8 Die C^*-Algebra der kompakten Operatoren

Ziel: Bestimmung der (reinen) Zustände auf $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ und der irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

8.1 Lemma: Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H} = N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Seien $(\xi_i)_{i=1}^N$ und $(\eta_i)_{i=1}^N$ zwei ONB von $\mathcal{H}$.

Dann gilt für jedes $x \in B(\mathcal{H})$

$$\sum_{i=1}^N \|x\xi_i\|^2 = \sum_{i=1}^N \|x\eta_i\|^2 \in [0,\infty]$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \|x\xi_i\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N |\langle x\xi_i, \eta_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \underbrace{\sum_{i=1}^k |\langle x\xi_i, \eta_j\rangle|^2}_{\leq \sum_{i=1}^N |\underbrace{\langle x\xi_i, \eta_j\rangle}_{\langle \xi_i, x^*\eta_j\rangle}|^2} \leq \sum_{j=1}^N \|x^*\eta_j\|^2 \quad \forall k \leq N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|x\xi_i\|^2 \leq \sum_{j=1}^N \|x^*\eta_j\|^2 \underset{\substack{\text{analog}\\ x \rightsquigarrow x^*\\ \xi \leftrightarrow \eta}}{\leq} \sum_{i=1}^N \|x\xi_i\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \|x\xi_i\|^2 = \sum_{j=1}^N \|x^*\eta_j\|^2 \quad \forall \text{ ONB } (\xi_i), (\eta_j)$$

insbesondere: $\xi_i = \eta_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \|x\eta_i\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \|x^*\eta_j\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|x\xi_i\|^2$$

□

8.2 Def.: Wir setzen für $x \in B(\mathcal{H})$

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{N} \|x\xi_i\|^2\Big)^{1/2} \qquad \text{für ONB } (\xi_i)_{i=1}^{N}$$

und nennen x Hilbert-Schmidt Operator, falls

$\|x\|_2 < \infty$.

Notation: $L^2(\mathcal{H}) := \{x \in B(\mathcal{H}) \mid \|x\|_2 < \infty\}$

8.3. Satz: Seien $x, y \in B(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

i) $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$

ii) $\|x\| \leq \|x\|_2$, iii) $\|x^*\| = \|x\|$

iv) $\|xy\|_2 \leq \|x\| \, \|y\|_2$, $\|xy\|_2 \leq \|x\|_2 \, \|y\|$

Beweis: i) Sei $(\xi_i)_{i=1}^{N}$ ONB von $\mathcal{H}$.

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \|(x+y)\xi_i\|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\|x\xi_i\| + \|y\xi_i\|)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \|x\xi_i\|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \|y\xi_i\|^2}$$

(da $\sqrt{\sum (\alpha_i + \beta_i)^2} \leq \sqrt{\sum \alpha_i^2} + \sqrt{\sum \beta_i^2}$

$\rightsquigarrow$ Norm auf ℓ_2)

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

$\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$ klar

ii) Sei $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\|\xi\| = 1 \rightsquigarrow \exists$ ONB $(\xi_i)_{i=1}^N$ mit $\xi_1 = \xi$

$$\Rightarrow \|x\xi\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \|x\xi_i\|^2 = \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\| \leq \|x\|_2$$

iii) im Beweis von 8.1. gezeigt

iv) Sei (ξ_i) ONB von $\mathcal{H}$

$$\Rightarrow \|xy\|_2^2 = \sum_i \underbrace{\|xy\xi_i\|^2}_{\leq \|x\|^2 \|y\xi_i\|^2}$$

$$\leq \|x\|^2 \sum_i \|y\xi_i\|^2$$

$$= \|x\|^2 \, \|y\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|xy\|_2 \leq \|x\| \, \|y\|_2$$

und $\|xy\|_2 = \|y^*x^*\|_2 \leq \|y^*\| \, \|x^*\|_2 = \|y\| \, \|x\|_2$

$\square$

<u>8.4. Folgerung</u>: $L^2(\mathcal{H})$ ist ein selbstadjungiertes Ideal von $B(\mathcal{H})$ und eine normierte $*$-Algebra mit der Norm $\|\cdot\|_2$.

