4. Positive lineare Funktionale

4.1. Def.: Sei A C^*-Algebra. Ein lineares Funktional $\tau: A \to \mathbb{C}$ heißt positiv, falls

$$\tau(a) \geq 0 \quad \forall a \geq 0$$

4.2. Bem.: 1) τ positiv $\Leftrightarrow$ $\tau(a^*a) \geq 0 \quad \forall a \in A$

2) φ $*$-Homomorphismus $\Rightarrow$ φ positiv

3) $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$ $\quad (b-a \geq 0 \Rightarrow \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b-a) \geq 0)$

4.3. Beispiele: 1) Sei $A = C([0,1])$

$$\tau_1 : A \to \mathbb{C}, \quad \tau_1(f) = \int f(t)\, dt$$

$$\tau_2 : A \to \mathbb{C}, \quad \tau_2(f) = f(t) \quad (\text{für ein } t \in [0,1])$$

$\Rightarrow \tau_1, \tau_2$ positiv

allgemeiner: $\tau: C([0,1]) \to \mathbb{C}$ positiv

$\Leftrightarrow \exists$ Maß μ auf $[0,1]$ mit: $\tau(f) = \int f(t)\, d\mu(t)$

2) $A = M_n$ $\quad n \times n$ - Matrizen

$$\tau: M_n \to \mathbb{C}$$

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mapsto \tau(a) := \operatorname{Tr} a = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$\Rightarrow \tau$ ist positiv

beachte: Es gilt: $\tau(ab) = \tau(ba) \quad \forall a, b \in M_n$,

d.h. τ ist eine Spur

beachte: Es gibt keinen $*$-Homomorphismus $\varphi: M_n \to \mathbb{C}$ für $n > 1$.

4.4. Satz: Sei A C^*-Algebra und

$\tau: A \to \mathbb{C}$

positives lineares Funktional. Dann ist

τ beschränkt, d.h. $\exists M > 0$:

$|\tau(a)| \leq M \|a\| \quad \forall a \in A$

Ordnungserhaltung
$\rightsquigarrow$ Stetigkeit
$\rightsquigarrow$ Daniell Konstruktion vom Maß

Beweis: Da wir beliebiges $a \in A$ als

$a = c + id = (c^+ - c^-) + i(d^+ - d^-)$ mit $c^+, c^-, d^+, d^- \geq 0$

schreiben können, reicht es z.z.:

τ ist beschränkt auf $S := \{a \in A \mid a \geq 0, \|a\| \leq 1\}$

Annahme: τ nicht beschränkt auf S, d.h. $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$

mit $2^n < \tau(a_n)$ (beachte: $\tau(a_n) \geq 0$)

$\forall n \in \mathbb{N}$

Setze $a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ konv. da $\|a_n\| \leq 1$

$\Rightarrow a \in A^+$ (2.5.)

Da $\tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) > 1 \Rightarrow \tau\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{N} \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) > N$

$\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} =: a \Rightarrow \underbrace{\tau\left(\sum \frac{a_n}{2^n}\right)}_{> N} \leq \tau(a)$

$\Rightarrow N < \tau(a) \quad \forall N \in \mathbb{N}$

↯

$\Rightarrow \tau$ auf S beschränkt

$\Rightarrow \tau$ auf A beschränkt $\square$

4.5. Bem.: Sei A C^*-Algebra und $\tau : A \to \mathbb{C}$ positives lineares Funktional. Setze

$$\langle a, b \rangle := \tau(b^* a) \qquad (a, b \in A).$$

Dann ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : A \times A \to \mathbb{C}$$

positive Sesquilinearform, d.h.

- linear im ersten, anti-linear im zweiten Argument
- $\langle a, a \rangle \geq 0 \quad \forall\, a \in A$

(aus $\langle a, a \rangle = 0$ folgt aber nicht notwendigerweise $a = 0$)

Sesquilinearität $\Rightarrow$ Polarisationsgleichung:

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} i^k \langle a + i^k b, a + i^k b \rangle$$

$$\Rightarrow \overline{\langle a, b \rangle} = \frac{1}{4} \sum (-i)^k \underbrace{\langle a + i^k b, a + i^k b \rangle}_{\langle (-i)^k a + b, (-i)^k a + b \rangle}$$

$$= \langle b, a \rangle$$

Außerdem gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (analog zu Skalarprodukt im Hilbertraum):

