9. von Neumann Algebren

9.1. Erinnerung: Auf $B(\mathcal{H})$ gibt es neben der Normtopologie noch weitere wichtige lokalkonvexe Topologien:

i) starke Operatortopologie (SOT)

wird erzeugt durch Halbnormen

$$p_\xi(x) = \|x\xi\| \qquad (\xi \in \mathcal{H})$$

d.h. $x_\alpha \xrightarrow{SOT} x \iff x_\alpha \xi \to x\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$

beachte: Multiplikation nicht gemeinsam stetig, d.h.

$$\begin{matrix} x_\alpha \xrightarrow{SOT} x \\ y_\alpha \xrightarrow{SOT} y \end{matrix} \quad \not\Rightarrow \quad x_\alpha y_\alpha \xrightarrow{SOT} xy$$

aber: • Multiplikation getrennt stetig

d.h. $\begin{matrix} x \mapsto xy \\ x \mapsto yx \end{matrix}$ sind stetig $\forall y \in B(\mathcal{H})$

• Multiplikation auf beschränkten Mengen stetig

denn: Sei $\|x_\alpha\|, \|y_\alpha\| \leq M \quad \forall \alpha$

$$x_\alpha \to x, \quad y_\alpha \to y$$

$\Rightarrow \|x_\alpha y_\alpha \xi - xy\xi\| =$

$= \|x_\alpha y_\alpha \xi - x_\alpha y\xi + x_\alpha y\xi - xy\xi\|$

$\leq \underbrace{\|x_\alpha\|}_{\leq M} \underbrace{\|y_\alpha \xi - y\xi\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_\alpha y\xi - xy\xi\|}_{\to 0 \text{ da } y\xi \in \mathcal{H} \text{ fest}}$

Außerdem

- $x \mapsto \|x\|$ nicht stetig

  z.B.: Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ONB von $\mathcal{H}$

  Setze $x_n \xi := \xi_1 \langle \xi, \xi_n \rangle$

  Dann gilt: $x_n \xrightarrow{SOT} 0$, aber $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$

- $x \mapsto x^*$ nicht stetig

  z.B.: x_n wie oben, d.h. $x_n \xrightarrow{SOT} 0$

  aber $x_n^* \xi = \xi_n \langle \xi, \xi_1 \rangle$

  es gilt $x_n^* \xi_1 = \xi_n$ konvergiert nicht für $n \to \infty$

ii) schwache Operatortopologie (WOT)

wird erzeugt durch Halbnormen

$$p_{\xi,\eta}(x) = |\langle x\xi, \eta \rangle| \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H})$$

d.h. $x_\alpha \xrightarrow{WOT} x \iff \langle x_\alpha \xi, \eta \rangle \to \langle x\xi, \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$

Es gilt:

- Multiplikation getrennt stetig, aber nicht gemeinsam

  denn: $x_\alpha \xrightarrow{WOT} x$, $y \in B(\mathcal{H})$

  $$\Rightarrow |\langle x_\alpha \underbrace{y\xi}_{\in \mathcal{H}}, \eta \rangle - \langle x \underbrace{y\xi}_{\in \mathcal{H}}, \eta \rangle| \to 0$$

  $$\Rightarrow x_\alpha y \xrightarrow{WOT} xy$$

  $y x_\alpha \xrightarrow{WOT} yx$ folgt aus folgendem

- $x \to x^*$ stetig

da: $|\langle x^* \xi, \eta \rangle| = |\langle \xi, x\eta \rangle| = |\langle x\eta, \xi \rangle|$

Es gilt

WOT < SOT < Norm-Topolgie

denn: Sei $x_\alpha \xrightarrow{SOT} x$, d.h. $\| x_\alpha \xi - x\xi \| \to 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow |\langle (x_\alpha - x)\xi, \eta \rangle| \leq \underbrace{\|(x_\alpha - x)\xi\|}_{\to 0} \cdot \|\eta\| \to 0$

$\Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{WOT} x$

<u>9 2. Lemma</u>: Sei $\varphi: B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist schwach stetig.