Beachte: $L^2(\mathcal{H})$ ist nicht abgeschlossen in $B(\mathcal{H})$ bzgl $\|\cdot\|$

$\rightsquigarrow L^2(\mathcal{H}) \hat{=}$ Hilbertraum

$$\left.\begin{array}{l} \|x\|_2^2 \overset{\wedge}{=} \langle x, x\rangle_2 \\ \quad \| \\ \sum \|x\xi_i\|^2 = \sum \langle x\xi_i, x\xi_i\rangle \end{array}\right\} \overset{?}{\rightsquigarrow} \langle x, y\rangle_2 = \sum \langle x\xi_i, y\xi_i\rangle$$

8.4 Lemma: Seien $x, y \in L^2(\mathcal{H})$ und (ξ_i) ONB von $\mathcal{H}$

Dann ist

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle x\xi_j, y\xi_j\rangle| < \infty$$

und

$$\sum_{j=1}^{N} \langle x\xi_j, y\xi_j\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|_2^2,$$

also insbesondere ist $\sum_{j=1}^{N} \langle x\xi_j, y\xi_j\rangle$ unabhängig von der Wahl der ONB

Beweis: $\sum_{j=1}^{K} |\langle x\xi_j, y\xi_j\rangle| \le \sum_{j=1}^{K} \|x\xi_j\| \, \|y\xi_j\|$

$$\le \sqrt{\sum_{j=1}^{K} \|x\xi_j\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{K} \|y\xi_j\|^2}$$

$$\le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} |\langle x\xi_j, y\xi_j\rangle| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

Polarisierung $\Rightarrow \langle x\xi_j, y\xi_j\rangle = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l \|x\xi_j + i^l y\xi_j\|^2 \quad \forall j$

$$\Rightarrow \sum_j \langle x\xi_j, y\xi_j\rangle = \sum_j \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l \|(x + i^l y)\xi_j\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l \|x + i^l y\|_2^2$$

$\square$

8.5. Bemerkung: $L^2(\mathcal{H})$ ist bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle x, y\rangle_2 := \sum \langle x\xi_j, y\xi_j\rangle \qquad (\text{für ONB } (\xi_j))$$

ein Hilbertraum.

Wir wollen nun noch Spur tr einführen:

$$\operatorname{tr}(x) = \sum \langle x\xi_j, \xi_j\rangle$$

Wann macht dies Sinn?

8.6. Definition: Für $x \in B(\mathcal{H})$ setzen wir $|x| := \sqrt{x^*x}$ und

$$\|x\|_1 := \||x|^{1/2}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N} \langle |x|^{1/2}\xi_j, |x|^{1/2}\xi_j\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle |x|\xi_j, \xi_j\rangle$$

für ONB (ξ_j)

Gilt $\|x\|_1 < \infty$ (d.h. $|x|^{1/2} \in L^2(\mathcal{H})$), so nennen wir x einen Spurklasseoperator

$$L^1(\mathcal{H}) := \{ x \in B(\mathcal{H}) \mid \|x\|_1 < \infty \}$$

8.7. Satz (Polarzerlegung): Sei $x \in B(\mathcal{H})$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie $u \in B(\mathcal{H})$ mit

$$x = u|x| \qquad \text{und} \qquad \ker x = \ker u$$

Außerdem gilt: $u^*x = |x|$

Beweis: Idee: muß gelten $x\xi = u|x|\xi$

also: definiere u auf $|x|\mathcal{H}$ durch diese Formel, auf orth. Komplement setze es Null

Es gilt: $\| \, |x| \xi \, \|^2 = \langle |x|\xi, |x|\xi \rangle$

$$= \langle x^* x \xi, \xi \rangle$$

$$= \langle x\xi, x\xi \rangle$$

$$= \| x \xi \|^2$$

$\Rightarrow u_0 : |x| \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ isometrisch und wohl-definiert