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle$$

Für τ bedeutet dies:

i) $\tau(a^* b) = \overline{\tau(b^* a)}$

ii) $|\tau(b^* a)|^2 \leq \tau(a^* a) \cdot \tau(b^* b)$

<u>4.6. Satz:</u> Sei A C^*-Algebra und $\tau : A \to \mathbb{C}$ positives lineares Funktional. Dann gilt für alle $a \in A$:

i) $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$

ii) $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\| \, \tau(a^* a)$

$\left(\begin{array}{ll} \|\tau\| = 1: & \tau(a^* a) \geq \tau(a^*)\tau(a) \\ \text{Zustand} & \text{„=" bei Homomorph.} \end{array} \right)$

<u>Beweis:</u> Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ appr. Eins für A. Dann gilt

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \underbrace{\tau(a^* u_\lambda)}_{\overline{\tau(u_\lambda a)}} \qquad (\text{da } \tau \text{ beschränkt} = \text{stetig nach 4.4})$$

$$= \overline{\lim_\lambda \tau(u_\lambda a)}$$

$$= \overline{\tau(a)}$$

und

$$|\tau(a)|^2 = \lim_\lambda \underbrace{|\tau(u_\lambda a)|^2}_{\leq \underbrace{\tau(u_\lambda^2)}_{\leq \|\tau\| \cdot \underbrace{\|u_\lambda^2\|}_{\leq 1}} \tau(a^* a)}$$

$$\leq \|\tau\| \, \tau(a^* a)$$

$\square$

<u>4.7. Satz:</u> Sei τ ein beschränktes lineares Funktional auf einer C^*-Algebra A.

1) Es sind äquivalent:

a) τ ist positiv

b) Für jede appr. Eins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von A gilt: $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$

c) Für eine ——— " ———

2) Besitzt A eine 1, so sind äquivalent:

a) τ ist positiv

b) $\tau(1) = \|\tau\|$

<u>4.8 Beispiel:</u> $A = C(K)$ für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt

Sei $\tau(f) = \int_K f(t)\, h(t)\, dt$

mit Dichte $h : K \to \mathbb{C}$

Es gilt: $\tau(1) = \int h(t)\, dt$

$$\|\tau\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \int f(t)\, h(t)\, dt \right| = \int |h(t)|\, dt$$

also: $\tau(1) = \|\tau\| \iff \int h(t)\, dt = \int |h(t)|\, dt$

$\iff h(t) \geq 0 \quad \forall t \in K$

$\iff \tau$ positiv

<u>Beweis:</u> Wir beweisen nur 2); 1) ist analog, man muß nur 1 durch (u_λ) ersetzen

o.E. sei $\|\tau\| = 1$ (sonst $\tau \rightsquigarrow \tau'$ mit $\tau'(a) = \frac{\tau(a)}{\|\tau\|}$)

a) $\Rightarrow$ b) Sei τ positiv und $\|\tau\| = 1$, z.z.: $\tau(1) = 1$

Klar: $\underbrace{|\tau(1)|}_{\tau(1)} \leq \|\tau\| \cdot \|1\| = 1$ (da $\tau(1) \geq 0$)

Sei nun $a \in A$ mit $\|a\| \leq 1$

$\Rightarrow |\tau(a)|^2 \overset{4.6}{\leq} \tau(a^*a) \leq \tau(1)$ (da $\|a^*a\| \leq 1 \Rightarrow a^*a \leq 1$
$\Rightarrow \tau(a^*a) \leq \tau(1)$)

$$\Rightarrow 1 = \|\tau\|^2 = \sup_{\|a\| \leq 1} |\tau(a)|^2 \leq \tau(1)$$

$$\Rightarrow \tau(1) = 1$$

b) $\Rightarrow$ a) Sei $\tau(1) = \|\tau\| = 1$

Wir zeigen zunächst: $\tau(a) \in \mathbb{R}$ für $a = a^*$

Sei also $a = a^*$ und o.E. $\|a\| \leq 1$; setze

$\tau(a) = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o.E. sei $\beta \leq 0$

Betrachte nun für $n \in \mathbb{N}$

$$|\tau(a - in)|^2 \leq \underbrace{\|\tau\|^2}_{=1} \|\underbrace{(a-in)^*(a-in)}_{a^2+n^2}\|$$

$$\leq \|a^2\| + n^2$$

$$\leq 1 + n^2$$

(vgl. Beweis zu I 12 8. $a = a^* \Rightarrow \tau(a) \in \mathbb{R}$)

andererseits:

$$|\tau(a-in)|^2 = |\alpha + i\beta - in|^2$$

$$= \alpha^2 + (\beta - n)^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta n + n^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta n + \cancel{n^2} \leq 1 + \cancel{n^2}$$

$$\Rightarrow -2\beta n \leq 1 - \beta^2 - \alpha^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \qquad \text{da } -\beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \tau(a) = \alpha \in \mathbb{R}$$