(ii) φ ist stark stetig

(iii) Es gilt $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{H}$ so dass

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x\xi_i, \eta_i \rangle \qquad \forall x \in B(\mathcal{H})$$

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓ da SOT feiner als WOT

(d.h. SOT hat mehr offene Mengen)

(iii) $\Rightarrow$ (i) ✓ da $x_\alpha \xrightarrow{WOT} x$

$\Rightarrow \varphi(x_\alpha - x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle (x_\alpha - x)\xi_i, \eta_i \rangle}_{\to 0} \Rightarrow \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei φ stark stetig

$\Rightarrow \exists M > 0$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ so dass $\forall x \in B(\mathcal{H})$

$$|\varphi(x)| \leq M \max_{1 \leq j \leq n} p_{\xi_j}(x) = M \max_{1 \leq j \leq n} \|x \xi_j\|$$

$$\leq M \Big(\sum_{j=1}^{n} \|x\xi_j\|^2 \Big)^{1/2}$$

Betrachte

$$\{ \oplus x \xi_i \mid x \in B(\mathcal{H}) \} \subset \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n\text{-mal}}$$

Sei $\mathcal{H}_0$ der Abschluß davon

$$\Rightarrow \quad \Psi : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{C}$$
$$\oplus x \xi_i \mapsto \varphi(x)$$

ist stetiges lineares Funktional auf Hilbertraum $\mathcal{H}_0$

$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \exists\, \eta \in \mathcal{H}_0$ mit $\Psi(\oplus x\xi_i) = \langle \oplus x \xi_i, \oplus \eta_i \rangle$

$\eta = \oplus \eta_i$, $\quad \Psi(\oplus x\xi_i) = \varphi(x)$

$$= \sum \langle x \xi_i, \eta_i \rangle$$

$\square$

<u>9.3. Satz:</u> Sei $K \subset B(\mathcal{H})$ eine konvexe Teilmenge.

Dann ist

K schwach abg. $\Leftrightarrow$ K stark abgeschlossen

Beweis: "$\Rightarrow$" klar, da WOT schwächer als SOT

"$\Leftarrow$" Dies folgt aus 9.2. und dem Hahn-Banach Trennungssatz[?] für konvexe Teilmengen in lokalkonvexen Räumen X:

$K \subset X$ konvex; sei $x \in X$, dann ist

$x \in \overline{K} \iff \exists$ Netz $(x_\alpha) \subset K$ so dass

$$f(x_\alpha) \to f(x) \quad \forall f \in X^*$$

$\square$

9.4. Definition: Sei $S \subset B(\mathcal{H})$ eine Teilmenge. Dann heißt

$S' := \{ a \in B(\mathcal{H}) \mid ax = xa \quad \forall x \in S \}$

die Kommutante von S und

$S'' := (S')'$ die Bikommutante von S.

9.5. Bemerkungen: 1) S' ist immer unitale Algebra (mit $1 = id_H$). Ist $S = S^*$ (d.h. $x \in S \Rightarrow x^* \in S$) dann ist S' $*$-Algebra.

2) Bedingung $ax = xa$ bleibt unter starker Grenzwertbildung erhalten, d.h. S' ist immer stark abgeschlossen.

3) Trivialerweise: $S \subset S''$

also für $*$-Algebra S: $S \subset \underset{\uparrow}{S''}$

stark abg. $*$-Algebra

9.6 von Neumannsche Bikommutantensatz:

Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine $*$-Unteralgebra mit $1 := id_H \in \mathcal{M}$.

Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{M}$ ist stark abgeschlossen

(ii) $\mathcal{M}$ ist schwach abgeschlossen

(iii) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) nach 9.3 da $\mathcal{M}$ konvex

(iii) $\Rightarrow$ (i) da $\mathcal{M}''$ nach 9.5 immer stark abgeschlossen

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $y \in \mathcal{M}''$, z.z.: $y \in \mathcal{M} \overset{(i)}{=} \overline{\mathcal{M}}^{SOT}$

$y \in \overline{\mathcal{M}}^{SOT}$ bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0, \xi_1, .., \xi_n \in \mathcal{H} \quad \exists x \in \mathcal{M} \text{ mit}$$

$$\|y\xi_i - x\xi_i\| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, .., n$$

Betrachte zunächst $n = 1$ und $\xi \in \mathcal{H}$

z.z.: $y\xi$ kann beliebig genau durch $x\xi$ mit $x \in \mathcal{M}$ approximiert werden

Setze $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{M}\xi} \subset \mathcal{H}$

und sei p = orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_0$

Es gilt: $a\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0 \quad \forall a \in \mathcal{M}$

Da $0 = \langle \zeta, a\eta \rangle \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}_0^\perp, \eta \in \mathcal{H}_0, a \in \mathcal{M}$

$= \langle a^*\zeta, \eta \rangle \quad \Rightarrow a^* \mathcal{H}_0^\perp \subset \mathcal{H}_0^\perp \quad \forall a^* \in \mathcal{M}$

Für $\eta \in \mathcal{H}_0$, $\xi \in \mathcal{H}_0^\perp$ gilt dann

$$ap(\eta+\xi) = a\eta = p(a\eta + a\xi) = pa(\eta+\xi)$$

$$\Rightarrow \quad ap = pa \qquad \forall a \in \mathcal{M}$$

d.h. $p \in \mathcal{M}'$

$$\overset{y \in \mathcal{M}''}{\Longrightarrow} \quad py = yp$$

$$\Rightarrow \quad y\mathcal{H}_0 = yp\mathcal{H}_0 = py\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$$

Da $\xi = 1 \cdot \xi \in \mathcal{H}_0$ (wegen $1 \in \mathcal{M}$)

$$\Rightarrow \quad y\xi \in \mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{M}\xi}$$

d.h. $y\xi$ kann beliebig genau durch $x\xi$ mit $x \in \xi$ approximiert werden

Betrachte nun allgemeinen Fall n und $\xi_1,..,\xi_n$

Dann betrachte

$$(\xi_1,..,\xi_n) \in \underbrace{\mathcal{H} \oplus .. \oplus \mathcal{H}}_{n\text{-mal}}$$

und

$$\pi : \mathcal{M} \to B(\mathcal{H} \oplus .. \oplus \mathcal{H})$$

$$a \mapsto \pi(a) \qquad \pi(a)(\eta_1,..,\eta_n) := (a\eta_1,..,a\eta_n)$$

$\Rightarrow$ $\pi(\mathcal{M})$ ist $\underset{\text{unitale}}{,}$ $*$-Unteralgebra von $B(\mathcal{H} \oplus . \oplus \mathcal{H})$

und wegen $y \in \mathcal{M}''$ ist $\pi(y) \in \pi(\mathcal{M})''$

beachte: $\pi(\mathcal{M})' = \{(a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in \mathcal{M}' \ \forall i,j\}$

Wende nun obigen Fall für $n=1$ auf $\pi(y)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ an $\square$

<u>9.7. Definition:</u> Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine $*$-Unteralgebra mit $1 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ ist eine <u>von Neumann-Algebra</u>, falls $\mathcal{M}$ die äquivalenten Bedingungen aus 9.6. erfüllt.

<u>9.8. Bemerkungen:</u> 1) Da

$\mathcal{M}$ stark abg. $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ abg. in Operatornorm

ist jede von Neumann Algebra auch eine C^*-Algebra

2) Einfache Beispiele für von Neumann Algebren sind $B(\mathcal{H})$ und $\mathbb{C}\cdot 1 \subset B(\mathcal{H})$, und direkte Beispiele davon. Ob es noch andere nicht-triviale Beispiele gibt, ist nicht offensichtlich

3) Sei $\mathcal{M}$ vN-Algebra. Dann ist $\mathcal{M}$ invariant unter meßbarem Funktionalkalkül.

D.h.: $x \in \mathcal{M}$ normal, f beschränkte Borelfkt auf $\sigma(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) \in \mathcal{M}$

Insbesondere enthält $\mathcal{M}$ mit jedem normalen x auch alle seine Spektralprojektionen $1_E(x)$

vN-Algebra enthält viele Projektionen

(Beachte: $\exists$ C^*-Algebren ohne nicht-triviale Proj.)