$|x|\xi \mapsto x\xi$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige isometrische Fortsetzung $u_0 : \overline{|x|\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$

Setze

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{auf } \overline{|x|\mathcal{H}} \\ 0 & \overline{|x|\mathcal{H}}^{\perp} \end{cases}$$

$\Rightarrow u|x| = x$ und u isometrisch auf

$\overline{|x|\mathcal{H}} = \ker(u)^{\perp}$

$\Rightarrow u$ partielle Isometrie

noch z.z.: $\ker x = \ker u$

Es gilt: $\ker u = (\operatorname{ran} |x|)^{\perp} = \ker |x|$

und: $\langle u^* x \xi, |x| \eta \rangle = \langle x\xi, \underbrace{u|x|}_{x} \eta \rangle$

$$= \langle \underbrace{x^* x}_{|x|^2} \xi, \eta \rangle$$

$$= \langle |x|\xi, |x|\eta \rangle \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u^* x \xi}_{\in \overline{|x|\mathcal{H}}} - \underbrace{|x|\xi}_{\in |x|\mathcal{H}} \in |x|\mathcal{H}^{\perp} \Rightarrow u^* x \xi = |x|\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

da $u^* : \overline{\operatorname{ran}(u)} \to \overline{|x|\mathcal{H}}$

$\Rightarrow u^* x = |x|$

$\Rightarrow \ker x \subseteq \ker |x|$

Wegen $u|x| = x$ auch $\ker |x| \subseteq \ker x$ $\Big\} \Rightarrow \ker |x| = \ker x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ker u$

Eindeutigkeit: Übung. □

<u>8.8 Bem</u>: Falls x invertierbar ist, so ist u unitär und kann mittels Funktionalkalkül in $C^*(x)$ gebildet werden (vgl Aufg. 3)

Im allgemeinen ist aber $u \notin C^*(x)$

(aber $u \in vN(x)$)

<u>8.9. Satz</u>: Für $x \in B(\mathcal{H})$ sind äquivalent:

a) $x \in L^1(\mathcal{H})$

b) $|x| \in L^1(\mathcal{H})$

c) $|x|^{1/2} \in L^2(\mathcal{H})$

d) Es gibt $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{H})$ mit: $x = y_1 y_2$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) klar, da $|(|x|)| = |x|$

b) $\Rightarrow$ c) klar nach Def. von $\|\cdot\|_1$

c) $\Rightarrow$ d) $x = u|x| = \underbrace{u|x|^{1/2}}_{=: y_1} \underbrace{|x|^{1/2}}_{=: y_2 \in L^2(\mathcal{H})}$

$y_1 \in L^2(\mathcal{H})$, da $|x|^{1/2} \in L^2(\mathcal{H})$ und $L^2(\mathcal{H})$ Ideal

d) $\Rightarrow$ a) Sei $x = y_1 y_2$ mit $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{H})$

Sei $x = u|x|$ Polarzerlegung

$\Rightarrow |x| = u^* x = u^* y_1 y_2$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \langle |x| \xi_j, \xi_j \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \underbrace{u^* y_1}_{\in L^2} \xi_j, \underbrace{y_2^*}_{\in L^2} \xi_j \rangle \underset{\text{nach } 8.4.}{<} \infty$$

$\square$

8.10. Def.: Sei $x \in L^1(\mathcal{H})$. Dann definieren wir die Spur $tr(x)$ durch

$$tr(x) := \sum_{j=1}^{N} \langle x \xi_j, \xi_j \rangle \qquad \text{für ONB } (\xi_j)$$

8.11. Bem.: Da wir $x = y_1^* y_2$ mit $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{H})$ schreiben können, ist

$$tr(x) = tr(y_1^* y_2) = \sum_{j=1}^{N} \langle y_2 \xi_j, y_1 \xi_j \rangle$$

endlich und unabhängig von der Wahl der ONB (8.4)

