$$(t+y+x)(t+y-x) = c + id \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} c = c^* \\ d = d^* \end{array}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}\left[(t+y+x)(t+y-x) + (t+y-x)(t+y+x)\right]$$

$$= t^2 + \underbrace{2ty}_{\ge 0} + \underbrace{y^2 - x^2}_{\ge 0}$$

$$\ge t^2 \cdot 1$$

$\Rightarrow c$ positiv und invertierbar

$$\Rightarrow c + id = \sqrt{c}\,(\underbrace{1 + i\underbrace{\sqrt{c^{-1}}\, d\, \sqrt{c^{-1}}}_{\text{s.a.}}}_{})\sqrt{c}$$

invertierbar, da allgemein

$1 + ia$ invertierbar für $a = a^*$

$\quad \shortparallel$

$i(a-i) \qquad i \notin \sigma(a) \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{(t+y+x)(t+y-x)}}{c+id} \text{ invertierbar}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c+id)^{-1}(t+y+x)}_{=:f}(t+y-x) = 1$$

also: $\left.\begin{array}{l} f \cdot (t+y-x) = 1 \\ \Rightarrow (t+y-x)\, f^* = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f = f^* = (t+y-x)^{-1}$

also: $t+y-x$ invertierbar

$\Rightarrow \quad -t \notin \sigma(y-x) \quad \forall\, t > 0$

d.h. $\sigma(y-x) \subset [0, \infty)$

$\Rightarrow \quad y \geq x$ $\square$

<u>2.15. Bem.</u>: Es gilt allgemeiner:

$0 \leq a \leq b \quad \Rightarrow \quad a^\alpha \leq b^\alpha \quad$ für $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

(aber nicht für $\alpha > 1$!)