6. Irreduzible Darstellungen

$\pi : A \to B(\mathcal{H})$ Darstellung von A

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ mit $\pi(A)\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$
$\pi(A)\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$

d.h. $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$

Was sind die kleinsten Bestandteile bzgl. dieser Zerlegung.

Falls π zyklisch, so kann es trotzdem eventuell weiter-zerlegt werden

Beispiel: $A = \{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \} \subset M_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zyklischer Vektor

aber π invariant auf $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.h. $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

<u>6.1. Definition</u>: Eine Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ von A heißt <u>irreduzibel</u>, falls $\{0\}$ und $\mathcal{H}$ die einzigen abgeschlossenen Unterräume von $\mathcal{H}$ sind, welche invariant unter $\pi(A)$ sind, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{K} \subset \mathcal{H} \text{ Unterhilbertraum} \\ \pi(A)\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{K} = \{0\} \text{ oder } \mathcal{K} = \mathcal{H}$$

<u>6.2. Bem.</u>: Ist $\dim \mathcal{H} = 1$, so ist jede Darstellung $\pi : A \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C}}}{B(\mathcal{H})}$ irreduzibel, auch $\pi \equiv 0$.

<u>6.3. Satz:</u> Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine Darstellung von A mit $\pi \neq 0$.

Dann sind äquivalent:

a) π ist irreduzibel

b) $\pi(A)' := \{ x \in B(\mathcal{H}) \mid \pi(a)x = x\pi(a) \quad \forall a \in A \} = \mathbb{C} \cdot 1$

c) Jeder Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\xi \neq 0$ ist zyklisch für π.

<u>Beweis:</u> a) $\Rightarrow$ b) Sei π irreduzibel und sei $x \in \pi(A)'$

mit $x \notin \mathbb{C} \cdot 1$

beachte: $x \in \pi(A)' \Rightarrow x^* \in \pi(A)'$

$(ax = xa \Rightarrow x^* a^* = a^* x^* \quad \forall a^* \in A)$

$\Rightarrow \frac{x + x^*}{2} \notin \mathbb{C}1$ oder $\frac{x - x^*}{2i} \notin \mathbb{C}.1$

also o.E. $x = x^*$ s.a.

meßbarer Funktionalkalkül $\Rightarrow h(x) \in \pi(A)'$ für alle meßbaren Fkten auf $\sigma(x)$

insbesondere also für Spektralprojektionen

$\Rightarrow \exists$ Projektion $p \in \pi(A)'$ ~~$B(\mathcal{H})$~~ mit $p \neq 0$ und $p \neq 1$

Setze $\mathcal{K} := p\mathcal{H}$

$\Rightarrow \pi(A)\mathcal{K} = \underbrace{\pi(A)p}_{p\,\pi(A)} \mathcal{H} \subset p\mathcal{H} = \mathcal{K}$

$\Rightarrow \mathcal{K}$ invariant unter $\pi(A)$

$\Rightarrow \mathcal{K} = \{0\}$ oder $\mathcal{K} = \mathcal{H}$

Wdsp zu $p \neq 0,1$

$\Rightarrow \pi(A)' = \mathbb{C} \cdot 1$

b) $\Rightarrow$ c) Sei $\pi(A)' = \mathbb{C} \cdot 1$

Sei $\xi \neq 0$; setze

$\mathcal{K} := \overline{\pi(A)\xi}$

und p orthogonale Projektion auf $\mathcal{K}$.