8.12 Satz: Seien $x, y \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt

$$tr(xy) = tr(yx)$$

falls

i) $x, y \in L^2(\mathcal{H})$

oder

ii) $x \in L^1(\mathcal{H})$

Beweis i) $tr(xy) = \sum_{j=1}^{N} \langle y\xi_j, x^*\xi_j \rangle$

$$= \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l \underbrace{\| y + i^l x^* \|_2^2}_{\substack{= \|(y+i^l x^*)^*\|_2^2 \\ = \| y^* + (-i)^l x \|_2^2 \\ = \| i^l y^* + x \|_2^2}} \qquad (8.4)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \langle x\xi_j, y^*\xi_j \rangle$$

$$= tr(yx)$$

ii) $x \in L^1(\mathcal{H}) \Rightarrow x = y_1 y_2$ mit $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{H})$

$$\Rightarrow tr(xy) = tr(\underbrace{y_1}_{\in L^2}\underbrace{y_2 y}_{\in L^2,\ \text{da Ideal}}) \overset{i)}{=} tr(\underbrace{y_2}_{\in L^2}\underbrace{y y_1}_{\in L^2}) \overset{i)}{=} tr(y y_1 y_2)$$

$$= tr(yx)$$

□

<u>8.13. Bemerkung:</u> 1) Analog zu $L^2(\mathcal{H})$ kann man zeigen:

i) $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$, $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \, \|x\|_1$

ii) $\|x\| \leq \|x\|_1$

iii) $\|x^*\|_1 = \|x\|_1$

iv) $\|xy\|_1 \leq \|x\| \, \|y\|_1$, $\|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \, \|y\|$

Somit ist auch $L^1(\mathcal{H})$ ein selbstadjungiertes Ideal von $B(\mathcal{H})$ und eine normierte $*$-Algebra mit der Norm $\|\cdot\|_1$.

2) Es gilt

$$L^1(\mathcal{H}) \subset L^2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$$

denn: $x \in L^1(\mathcal{H}) \Rightarrow x = y_1 y_2$ mit $y_1, y_2 \in L^2(\mathcal{H})$

$\Rightarrow x \in L^2(\mathcal{H})$, da $L^2(\mathcal{H})$ Ideal

$$x \in L^2(\mathcal{H}) \Rightarrow \|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x \xi_j\|^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \|x \xi_j\| \xrightarrow{j \to \infty} 0 \qquad \forall \text{ ONB } (\xi_j)$$

$$\Rightarrow x \text{ kompakt}$$

3) $L^1(\mathcal{H})$ und $L^2(\mathcal{H})$ sind auch abgeschlossen bzgl. ihrer jeweiligen Norm, also Banach-$*$-Algebren

8.14 Satz: $L^1(\mathcal{H})$ ist der Dualraum von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Genauer: Die Abbildung

$$\Theta : L^1(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$$

$$x \longmapsto \rho_x \qquad \text{mit } \rho_x(y) := \operatorname{tr}(xy) \quad (y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

ist ein isometrischer Isomorphismus

Beweis: $x \in L^1(\mathcal{H}) \Rightarrow |\rho_x(y)| = |\operatorname{tr}(xy)| < \infty$ und

$$|\rho_x(y)| = |\operatorname{tr}(yx)|$$

$$= \Big|\sum_j \langle yx\xi_j, \xi_j\rangle\Big|$$

$x = u|x|$

$$\le \sum_j \underbrace{|\langle |x|^{1/2}\xi_j, |x|^{1/2}u^*y^*\xi_j\rangle|}_{\le \| |x|^{1/2}\xi_j\| \cdot \| |x|^{1/2}u^*y^*\xi_j\|}$$

$$\le \underbrace{\Big(\sum_j \| |x|^{1/2}\xi_j\|\Big)^{1/2}}_{\| |x|^{1/2}\|_2 = \|x\|_1^{1/2}} \cdot \underbrace{\Big(\sum_j \| |x|^{1/2}u^*y^*\xi_j\|\Big)^{1/2}}_{\| |x|^{1/2}u^*y^*\|_2}$$

$$\| |x|^{1/2}u^*y^*\|_2 \le \| |x|^{1/2}\|_2 \cdot \underbrace{\|u^*\|}_{=1} \underbrace{\|y^*\|}_{=\|y\|}$$

$$\le \|x\|_1^{1/2} \cdot \|x\|_1^{1/2} \, \|y\|$$

$$= \|x\|_1 \cdot \|y\|$$

also: $|\rho_x(y)| \le \|x\|_1 \cdot \|y\|$, d.h. ρ_x stetig und $\|\rho_x\| \le \|x\|_1$

