5. Die GNS-Darstellung

5.1. Def.: 1) Eine Darstellung einer C^*-Algebra A ist ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und

$\pi : A \to B(\mathcal{H})$

ein $*$-Homomorphismus ist

2) Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt treu, falls π injektiv (also isometrisch) ist

3) Seien $(\mathcal{H}_\lambda, \pi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Darstellungen von A, so ist ihre direkte Summe $(\mathcal{H}, \pi)$ definiert durch:

$\mathcal{H} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{H}_\lambda$ (d.h. $\underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{\eta}} = (\eta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $\eta_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$

$$\langle \eta^{(1)}, \eta^{(2)} \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle \eta^{(1)}_\lambda, \eta^{(2)}_\lambda \rangle \;)$$

$\pi(a)(\eta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (\pi(a)\eta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Notation: $\pi = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda$

5.2. Bem Sei $K \subset \mathcal{H}$ Unter-Hilbertraum mit $\pi(A) K \subset K$.

Dann folgt: $\pi(A) K^\perp \subset K^\perp$

$\Rightarrow \pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ mit $\pi_1 := \pi/_K$, $\pi_2 := \pi/_{K^\perp}$

($\pi(A) \subset k \Rightarrow \pi(A) k^\perp \subset k^\perp$, da $\pi(A)$ $*$-abg.:

Sei $\eta \in k^\perp$ und $\xi \in k$

$$\Rightarrow \langle \pi(a)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \underbrace{\pi(a^*)\xi}_{\in k} \rangle = 0 \quad \forall \xi \in k$$

$\Rightarrow \pi(a)\eta \in k^\perp$)

<u>5.3. Def.</u>: 1) Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt <u>nicht entartet</u> (non-degenerate), falls

$$\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$$

2) Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ heißt <u>zyklisch</u>, falls es einen zyklischen Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ gibt, d.h.

$\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. Notation: $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$

3) Zwei Darstellungen $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$, $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ heißen <u>äquivalent</u> $((\mathcal{H}_1, \pi_1) \sim (\mathcal{H}_2, \pi_2))$, falls es ein unitäres $U: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ gibt mit

$$\pi_1(a) = U^* \pi_2(a) U \qquad \forall a \in A$$

<u>5.4. Bem.</u>: 1) Beachte: Falls A mit 1 und π unital, so ist π nicht entartet. Unitalität von π ist allerdings nicht in Definition von Darstellung gefordert.

2) Umgekehrt: A mit 1, π nicht entartet $\Rightarrow \pi(1) = 1$ ($\hat{=}$ id)

denn: $p := \pi(1) \Rightarrow p = p^2 = p^*$ orthog. Projektion

$$\overline{\pi(A)\xi} \subset \overline{\pi(1)\pi(A)\xi} = p\mathcal{H} \overset{!}{=} \mathcal{H} \Rightarrow p = 1$$

3) allgemeiner: Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine nicht entartete Darstellung von A und sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine approximierende Eins von A, dann gilt

$\pi(u_\lambda) \longrightarrow 1 = id_H$ in starker Operatortopologie,

d.h.

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(u_\lambda)\eta - \eta\| = 0 \qquad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

denn: Beh. gilt für $\eta \in \pi(A)\mathcal{H}$ nach Def. von appr. Eins $\left(\eta = \pi(a)\xi \Rightarrow \pi(u_\lambda)\eta = \pi(\underbrace{u_\lambda a}_{\to a})\xi \to \eta\right)$

Somit gilt Beh. auch für $\eta \in \overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

5.5. Satz: 1) Jede Darstellung einer C^*-Algebra ist ~~äquivalent zu~~ direkte Summe von nicht entarteter Darstellung und 0-Darstellung.

2) Jede nicht entartete Darstellung ist ~~äquivalent~~ ~~zu~~ direkte Summe von zyklischen Darstellungen.

Beweis: 1) Sei $K := \overline{\pi(A)\mathcal{H}}$

$\Rightarrow \overline{\pi(A)K} = K$ (benutze appr. Eins)

$\pi(A)|K^\perp \equiv 0$ (sei $\eta \in K^\perp$

$\Rightarrow \langle \pi(a)\eta, \xi\rangle = \langle \eta, \underbrace{\pi(a^*)\xi}_{\in K}\rangle = 0$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \pi(a)\eta = 0$)

2) Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ nicht entartete Darstellung von A.