<u>9.9. Satz</u> (Polarzerlegung in vN-Algebren).

Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra und $a \in \mathcal{M}$.

Sei $a = v|a|$ die Polarzerlegung von a in $B(\mathcal{H})$

[vgl. Blatt 3, Aufgabe 2

Polarzerlegung ist eindeutig bestimmt durch:
$|a| = \sqrt{a^*a}$, v ist partielle Isometrie
mit $\ker(v) = \ker(a)$]

Dann ist $v \in \mathcal{M}$.

<u>Beweis</u>: Sei $u \in \mathcal{M}'$ unitär

$$\Rightarrow a = uau^* = uv\underbrace{|a|u^*}_{u^*|a| \quad \text{da } |a| \in \mathcal{M}}$$

$$= \underbrace{uvu^*}_{\substack{\text{ist partielle Isometrie} \\ \text{und es gilt } \ker(uvu^*) = \ker(a)}} |a|$$

$\overset{\text{Eindeutigkeit der Polarzerl.}}{\Longrightarrow}$ $\quad uvu^* = v \quad \forall u \in \mathcal{M}'$ unitär

$\Rightarrow \quad uv = vu \qquad$ — " —

Da unitäre $u \in \mathcal{M}'$ die Kommutante $\mathcal{M}'$ erzeugen

$\Rightarrow \quad xv = vx \quad \forall x \in \mathcal{M}'$

$\Rightarrow \quad v \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$

9.10 Satz: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und beschränkte Fkt. Dann ist f stark stetig, d.h. es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x_\alpha \xrightarrow{SOT} x \\ x_\alpha^* = x_\alpha,\ x^* = x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{SOT} f(x)$$

Beweis: Zunächst betrachten wir $C_0(\mathbb{R})$ statt $C_b(\mathbb{R})$.

Sei

$$A_0 := \{ f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f \text{ stark stetig} \}$$
$$\subset C_0(\mathbb{R})$$

Es gilt (nachrechnen!): A_0 ist abgeschlossene Unteralgebra von $C_0(\mathbb{R})$ (versehen mit sup-Norm)

Da $x \mapsto x^*$ SOT-stetig auf normalen Operatoren ist A_0 $*$-Unteralgebra

Betrachte $g(z) = \dfrac{z}{1+z^2} \Rightarrow g \in C_0(\mathbb{R})$

Beh: $g \in A_0$

Sei $x_\alpha \to x$, alle selbstadjungiert

Dann gilt

$$g(x_\alpha) - g(x) = x_\alpha(1+x_\alpha^2)^{-1} - x(1+x^2)^{-1}$$

$$= (1+x_\alpha^2)^{-1} [x_\alpha(1+x^2) - (1+x_\alpha^2)x] (1+x^2)^{-1}$$

$$= (1+x_\alpha^2)^{-1} [x_\alpha - x + x_\alpha(x-x_\alpha)x] (1+x^2)^{-1}$$

Somit gilt für $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\| g(x_\alpha)\xi - g(x)\xi \| \le \| (1+x_\alpha^2)^{-1}(x_\alpha - x)(1+x^2)^{-1}\xi \|$$

$$+ \| (1+x_\alpha^2)^{-1} x_\alpha (x-x_\alpha) x (1+x^2)^{-1} \xi \|$$

$$\le \underbrace{\| (1+x_\alpha^2)^{-1} \|}_{\le 1} \cdot \underbrace{\| (x_\alpha - x) \underbrace{(1+x^2)^{-1}\xi}_{\in \mathcal{H} \text{ fest}} \|}_{\to 0}$$

$$+ \underbrace{\| (1+x_\alpha^2)^{-1} x_\alpha \|}_{\le 1} \underbrace{\| (x-x_\alpha) \underbrace{x(1+x^2)^{-1}\xi}_{\in \mathcal{H} \text{ fest}} \|}_{\to 0}$$