Sei nun $a \geq 0$ (o.E. $\|a\| \leq 1$)

z.z.: $\tau(a) \geq 0$

Es gilt: • $1 - a$ s.a. $\Rightarrow \underbrace{\tau(1-a)}_{= 1 - \tau(a)} \in \mathbb{R}$

• $\|1 - a\| \leq 1$ (da $0 \leq a \leq 1$) $\Rightarrow \underbrace{\tau(1-a)}_{= 1 - \tau(a)} \leq |\tau(1-a)| \leq 1$

$$\Rightarrow \tau(a) \geq 0$$

□

<u>4.8. Folgerung:</u> τ und τ' seien positive lineare Funktionale auf einer C^*-Algebra. Dann gilt:

$\|\tau + \tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|$

<u>Beweis:</u> $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sei appr. Eins

$$\Rightarrow \|\tau + \tau'\| = \lim_\lambda (\tau + \tau')(u_\lambda)$$

$$= \lim_\lambda \tau(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda)$$

$$= \|\tau\| + \|\tau'\|$$

□

<u>4.9. Def.:</u> Ein <u>Zustand</u> auf einer C^*-Algebra A ist ein positives lineares Funktional $\tau: A \to \mathbb{C}$ mit $\|\tau\| = 1$.

$S(A) := \{\tau : A \to \mathbb{C} \mid \tau \text{ Zustand}\}$

<u>4.10. Beispiel:</u> $A = C[0,1]$

τ positiv $\Leftrightarrow$ $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Maß auf $[0,1]$

τ Zustand $\Leftrightarrow$ $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Wahrscheinlichkeitsmaß

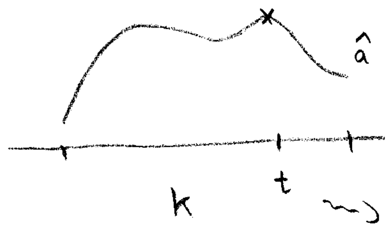
4.11. Satz: Sei A C^*-Algebra, $a \in A$ normal. Dann gibt es einen Zustand τ auf A mit $|\tau(a)| = \|a\|$.

Beweis: o. E. $a \neq 0$

Sei $B := C^*(1, a) \subset \tilde{A}$

$\Rightarrow B \cong C(K)$ K kompakt

$\Rightarrow \exists$ Charakter $\tau_2 : B \to \mathbb{C}$ mit $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\tau_2(a)|$



$\tau_2(f) = f(t)$

$\rightsquigarrow |\hat{a}(t)| = \|\hat{a}\|$

Hahn-Banach $\Rightarrow \exists\, \tau_1 : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ mit

- $\tau_1|B = \tau_2$
- $\|\tau_1\| = \|\tau_2\| = 1$

Da $\tau_1(1) = \tau_2(1) \underset{\uparrow}{=} 1 = \|\tau_1\|$

τ_2 Charakter

oder konkret $1(t) = 1$

$\overset{4.7.}{\Rightarrow}$ τ_1 positiv

Sei τ die Einschränkung von τ_1 auf $A \subset \tilde{A}$

$\Rightarrow \tau$ positives lin. Funktional auf A mit

$|\tau(a)| = |\tau_2(a)| = \|a\|$

noch z.z.: $\|\tau\| = 1$

Es gilt:
- $\|\tau\| \leq \|\tau_1\| = 1$
- $|\tau(a)| = \|a\| \Rightarrow \|\tau\| \geq 1$

$\Big\} \Rightarrow \|\tau\| = 1$

$\Rightarrow \tau$ Zustand $\square$

4.12 Satz: Sei B eine C^*-Unteralgebra von einer C^*-Algebra A, und sei τ ein positives lineares Funktional auf B. Dann gibt es eine Fortsetzung $\tau' : A \to \mathbb{C}$ mit τ' positiv und $\|\tau'\| = \|\tau\|$

Beweis: i) Betrachte zunächst den Fall $A = \tilde{B}$.