Setze $\mathcal{H}_\xi := \overline{\pi(A)\xi}$ für $\xi \in \mathcal{H}$.

beachte: $\xi \in \mathcal{H}_\xi$ da π nicht entartet ($\rightsquigarrow$ 5.4.) $\Rightarrow \mathcal{H}_\xi \neq \{0\}$ für $\xi \neq 0$

$\overset{\text{Zornsches Lemma}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ maximale Menge $\Lambda \subset \mathcal{H}$ mit:
- $\mathcal{H}_\xi \perp \mathcal{H}_\eta$ für $\xi \neq \eta$, $\xi, \eta \in \Lambda$
- $\xi \neq 0$ für $\xi \in \Lambda$

Beh.: $\mathcal{H} = \bigoplus_{\xi \in \Lambda} \mathcal{H}_\xi$

denn: Sei $\eta \in \left(\bigoplus_{\xi \in \Lambda} \mathcal{H}_\xi\right)^\perp$

Für $\xi \in \Lambda$ gilt dann: $\eta \perp \mathcal{H}_\xi$, d.h.

$0 = \langle \eta, \pi(a^*b)\xi\rangle = \langle \pi(a)\eta, \pi(b)\xi\rangle \quad \forall a, b \in A$

$\Rightarrow \mathcal{H}_\eta \perp \mathcal{H}_\xi \quad \forall \xi \in \Lambda$

Maximalität von $\Lambda \Rightarrow \eta = 0$

d.h. $\mathcal{H} = \bigoplus_{\xi \in \Lambda} \mathcal{H}_\xi$

Setze $\pi_\xi := \pi | \mathcal{H}_\xi$ $\quad$ ($\pi(A)\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{H}_\xi$ klar)

$\Rightarrow \pi = \bigoplus \pi_\xi$

und $(\mathcal{H}_\xi, \pi_\xi)$ ist zyklisch (mit zyklischem Vektor ξ). □

5.6 Bem.: Sei $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ zyklische Darstellung.
Dann definiert $\tau : A \to \mathbb{C}$ mit

$\tau(a) := \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \quad \forall a \in A$

ein kanonisches zugehöriges positives lineares Funktional:

$\tau(a^*a) = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \tau$ positiv.

5.7. Satz: Seien $(\mathcal{H}_1, \pi_1, \xi_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \pi_2, \xi_2)$ zwei zyklische Darstellungen von A mit zugehörigen positiven Funktionalen

$\tau_1(a) := \langle \pi_1(a)\xi_1, \xi_1 \rangle$

$\tau_2(a) := \langle \pi_2(a)\xi_2, \xi_2 \rangle$

Dann sind äquivalent:

a) Es gibt $u : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitär mit

$\pi_2(a) = u\,\pi_1(a)\,u^* \quad \forall a \in A$

und

$u\xi_1 = \xi_2$

b) $\tau_1 = \tau_2$

<u>Beweis</u>: a) $\Rightarrow$ b) Sei $\Pi_2(a) = u\, \Pi_1(a)\, u^*$, $u\,\xi_1 = \xi_2$

für $u: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitär

$$\Rightarrow \tau_2(a) = \langle \Pi_2(a)\,\xi_2, \xi_2 \rangle$$

$$= \langle \Pi_1(a)\, \underbrace{u^*\xi_2}_{\xi_1}, \underbrace{u^*\xi_2}_{\xi_1} \rangle$$

$$= \tau_1(a)$$

b) $\Rightarrow$ a) Definiere lineare Abb.

$$V: \Pi_1(A)\,\xi_1 \to \Pi_2(A)\,\xi_2$$

$$\Pi_1(a)\,\xi_1 \mapsto \Pi_2(a)\,\xi_2$$

Dies ist wohldefiniert und isometrisch wegen

$$\| \Pi_2(a)\,\xi_2 \|^2 = \langle \Pi_2(a)\,\xi_2, \Pi_2(a)\,\xi_2 \rangle$$

$$= \tau_2(a^*a)$$

$$= \tau_1(a^*a)$$

$$= \langle \Pi_1(a)\,\xi_1, \Pi_1(a)\,\xi_1 \rangle$$

$$= \| \Pi_1(a)\,\xi_1 \|^2$$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige isometrische Ausdehnung $u: \underbrace{\overline{\Pi_1(A)\xi_1}}_{= \mathcal{H}_1} \to \underbrace{\overline{\Pi_2(A)\xi_2}}_{= \mathcal{H}_2}$

u bijektiv $\Rightarrow$ u unitär

Es gilt: $u\,\xi_1 = \xi_2$

denn: $\Pi_1(u_\lambda) \to id_{H_1}$, $\Pi_2(u_\lambda) \to id_{H_2}$ für (u_λ) approx. Eins

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \Pi_1(u_\lambda)\,\xi_1 & \overset{u}{\longmapsto} & \Pi_2(u_\lambda)\,\xi_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi_1 & \longmapsto & \xi_2 \end{array}$$

(da zykl. Darst. nicht entartet)

$\square$

~~Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ appr. Eins von~~ A.