Es gilt: $p \in \pi(A)'$, denn:

$\pi(A)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ $\Rightarrow$ $pap\eta = ap\eta \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$

$\Downarrow$

$\Rightarrow pa(p\eta + (1-p)\eta) = ap(p\eta + (1-p)\eta)$

$pap = ap$

und

$\Rightarrow pa\eta = ap\eta \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$

$pa(1-p) = 0$

da $\pi(A)\mathcal{K}^\perp \subset \mathcal{K}^\perp$ d.h. $pa = ap \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow \underbrace{pap + pa(1-p)}_{pa} = ap \quad \forall a \in A$ d.h. $p \in \pi(A)'$

Somit $p = 0$ oder $p = 1$, d.h. $\mathcal{K} = \{0\}$ oder $\mathcal{K} = \mathcal{H}$

Da $\pi \neq 0 \Rightarrow \exists\, \eta \in \mathcal{H},\ a \in A : \pi(a)\eta \neq 0$

Somit gilt für spezielles $\xi = \eta$, daß $\mathcal{K}_\eta \neq \{0\}$,

also $\overline{\pi(A)\eta} = \mathcal{K}_\eta = \mathcal{H}$

$\Rightarrow \overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, d.h. π ist nicht entartet

Daraus folgt dann aber für beliebiges $\xi \neq 0$, daß

$\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$ (vgl. 5.4 (3))

d.h. jedes $\xi \neq 0$ ist zyklisch

c) $\Rightarrow$ a) Sei $\{0\} \neq \mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ invariant und $0 \neq \xi \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow \underset{\mathcal{H}}{\underset{\|}{\overline{\pi(A)\xi}}} \subset \mathcal{K}$ (da ξ zyklisch)

$\Rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{H}$, d.h. π irreduzibel $\square$

6.4 Bem.: 1) Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ Darstellung mit $\dim \mathcal{H} < \infty$

$\Rightarrow \quad \pi = \bigoplus \pi_i \quad$ mit π_i irreduzibel

(Dimensionsargument)

Falls $\dim \mathcal{H} = \infty$, so ist nicht klar, ob man π immer auf irreduzible Darstellungen zurückführen kann, z.B. als ?

$$\pi = \int_{\oplus} \pi_i$$

2) Sei $\underbrace{(\mathcal{H}, \pi)}$ Darstellung einer kommutativen C^*-Algebra A.
irreduzible

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ komm.}}}{\pi(A) \subset} \pi(A)' \underset{\substack{\uparrow \\ 6.3.}}{=} \mathbb{C} \cdot 1$$

also: $\pi(A) \subset \mathbb{C} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \pi(A)' = B(\mathcal{H})$

$$\pi(A)' = \mathbb{C} \cdot 1$$

also: $B(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}$

Somit: $\pi : A \to \mathbb{C}$ $\quad$ $*$-Homomorphismus

d.h. Charakter

also: $\left.\begin{array}{l} (\mathcal{H}, \pi) \text{ irreduzibel} \\ A \text{ kommutativ} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dim \mathcal{H} = 1 \\ \pi \text{ Charakter} \end{array}$

6.5 Def.: 1) Seien ρ, τ positive lineare Funktionale auf einer C^*-Algebra A. τ majorisiert ρ $(\rho \leq \tau)$, falls $\tau - \rho$ positiv ist

2) Sei τ ein Zustand auf A. τ heißt rein (pure), falls gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho \text{ positives lin. Fkt} \\ \varrho \leq \tau \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, 0 \leq \lambda \leq 1 : \varrho = \lambda \tau$$

6.6. Beispiel: Sei $A = C(K)$ kommutativ und

$$\varrho(f) = \int_K f(t)\, h_\varrho(t)\, dt \qquad (h_\varrho, h_\tau \geq 0)$$

$$\tau(f) = \int_K f(t)\, h_\tau(t)\, dt$$

Dann ist

$$\varrho \leq \tau \iff h_\varrho \leq h_\tau \quad (\text{d.h. } h_\varrho(t) \leq h_\tau(t) \;\; \forall t \in K)$$

Sei

$$\tau(f) = \int_K f(t)\, d\mu(t) \qquad (\mu \text{ W-keitsmaß auf } K)$$

Zustand auf $C(K)$.