Sei nun $\varrho \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$

Bezeichne $|\xi_1\rangle\langle\xi_2|$ den Operator endlichen Ranges mit

$$|\xi_1\rangle\langle\xi_2|\,\eta = \langle\eta,\xi_2\rangle\,\xi_1 .$$

Dann ist $(\xi_1,\xi_2) \mapsto \varrho(|\xi_1\rangle\langle\xi_2|)$ beschränkte Sesquilinearform mit

$$|\varrho(|\xi_1\rangle\langle\xi_2|)| \leq \|\varrho\| \cdot \underbrace{\||\xi_1\rangle\langle\xi_2|\|}_{=\|\xi_1\|\,\|\xi_2\|}$$

$\Rightarrow \exists\, x \in B(\mathcal{H})$ mit

$$\varrho(|\xi_1\rangle\langle\xi_2|) = \langle x\,\xi_1, \xi_2\rangle$$

und $\|x\| \leq \|\varrho\|$

Beh : $x \in L^1(\mathcal{H})$ und $\varrho = \varrho_x$

denn: Sei $x = u\,|x|$ und (ξ_i) ONB

$$\Rightarrow \|x\|_1 = \sum_j \langle \underbrace{|x|}_{u^* x}\,\xi_j, \xi_j\rangle$$

$$= \sum_j \langle x\,\xi_j, u\,\xi_j\rangle$$

$$= \sum_j \varrho(\underbrace{|\xi_j\rangle\langle u\,\xi_j|}_{|\xi_j\rangle\langle\xi_j|\,u^*})$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \varrho(|\xi_j\rangle\langle\xi_j|\,u^*)}_{\varrho((\sum_{j=1}^{k}|\xi_j\rangle\langle\xi_j|)\,u^*)} \longleftarrow |\ldots| \leq \|\varrho\|\,\|u^*\|\cdot\|\Sigma\|$$

$$|\dots| \leq \|\varsigma\| \cdot \underbrace{\Big\| \sum_{j=1}^{k} |\xi_j\rangle\langle\xi_j| \Big\|}_{\substack{=1, \\ \text{da Projektion}}} \; \underbrace{\|u^*\|}_{=1}$$

$\Rightarrow \|x\|_1 \leq \|\varsigma\| < \infty$

$\Rightarrow x \in L^1(\mathcal{H})$

Betrachte $y := |\eta_1\rangle\langle\eta_2|$ endl. Rang Operator $(\|\eta_1\| = \|\eta_2\| = 1)$

dann: $tr(xy) = \sum_i \langle xy\xi_i, \xi_i\rangle$ Wähle ONB mit $\xi_1 = \eta_2$

$= \langle x\eta_1, \eta_2\rangle$

$= \varsigma(|\eta_1\rangle\langle\eta_2|)$

$= \varsigma(y)$

Linearkombinationen $\Rightarrow tr(xy) = \varsigma(y)$ $\forall$ endl. Rang Operatoren y

$\Rightarrow \varsigma_x = \varsigma$ auf endl. Rang Operatoren

Da ς_x und ς stetig bzgl. $\|\cdot\|$

$\Rightarrow \varsigma_x = \varsigma$ auf $\overline{\{\text{endl. Rang}\}}^{\|\cdot\|} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$\Rightarrow \Theta : L^1(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ surjektiv

$x \mapsto \varsigma_x$

injektiv: Sei $\varsigma_x(y) = tr(xy) = 0$ $\forall y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$y = x^* \Rightarrow tr(xx^*) = 0 \Rightarrow x = 0$