(*) Somit haben wir eine eindeutige Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zyklische Darstellungen} \\ (\mathcal{H}, \pi, \xi) \text{ mit } \|\xi\| = 1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{ \text{Zustände} \}$$

<u>5.8 Satz (GNS-Darstellung)</u>: Sei τ ein positives lineares Funktional auf A. Dann existiert eine (bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte) zyklische Darstellung $(\mathcal{H}_\tau, \Pi_\tau, \xi_\tau)$ mit

$$\tau(a) = \langle \Pi_\tau(a)\xi_\tau, \xi_\tau \rangle \qquad \forall a \in A$$

<u>5.9. Bem</u>: τ Zustand entspricht $\|\xi_\tau\| = 1$. ⊛

<u>Beweis</u>: Definiere

$\langle a,b\rangle_\tau := \tau(b^*a)$ positive Sesquilinearform auf A und

$N_\tau := \{ a \in A \mid \langle a,a\rangle_\tau = \tau(a^*a) = 0 \}$

Sei $a \in N_\tau$, $b \in A$

$\overset{4.13}{\Longrightarrow} \tau(a^*b^*ba) \leq \|b^*b\|\,\tau(a^*a) = 0 \quad \Rightarrow ba \in N_\tau$

$\Rightarrow N_\tau$ ist Linksideal in A

τ beschränkt $\Rightarrow N_\tau$ abgeschlossen

Betrachte

$\mathcal{K}_\tau := A/N_\tau = \{ a + N_\tau \mid a \in A \}$ $\quad (a+N_\tau = b+N_\tau :\Leftrightarrow a-b \in N_\tau)$

mit positiv definiter Sesquilinearform

$\langle a+N_\tau, b+N_\tau\rangle_\tau := \langle a,b\rangle_\tau = \tau(b^*a)$

Definiere $\quad$ (beachte: $\tau(b^*a) = 0$ falls $a \in N_\tau$ oder $b \in N_\tau$)

$\mathcal{H}_\tau := \overline{\mathcal{K}_\tau}^{\langle,\rangle_\tau}$ Hilbertraum

Definiere Darstellung Π_τ auf ~~$\mathcal{H}_\tau$~~ $\mathcal{K}_\tau$ durch

$$\Pi_\tau(a) : \mathcal{K}_\tau \to \mathcal{K}_\tau$$

$$b + N_\tau \mapsto ab + N_\tau$$

Beachte: $b_1 - b_2 \in N_\tau \Rightarrow a(b_1 - b_2) \in N_\tau \Rightarrow \Pi_\tau(a)$ wohldefiniert

$$\begin{aligned}
\|ab + N_\tau\|^2 &= \langle ab + N_\tau, ab + N_\tau \rangle \\
&= \tau(b^* a^* a b) \\
&\leq \|a^* a\| \, \tau(b^* b) \qquad (*) \\
&= \|a\|^2 \, \|b + N_\tau\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\Pi_\tau(a)\| \leq \|a\|$

Setze $\Pi_\tau(a)$ von $\mathcal{K}_\tau$ auf $\mathcal{H}_\tau$ fort:

$$\xi \in \mathcal{H}_\tau \Rightarrow \exists (b_n) \subset A : b_n + N_\tau \to \xi$$

$\Pi_\tau(a)\xi := \lim(ab_n + N_\tau)$ existiert (nach $(*)$)

Somit $\Pi_\tau(a) : \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_\tau$ für jedes $a \in A$ definiert, mit $\Pi_\tau(a) \in B(\mathcal{H}_\tau)$

Die Abb.

$$\Pi_\tau : A \to B(\mathcal{H}_\tau)$$

$$a \mapsto \Pi_\tau(a)$$

ist ein $*$-Homomorphismus, da dies auf $\mathcal{K}_\tau$ klar:

- $\Pi_\tau(a_1)\Pi_\tau(a_2)(b + N_\tau) = a_1 a_2 b + N_\tau = \Pi_\tau(a_1 a_2)(b + N_\tau)$
- $\langle \Pi_\tau(a)^*(b + N_\tau), c + N_\tau \rangle = \langle b + N_\tau, \underbrace{\Pi_\tau(a)(c + N_\tau)}_{ac + N_\tau} \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \tau(c^* a^* b) \\
&= \langle \underbrace{a^* b + N_\tau}_{\Pi_\tau(a^*)(b + N_\tau)}, c + N_\tau \rangle \qquad \Rightarrow \Pi_\tau(a)^* = \Pi_\tau(a^*)
\end{aligned}$$

Was ist ξ_τ?

o.E. sei A mit 1 (sonst betrachte $\tilde{A}$ und $\tilde{\tau}: \tilde{A} \to \mathbb{C}$ gemäß 4.12)