Falls $K = K_1 \cup K_2$ mit $\mu(K_1), \mu(K_2) > 0$

$$\Rightarrow \varrho(f) = \frac{1}{2} \int_{K_1} f(t)\, d\mu(t) + \frac{1}{3} \int_{K_2} f(t)\, d\mu(t) \leq \tau$$

aber $\varrho \neq \lambda \tau \quad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$

Somit: τ rein $\iff \tau(f) = f(t)$ für ein $t \in K$

$\iff \tau$ Charakter

Somit gilt für kommutative C^*-Algebren:

$\tau : A \to B(\mathbb{C})$ $\leftrightarrow$ τ Charakter $\leftrightarrow$ $\tau : A \to \mathbb{C}$ reiner Zustand

irreduzible Darst.

6.7. Satz: Sei τ ein Zustand auf einer C^*-Algebra A und $(\mathcal{H}, \Pi, \xi)$ die zugehörige zyklische GNS-Darstellung.

1) Sei $T \in \Pi(A)' \subset B(\mathcal{H})$ mit $0 \leq T \leq 1$ und

$$\varsigma(a) := \langle \Pi(a) T \xi, \xi \rangle .$$

Dann ist ς positives lineares Funktional auf A mit $\varsigma \leq \tau$.

2) Sei ς positives lineares Funktional auf A mit $\varsigma \leq \tau$.

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $T \in \Pi(A)'$ mit

$$\varsigma(a) = \langle \Pi(a) T \xi, \xi \rangle \quad \left(= \langle \Pi(a) T^{1/2} \xi, T^{1/2} \xi \rangle \right)$$

und es gilt: $0 \leq T \leq 1$.

Beweis: 1) $\varsigma(a) = \langle \Pi(a) T^{1/2} \xi, T^{1/2} \xi \rangle$ positiv

$$\tau(a) - \varsigma(a) = \langle \Pi(a)(1-T)\xi, \xi \rangle$$
$$= \langle \Pi(a)(1-T)^{1/2} \xi, (1-T)^{1/2} \xi \rangle \quad \text{positiv}$$

$\Rightarrow \varsigma \leq \tau$

2) Definiere Sesquilinearform $\langle\, , \rangle_\varsigma$ auf $\mathcal{H}$ durch

$$\langle \Pi(a)\xi, \Pi(b)\xi \rangle_\varsigma := \varsigma(b^* a)$$

Beachte:

$$|\varsigma(b^* a)|^2 \overset{4.5.}{\leq} \varsigma(a^* a)\, \varsigma(b^* b)$$
$$\leq \tau(a^* a)\, \tau(b^* b)$$
$$= \|\Pi(a)\xi\|^2 \, \|\Pi(b)\xi\|^2$$

$\Pi(a_1)\xi = \Pi(a_2)\xi$, $\Pi(b_1)\xi = \Pi(b_2)\xi$

$\Rightarrow \langle \Pi(a_1)\xi, \Pi(b_1)\xi \rangle_\varsigma =$

$= \langle \Pi(a_2)\xi, \Pi(b_1)\xi \rangle_\varsigma$

$= \langle \Pi(a_2)\xi, \Pi(b_2)\xi \rangle_\varsigma$

da $\underbrace{\langle (\Pi(a_1) - \Pi(a_2))\xi, \ldots \rangle_\varsigma}_{|\ldots| \leq \|\Pi(a_1)\xi - \Pi(a_2)\xi\| = 0} = 0$

$\Rightarrow \langle\, , \rangle_\varsigma$ wohldefiniert und stetig auf $\Pi(A)\xi$, also auch auf $\overline{\Pi(A)\xi} = \mathcal{H}$

also: $\langle\ ,\ \rangle_\varsigma : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform

$$(\eta_1,\eta_2) \mapsto \langle \eta_1,\eta_2\rangle_\varsigma$$

mit $|\langle\eta_1,\eta_2\rangle_\varsigma| \leq \|\eta_1\|\,\|\eta_2\|$

η_2 fest $\Rightarrow L_{\eta_2}: \eta_1 \mapsto \langle\eta_1,\eta_2\rangle_\varsigma$ beschr. lineares Funktional