$\to 0$

d.h. $g(x_\alpha) \xrightarrow{SOT} g(x)$

also $g \in A_0$

Betrachte nun auch $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} \Rightarrow g \in C_0(\mathbb{R})$

analog wie oben: $f \in A_0$

beachte nun: $\{f, g\}$ trennt die Pkte von $\mathbb{R}$ und $f(z)>0$ $\forall z \in \mathbb{R}$

Somit folgt mit Stone-Weierstraß

für $C_0(\mathbb{R})$

$A_0 = C_0(\mathbb{R})$

Betrachte nun $C_b(\mathbb{R})$

Setze $A := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ stark stetig}\}$

beachte: falls $h_1, h_2 \in A$ und ein h_i beschränkt

$\Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in A$

also insbesondere $z \cdot h_2(z) \in A$, falls $h_2 \in A$ beschr.

Sei nun $h \in C_b(\mathbb{R})$

$\Rightarrow hf, hg \in C_0(\mathbb{R})$ (f, g wie oben)

also: $hf, hg \in A$

da $f + zg = 1$ gilt dann

$$h = h(f+zg) = \underbrace{hf}_{\in A} + \underbrace{z\underbrace{hg}_{\in A \text{ und beschränkt}}}_{\in A} \in A$$

$\square$

9.11. <u>Dichtesatz von Kaplansky:</u> Sei $A \subset B(\mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$. Sei $B := \overline{A}^{SOT}$. Dann gilt:

(i) A_{sa} ist stark dicht in B_{sa}.

(ii) $\{x \in A_{sa} \mid \|x\| \leq 1\}$ ist stark dicht in $\{x \in B_{sa} \mid \|x\| \leq 1\}$

(iii) $\{x \in A \mid \|x\| \leq 1\}$ ist stark dicht in $\{x \in B \mid \|x\| \leq 1\}$

<u>Beweis:</u> Wir können direkt zum Normabschluss übergehen und annehmen, dass A eine C^*-Algebra ist.

i) Sei $x \in B_{sa} \Rightarrow \exists$ Netz $(x_\alpha) \subset A$ mit $x_\alpha \xrightarrow{SOT} x \Rightarrow x_\alpha \xrightarrow{WOT} x$

$$\Rightarrow x_\alpha^* \xrightarrow{WOT} x^* = x$$

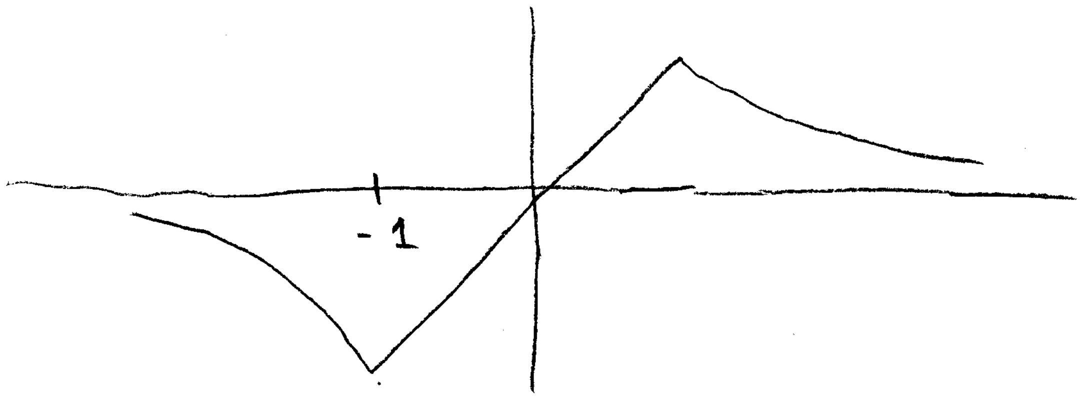
$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Re}(x_\alpha)}_{\in A_{sa}} \xrightarrow{WOT} x$$

$$\Rightarrow x \in \overline{A_{sa}}^{WOT} \underset{\text{da } A_{sa} \text{ konvex}}{=} \overline{A_{sa}}^{SOT}$$

ii) Sei $x \in B_{sa}$ mit $\|x\| \leq 1$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Netz $(x_\alpha) \subset A_{sa}$ mit $x_\alpha \xrightarrow{SOT} x$