Dann setze

$\xi_\tau := 1 + N_\tau \in \mathcal{K}_\tau \subset \mathcal{H}_\tau$

$\Rightarrow \overline{\pi_\tau(A)\xi_\tau} = \overline{\mathcal{K}_\tau} = \mathcal{H}_\tau$

d.h. ξ_τ zyklischer Vektor und nach Konstruktion gilt:

$$\langle \pi_\tau(a)\xi_\tau, \xi_\tau \rangle = \langle a + N_\tau, 1 + N_\tau \rangle$$
$$= \tau(1^* a)$$
$$= \tau(a) \qquad \square$$

<u>5.10. Satz (Gelfand-Naimark)</u>: Jede C^*-Algebra A besitzt eine treue Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$, d.h. A ist isomorph zu Unter C^*-Algebra von $B(\mathcal{H})$.

<u>Beweis</u>: Sei $(\mathcal{H}, \pi) := \bigoplus_{\tau \in S(A)} (\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau, \xi_\tau)$ (<u>universelle Darstellung</u>)

z.z.: π ist treu

Sei $a \in A$ mit $a \neq 0$

a^*a normal $\overset{4.11}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Zustand $\tau \in S(A)$ mit $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$

$\Rightarrow \|\pi_\tau(a)\xi_\tau\|^2 = \langle \pi_\tau(a^*a)\xi_\tau, \xi_\tau \rangle = \tau(a^*a) = \|a^*a\| \neq 0$

$\Rightarrow \pi_\tau(a) \neq 0$

$\Rightarrow \pi(a) \neq 0$

$\Rightarrow \pi$ ist injektiv, d.h. treu

$\Rightarrow \pi$ ist isometrisch

5.11. Notation: Sei A eine C^*-Algebra. Dann bezeichnet

$$M_n(A) := \{ (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} \in A \}$$

die $n \times n$-Matrizen mit Eingängen aus A.

Versehen mit den üblichen algebraischen Operationen

$$\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$

$$(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) := (c_{ij}) \qquad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

und

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

wird $M_n(A)$ zur $*$-Algebra.

5.12. Folgerung: Sei A eine C^*-Algebra. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ auf $M_n(A)$ eine (eindeutig bestimmte) Norm, so daß $M_n(A)$ zur C^*-Algebra wird.

Beweis: Sei $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ treue Darstellung

$$\Rightarrow \hat{\pi} : M_n(A) \to M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\underbrace{\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}}_{n\text{-mal}})$$

$$(a_{ij}) \mapsto (\pi(a_{ij}))$$

ist $*$-Homomorphismus und injektiv.

Setze nun $\|(a_{ij})\| := \|\hat{\pi}(a_{ij})\|_{B(\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H})}$

Es gilt $\hat{\pi}(M_n(A)) \subset B(\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \mathcal{H})$ abgeschlossen
(Konvergenz von Matrizen $\Leftrightarrow$ Konvergenz aller Eingänge)

$\Rightarrow M_n(A)$ ist C^*-Algebra bzgl. $\|\ \|$ $\square$

5.13 Folgerung: Sei A C^*-Algebra und $a \in A$ selbstadjungiert. Dann sind äquivalent:

a) $a \geq 0$

b) $\tau(a) \geq 0 \quad \forall$ Zustände $\tau \in S(A)$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) klar nach Def.

b) $\Rightarrow$ a) Sei $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ treue Darstellung

z.z.: $\pi(a) \geq 0$, d.h. $\langle \pi(a)\eta, \eta \rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$

(vgl. 2.2.)

Sei $\eta \in \mathcal{H}$, o.E. $\|\eta\| = 1$. Dann ist

$$\tau : A \to \mathbb{C}$$
$$b \mapsto \langle \pi(b)\eta, \eta \rangle$$

positives lineares Funktional

Zustand

$$\Rightarrow \underbrace{\tau(a)}_{=\langle \pi(a)\eta, \eta\rangle} \geq 0$$

$\Rightarrow \pi(a) \geq 0$ (in $B(\mathcal{H})$)

$\Rightarrow a \geq 0$ (in A)

anderer Beweis: Betrachte $a \in C^*(a) \subset A$

$\Rightarrow$ reicht Beh. für kommutative C^*-Algebren zu zeigen (o.E. mit 1), d.h. $A \cong C(K)$

$\Rightarrow S(A) \mathrel{\hat{=}} \{\mu \mid \mu$ Wkeitsmaß auf $K\}$.

Beh. ist äquivalent zu:

$$f \geq 0 \iff \int f(t)\, d\mu(t) \geq 0 \quad \forall \text{ Wkeitsmaße } \mu$$

$\square$