$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \exists\, \zeta \in \mathcal{H} : \langle\eta_1,\eta_2\rangle_\varsigma = \langle \eta_1, \zeta\rangle$ und $\|\zeta\| = \|L_{\eta_2}\| \leq \|\eta_2\|$

Definiere $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $T\eta_2 := \zeta$

$\Rightarrow T$ linear, beschränkt mit $\|T\| \leq 1$

also: $\langle \pi(a)\xi, T\pi(b)\xi\rangle = \langle\pi(a)\xi,\pi(b)\xi\rangle_\varsigma = \varsigma(b^*a)$

$a=b \Rightarrow \langle\pi(a)\xi, T\pi(a)\xi\rangle = \varsigma(a^*a) \geq 0$

$\Rightarrow T \geq 0$

Da

$\langle\pi(a)\xi, T\pi(a)\xi\rangle = \varsigma(a^*a) \leq \tau(a^*a) = \langle\pi(a)\xi,\pi(a)\xi\rangle$

$\Rightarrow T \leq 1$

noch z.z.: $T \in \pi(A)'$, d.h. $T\pi(a) = \pi(a)T \quad \forall a\in A$

d.h. $T\pi(a)\pi(b)\xi = \pi(a)T\pi(b)\xi \quad \forall a,b \in A$

$\langle T\pi(a)\pi(b)\xi, \pi(c)\xi\rangle = \varsigma(c^*(ab))$

$$\begin{aligned}\langle\pi(a)T\pi(b)\xi,\pi(c)\xi\rangle &= \langle T\pi(b)\xi, \pi(a^*)\pi(c)\xi\rangle \\ &= \varsigma((a^*c)^*b) \\ &= \varsigma(c^*ab)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T \in \pi(A)'$

Eindeutigkeit von T klar, da ($T_1, T_2 \in \pi(A)'$)

$$< T_1 \pi(a)\xi, \pi(b)\xi > = \varsigma(b^* a) = < T_2 \pi(a)\xi, \pi(b)\xi >$$

$\forall a, b \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow T_1 = T_2$ $\square$

<u>6.8 Satz:</u> Sei τ ein Zustand auf C^*-Algebra A und sei $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau, \xi_\tau)$ zugehörige GNS-Darstellung. Dann gilt:

τ rein $\Leftrightarrow$ π_τ irreduzibel

<u>Beweis:</u> "$\Leftarrow$": Sei π_τ irreduzibel und sei ς positives lineares Funktional mit $\varsigma \leq \tau$

$\overset{6.7}{\Rightarrow} \exists\, T \in \pi_\tau(A)'$, $0 \leq T \leq 1$ mit

$$\varsigma(a) = < \pi_\tau(a) T \xi_\tau, \xi_\tau >$$

π_τ irreduzibel $\overset{6.3}{\Rightarrow} \pi_\tau(A)' = \mathbb{C} \cdot 1$, d.h. $T = \lambda \cdot 1$ für $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\Rightarrow \varsigma(a) = \lambda < \pi_\tau(a)\xi_\tau, \xi_\tau > = \lambda\, \tau(a)$$

d.h. $\varsigma = \lambda\tau$

"$\Rightarrow$": Sei τ rein, z.z.: π_τ irreduzibel

d.h. $\pi_\tau(A)' = \mathbb{C} \cdot 1$

Sei $T \in \pi_\tau(A)'$ mit $0 \leq T \leq 1$

Setze

$$\varsigma(a) := < \pi_\tau(a) T \xi_\tau, \xi_\tau >$$

$\Rightarrow \varsigma \leq \tau$

$\overset{\tau \text{ rein}}{\Longrightarrow}$ $\varsigma = \lambda\tau$ für ein $\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad \langle T\,\Pi_\tau(a)\,\xi_\tau , \Pi_\tau(b)\,\xi_\tau\rangle = \varrho(b^*a)$$