Θ isometrisch: Sei $\varsigma = \varsigma_x$

$\Rightarrow \|\varsigma_x\| \leq \|x\|_1$ und $\|x\|_1 \leq \|\varsigma\| = \|\varsigma_x\|$

also $\|\varsigma_x\| = \|x\|_1$

$\square$

8.15 Folgerung: Als Dualraum ist $L^1(\mathcal{H})$ vollständig, also ist $L^1(\mathcal{H})$ Banach-$*$-Algebra bzgl. $\|\cdot\|_1$

8.16 Bem: 1) Analog kann man zeigen

$$L^2(\mathcal{H})^* = L^2(\mathcal{H})$$

$$L^1(\mathcal{H})^* = B(\mathcal{H})$$

2) $B(\mathcal{H})^*$ ist echt größer als $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = L^1(\mathcal{H})$ (falls $\dim \mathcal{H} = \infty$), es gibt lineare stetige Funktionale auf $B(\mathcal{H})$, die eingeschränkt auf $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ verschwinden. Allerdings werden die sowohl mathematisch als auch physikalisch als exotisch angesehen und man interessiert sich üblicherweise nur für die Funktionale in $B(\mathcal{H})^*$ die von der Form ς_x sind. Diese heißen normal.

Dem entspricht, daß man $B(\mathcal{H})$ als von Neumann-Algebra betrachtet und nicht als C^*-Algebra.

8.17. Folgerung: Sei $\varsigma \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$, also $\varsigma = \varsigma_x$ für $x \in L^1(\mathcal{H})$.

Dann gilt:

i) ς positives Funktional auf $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff x \geq 0$

ii) ς Zustand auf $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff x \geq 0$ und $\|x\|_1 = 1$

(x heißt dann auch die zugehörige "Dichtematrix")

<u>Beweis:</u> i) $x \geq 0 \Rightarrow \rho_x(a^*a) = tr(x a^* a)$

$$= tr(\underbrace{a x a^*}_{\geq 0})$$

$$\geq 0$$

nach Def. der Spur

Sei $\rho = \rho_x$ positiv und $\xi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow |\xi\rangle\langle\xi| \geq 0$

$\Rightarrow \rho(|\xi\rangle\langle\xi|) \geq 0$

$\quad \| $

$tr(|\xi\rangle\langle\xi| x)$

$\quad \| $

$\langle x\xi, \xi\rangle$

also: $\langle x\xi, \xi\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow x \geq 0$

ii) Sei ρ positives Funktional, d.h. $x \geq 0$. Dann

ρ Zustand $\Leftrightarrow \|\rho\| = 1$

aber $\|\rho\| = \|\rho_x\| = \|x\|_1$ □

<u>8.18. Satz:</u> Die reinen Zustände auf $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ sind genau die Abbildungen

$\tau_\eta : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$y \mapsto tr(y|\eta\rangle\langle\eta|) = \langle y\eta, \eta\rangle$$

mit $\eta \in \mathcal{H}$ und $\|\eta\| = 1$

<u>Beweis</u>: Betrachte die identische Darstellung

$\pi : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$

Jeder Vektor $\eta \neq 0$ ist zyklisch,

d.h. π ist irreduzibel und das zugehörige positive Funktional für einen zyklischen Vektor η

$\tau(y) = \langle \pi(y)\eta, \eta \rangle = \langle y\eta, \eta \rangle = \tau_\eta(y)$

ist somit rein nach 6.9.