Definiere τ' durch

$$\tau'(b+\mu) = \tau(b) + \mu\|\tau\| \qquad (b \in B,\ \mu \in \mathbb{C})$$

Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ appr. Eins für B

$$\Rightarrow \|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$$

Sei nun $b \in B$, $\mu \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow |\tau'(b+\mu)| = |\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)|$$

$$= |\lim_\lambda \underbrace{\tau((b+\mu)u_\lambda)}_{|\cdot| \le \|\tau\|\cdot \underbrace{\|(b+\mu)u_\lambda\|}_{\le \|b+\mu\|}}|$$

$$\le \|\tau\|\ \|b+\mu\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|\tau'\| \le \|\tau\| \\ \|\tau\| \le \|\tau'\| \text{ klar da } \tau = \tau'|_B \end{array}\right\} \Rightarrow \|\tau\| = \|\tau'\|$$

also: $\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1)$ (nach Konstr.)

$\overset{4.7}{\Longrightarrow}$ τ' positiv

ii) Betrachte nun allgemeinen Fall $B \subset A$

Aus i) folgt: können τ von B nach $\tilde{B}$ fortsetzen,

d.h. o.E. A, B mit 1 und $1_A = 1_B$

(sonst betrachte $\tilde{B} \subset \tilde{A}$)

Hahn-Banach $\Rightarrow \exists\, \tau' : A \to \mathbb{C}$ mit $\tau = \tau'|_B$

und $\|\tau'\| = \|\tau\|$

$\Rightarrow \tau'(1) = \tau(1) = \|\tau\| = \|\tau'\|$

$\overset{4.7.}{\Longrightarrow}$ τ' positiv

$\square$

<u>4.13. Satz</u>: Sei τ ein positives lineares Funktional auf einer C^*-Algebra A

1) Sei $a \in A$. Dann gilt

$$\tau(a^*a) = 0 \iff \tau(ba) = 0 \quad \forall\, b \in A$$

2) Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $|\tau(b^*cb)| \leq \|c\|\, \tau(b^*b)$,

insbesondere also

$$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\, \tau(b^*b)$$

<u>Beweis</u>: 1) Cauchy-Schwarz (4.5.) $\Rightarrow |\tau(b^*a)|^2 \leq \tau(a^*a)\,\tau(b^*b)$

also: $\tau(a^*a) = 0 \Rightarrow \tau(b^*a) = 0 \quad \forall\, b^* \in A$

2) o.E. sei A mit Eins (sonst gehe über zu $\tilde{A}$ nach 4.12)

Falls $\tau(b^*b) = 0 \overset{1)}{\Longrightarrow} \tau((b^*c)b) = 0$

also o.E. sei $\tau(b^*b) > 0$

Betrachte nun

$$\rho : A \to \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \rho(c) := \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}$$

$\Rightarrow$ ϱ ist linear und positiv $(c \geq 0 \Rightarrow b^*cb \geq 0 \Rightarrow \tau(b^*cb) \geq 0)$

$$\Rightarrow \|\varrho\| = \varrho(1) = \frac{\tau(b^*b)}{\tau(b^*b)} = 1$$ 4-11

$$\Rightarrow |\varrho(c)| \leq \|c\|$$

$$|\varrho(c)| = \frac{|\tau(b^*cb)|}{\tau(b^*b)}$$

$$\Rightarrow |\tau(b^*cb)| \leq \|c\| \, \tau(b^*b)$$ □

4.14 Bem: ~~Allgemeiner folgt also/ ein 2)~~:

~~$|\tau(b^*cb)| \leq \|c\| \, \tau(b^*b)$~~

4.14. Nachtrag zu 4.5: Beweis von Cauchy-Schwarz:

$$|\tau(b^*a)|^2 \leq \tau(a^*a)\,\tau(b^*b)$$

Beweis: $0 \leq \tau((a-\alpha b)^*(a-\alpha b)) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$= \tau(a^*a) - \bar{\alpha}\,\tau(b^*a) - \alpha\,\tau(a^*b) + |\alpha|^2\,\tau(b^*b)$$

im Skalarproduktfall: Setze $\alpha = -\dfrac{\tau(b^*a)}{\tau(b^*b)}$ falls $\tau(b^*b) \neq 0$

nun allgemeiner: Sei $\tau(a^*b) = r e^{i\Theta}$ mit $r \geq 0$

setze $\alpha := e^{-i\Theta} t \qquad (t \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow 0 \leq \tau(a^*a) - e^{i\Theta} t\, r e^{-i\Theta} - e^{-i\Theta} t\, r e^{i\Theta} + t^2\,\tau(b^*b)$$

$$= \tau(a^*a) - 2tr + t^2\,\tau(b^*b) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\xRightarrow{\text{Diskriminante}} 0 \geq 4r^2 - 4\tau(a^*a)\,\tau(b^*b) = 4(|\tau(a^*b)|^2 - \tau(a^*a)\,\tau(b^*b))$$ □