$$= \lambda\,\tau(b^*a)$$

$$= \langle \lambda\,\Pi_\tau(a)\,\xi_\tau , \Pi_\tau(b)\,\xi_\tau\rangle$$

$$\forall\, a,b \in A$$

$$\overline{\Pi_\tau(A)\xi_\tau} = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad T = \lambda \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_\tau(A)' = \mathbb{C}\,1$$

$$\overset{6.3.}{\Rightarrow} \quad \Pi_\tau \text{ irreduzibel}$$

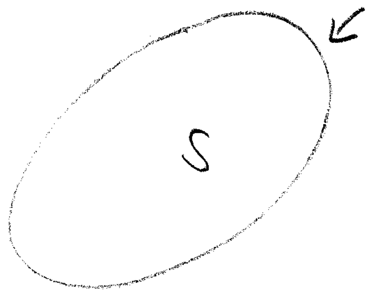
□

(*)

<u>6.10 "Erinnerung"</u>: 1) Sei S eine konvexe Menge in einem Vektorraum X, so heißt $x \in S$ <u>Extremalpunkt</u> von S, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x = t y + (1-t) z \\ \text{mit } 0<t<1 \\ y, z \in S \end{array}\right\} \Rightarrow y = z = x$$

$\partial S = \{\text{Extremalpunkte}\}$



2) Es gilt der <u>Satz von Krein-Milman</u>: Sei $S \neq \emptyset$ eine konvexe kompakte Menge in einem lokalkonvexen Raum X. Dann ist die Menge E der Extremalpunkte von S nicht leer und es gilt

$$S = \overline{\mathrm{conv}(E)}$$

wobei $\mathrm{conv}(E) := \{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid n \geq 1, t_i \geq 0, \sum t_i = 1, x_i \in E \}$ konvexe Hülle

(*) **6.9 Folgerung:** Sei $\pi: A \to B(\mathcal{H})$ eine irreduzible Darstellung mit $\pi \neq 0$. Dann ist für jeden Einheitsvektor $\xi \in \mathcal{H}$ ($\|\xi\| = 1$) der zugehörige Zustand τ_ξ mit

$$\tau_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$$

rein und die zugehörige GNS-Darstellung ist äquivalent zu π.

Beweis: π irreduzibel $\overset{6.3.}{\Rightarrow}$ alle $\xi \neq 0$ zyklisch

Sei nun $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$

Betrachte π als zyklische Darstellung $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ mit zugehörigem kanonischen positiven Funktional $\tau = \tau_\xi$.

Die zu τ_ξ gehörige GNS-Darstellung $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau, \xi_\tau)$ hat nach Konstruktion dasselbe kanonische Funktional τ, also nach 5.7.

$$(\mathcal{H}, \pi, \xi) \sim (\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau, \xi_\tau)$$

π irreduzibel $\Rightarrow \pi_\tau$ irreduzibel

$$\overset{6.8}{\Rightarrow} \underset{\tau_\xi}{\overset{\tau}{\shortparallel}} \text{ rein}$$

□

6.11. Satz: Sei A C^*-Algebra und

$S := \{\tau : A \to \mathbb{C} \mid \tau$ positives lineares Funktional, $\|\tau\| \leq 1\}$

Dann gilt:

1) S ist konvex und schwach* kompakt.

2) Die Extremalpunkte von S sind 0 und die reinen Zustände.