~~(da $\pi \simeq \pi_\eta$ nach 5.7., also π_η irreduzibel, also zugehöriges positives Funktional τ_η rein)~~

also: alle τ_η für $\eta \in \mathcal{H}$, $\|\eta\| = 1$ rein

($\|\eta\| = 1 \iff \tau_\eta$ Zustand)

Sei nun τ reiner Zustand auf $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

8.17 $\Rightarrow$ $\tau = S_x$ mit $x \geq 0$ und $\|x\|_1 = 1$

$x \in L^1(\mathcal{H}) \Rightarrow x$ kompakt

$\overset{x = x^*}{\Rightarrow}$ x diagonalisierbar in der Form $x = \sum \lambda_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$

mit (ξ_i) ONB und $\lambda_i \geq 0$ (da $x \geq 0$)

(und $\lambda_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

Sei o.E. $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$

Betrachte nun τ_{ξ_0} mit $\tau_{\xi_0}(y) = \langle y\xi_0, \xi_0 \rangle$

Wir wollen zeigen: $\tau = \tau_{\xi_0}$

dann: $\tau \geq \lambda_0 \tau_{\xi_0}$

denn: Sei $y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit $y \geq 0$

$$\Rightarrow \tau(y) = \rho_x(y)$$

$$= tr(xy)$$

$$= tr\left(\sum \lambda_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i| y\right)$$

$$= \sum \lambda_i \underbrace{tr(|\xi_i\rangle\langle\xi_i| y)}_{\langle y\xi_i, \xi_i\rangle}$$

$$\geq \lambda_0 \langle y\xi_0, \xi_0\rangle$$ da alle $\lambda_i \geq 0$ und $\langle y\xi_i, \xi_i\rangle \geq 0$ $(y \geq 0)$

$$\Rightarrow \tau \geq \lambda_0 \tau_{\xi_0}$$

τ rein $\Rightarrow \exists \lambda \in [0,1] : \lambda\tau = \lambda_0 \tau_{\xi_0}$

Da $\|\tau\| = 1 = \|\tau_{\xi_0}\| \Rightarrow \lambda = \lambda_0$ und $\tau = \tau_{\xi_0}$

$\square$

8.19. Folgerung: Jede irreduzible Darstellung $\Pi_1 \neq 0$ von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist unitär äquivalent zu der identischen Darstellung $\Pi_0 : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$.

Beweis: Sei $\Pi_1 : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}_1)$ irreduzible Darstellung

Sei $\xi \in \mathcal{H}_1$ mit $\|\xi\| = 1$

$\overset{C.9.}{\Rightarrow}$ τ mit $\tau(y) = \langle \Pi_1(y)\xi, \xi\rangle$ ist rein

$\overset{8.18}{\Rightarrow}$ $\exists \eta \in \mathcal{H}, \|\eta\| = 1$ mit $\tau = \tau_\eta$,

d.h. $\langle \Pi_0(y)\eta, \eta\rangle = \langle \Pi_1(y)\xi, \xi\rangle \quad \forall y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

Da π_0 und π_1 zyklische Darstellungen (mit zyklischen Vektoren η bzw. ξ)

$\overset{5.7.}{\Longrightarrow}$ $\pi_0 \sim \pi_1$

8.20. Bem.: 1) Im Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ gilt natürlich

$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H}) \cong M_{\dim \mathcal{H}}(\mathbb{C})$

d.h. wir erhalten den endlich-dim. Fall als Spezialfall

2) Wir kennen also nun folgende Beispiele für C^*-Algebren mit nur einer irreduziblen Darstellung:

- $M_n(\mathbb{C})$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

- $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ $\quad (\dim \mathcal{H} = \infty)$

Rosenberg's Theorem (1953): Dies sind auch schon alle C^*-Algebren im separablen Fall mit dieser Eigenschaft

Im Allgemeinen besitzen C^*-Algebren viele inäquivalente irreduzible Darstellungen

3) Beachte: Für nicht-einfache C^*-Algebren ist die Existenz inäquivalenter irred. Darstellungen nicht verwunderlich: Sei $\pi: A \to B(\mathcal{H})$ Darstellung

$\Rightarrow \ker \pi$ abg. Ideal in A

Seien π_1, π_2 Darstellungen mit $\ker \pi_1 \neq \ker \pi_2$

$\Rightarrow \pi_1 \not\sim \pi_2$ (denn $\pi_1(a) = u^* \pi_2(a) u \Rightarrow \ker \pi_1 = \ker \pi_2$)

Aber: Typischerweise besitzen auch einfache C^*-Algebren inäquivalente irreduzible Darstellungen