Beweis: 1) S konvex: $\tau_1, \tau_2 \in S \Rightarrow t\tau_1 + (1-t)\tau_2 \in S$
$0 \leq t \leq 1$

$S \subset K_1(A^*)$ Einheitskugel im Dualraum von A

$\uparrow$ schwach* kompakt nach Banach-Alaoglu

somit zz: S schwach* abgeschlossen in $K_1(A^*)$

Sei $\tau_\lambda \to L \in K_1(A^*)$ schwach*, d.h.

$$\lim_\lambda \tau_\lambda(a) = L(a) \qquad \forall a \in A$$

alle $\tau_\lambda \geq 0 \Rightarrow L \geq 0 \Rightarrow L \in S$

d.h. S schwach* abgeschl. $\Rightarrow$ S schwach* kompakt

2) 0 ist Extremalpunkt: Sei $0 = t\tau + (1-t)\varsigma$

$$\Rightarrow \varsigma = -\frac{t}{1-t}\tau$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varsigma(a^*a)}_{\geq 0} = -\frac{t}{1-t}\underbrace{\tau(a^*a)}_{\geq 0} \Rightarrow \varsigma(a^*a) = \tau(a^*a) = 0 \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow \varsigma = \tau = 0$$

$\Rightarrow$ 0 Extremalpunkt von S

Sei nun τ reiner Zustand: Sei $\tau = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ $(\rho_1,\rho_2 \in S)$
$(0<t<1)$

G-11

$\Rightarrow t\rho_1 \leq \tau$

$\overset{\tau \text{ rein}}{\Longrightarrow} t\rho_1 = \lambda\tau$ $(*)$

Da $1 = \|\tau\| = t\underbrace{\|\rho_1\|}_{\leq 1} + (1-t)\underbrace{\|\rho_2\|}_{\leq 1}$ (4 8)

$\Rightarrow \|\rho_1\| = \|\rho_2\| = 1$

Dann folgt aus $(*)$:

$t = \|t\rho_1\| = \|\lambda\tau\| = \lambda$

$\Rightarrow \rho_1 = \tau$

$\Rightarrow \rho_2 = \tau$

d.h. τ Extremalpunkt von S

Sei nun τ Extremalpunkt von S mit $\tau \neq 0$; z.z.: τ rein

$$\left.\begin{array}{l} \text{Da} \quad \tau = \|\tau\| \dfrac{\tau}{\|\tau\|} + (1-\|\tau\|)\, 0 \\[2ex] \qquad \dfrac{\tau}{\|\tau\|},\ 0 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \|\tau\| = 1$$

Sei nun $\rho \leq \tau$ und $\rho \neq \tau, 0$

beachte: $\tau = \underbrace{\rho}_{\geq 0} + \underbrace{(\tau-\rho)}_{\geq 0} \overset{4.8}{\Rightarrow} 1 = \|\tau\| = \|\rho\| + \underbrace{\|\tau-\rho\|}_{>0}$

$\Rightarrow 0 < \|\rho\| < 1$

Somit folgt aus

$\tau = \lambda \dfrac{\rho}{\|\rho\|} + (1-\lambda)\dfrac{\tau-\rho}{\|\tau-\rho\|}$ (mit $\lambda := \|\rho\|$, $1-\lambda = \|\tau-\rho\|$)

$\overset{\tau \text{ extremal}}{\Longrightarrow} \dfrac{\rho}{\|\rho\|} = \tau$, d.h. $\rho = \|\rho\|\tau$ $\Rightarrow$ τ rein $\square$

Krein-Milman liefert also folgendes Korollar.

6.12 Folgerung: Die Menge $S := \{\tau : A \to \mathbb{C} \mid \tau \geq 0, \|\tau\| \leq 1\}$ ist der schwach* Abschluß der konvexen Hülle von 0 und den reinen Zuständen auf A.

Ähnlich sieht man

6.13 Folgerung: Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $S(A)$ die Menge der Zustände auf A. Dann ist $S(A)$ der schwach* Abschluß der konvexen Hülle von den reinen Zuständen auf A.

6.14 Bem.: All dies sagt uns: Es gibt genügend viele reine Zustände und somit auch irreduzible Darstellungen für eine C^*-Algebra.