Betrachte $f(t) = \begin{cases} t & t \in [-1,1] \\ 1/t & \text{sonst} \end{cases}$



$\Rightarrow f \in C_0(\mathbb{R})$

$\overset{9.10}{\Longrightarrow}$ f stark stetig, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A_{sa} \text{ und} \\ \|f(x_\alpha)\| \leq 1 \\ \text{da } \|f\|_\infty \leq 1}}{f(x_\alpha)} \xrightarrow{SOT} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \sigma(x) \subset [-1,1]}}{=} x$$

iii) Sei $x \in B$ mit $\|x\| \leq 1$

Betrachte

$$y = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \in \underbrace{M_2(B)}_{\text{2x2-Matrizen mit Einträgen von } B}{}_{sa}$$

Es gilt: $M_2(A)$ stark dicht in $M_2(B)$

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \exists (y_\alpha) \subset M_2(A)_{sa}$ mit $y_\alpha \xrightarrow{SOT} y$

$\|y_\alpha\| \leq 1$

$$y_\alpha = \begin{pmatrix} y_\alpha^{11} & y_\alpha^{12} \\ y_\alpha^{21} & y_\alpha^{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{SOT} \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_\alpha^{12} \xrightarrow{SOT} x$

$\|y_\alpha\| \leq 1 \Rightarrow \|y_\alpha^{12}\| \leq 1$

$\square$

9.12. Bemerkung: Im folgenden wollen wir kommutative (= abelsche) vN-Algebren verstehen. Wir schränken uns auf separable vN-Algebren ein. Dies sind $M \subset B(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{H}$ separabel. ($\Leftrightarrow$ M ist separabel in SOT)

9.13. Definition: Sei $M \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra und sei $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$. Wir sagen

ξ ist zyklisch für M, falls $M\xi$ dicht in $\mathcal{H}$

ξ ist separierend für M, falls $x\xi \neq 0 \quad \forall x \in M, x \neq 0$

9.14. Satz: Sei $M \subset B(\mathcal{H})$ vN-Algebra und $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

ξ ist zyklisch für $M \Leftrightarrow \xi$ ist separierend für M'

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" Sei ξ zyklisch für $\mathcal{M}$ und

sei $x\xi = 0$ für $x \in \mathcal{M}'$

$\Rightarrow x a \xi = a \underbrace{x \xi}_{=0} = 0 \quad \forall a \in \mathcal{M}$

Da $\{a\xi \mid a \in \mathcal{M}\}$ dicht in $\mathcal{H}$

$\Rightarrow x\eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow x = 0$

"$\Leftarrow$" Sei ξ separierend für $\mathcal{M}'$ und sei

$\mathcal{M}\xi$ nicht dicht

Betrachte orth. Projektion p auf $\overline{\mathcal{M}\xi}^{\perp}$

$\Rightarrow p \neq 0$, aber $p\xi = 0$

$p \in \mathcal{M}'$

[vgl. Beweis von 9.6 $\square$

<u>9.15. Satz:</u> Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine separable abelsche vN-Algebra.

Dann gibt es einen separierenden Vektor $\xi \in \mathcal{H}$.

<u>Beweis:</u> Zorns Lemma $\Rightarrow \exists$ maximale Familie von

Einheitsvektoren $\{\xi\}_\alpha$ mit $\mathcal{M}\xi_\alpha \perp \mathcal{M}\xi_\beta$ für $\alpha \neq \beta$

$\mathcal{H}$ separabel $\Rightarrow$ Familie abzählbar: $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Maximalität $\Rightarrow \{\mathcal{M}\xi_n\}_n$ dicht in $\mathcal{H}$

Setze p_n = orth. Projektion auf $\overline{\mathcal{M}\xi_n}$

$\Rightarrow p_n \in \mathcal{M}'$ (vgl. 9.6)

Setze $\xi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \xi_n \in \mathcal{H}$ (da $\|\xi_n\| = 1 \; \forall n$)

Beh.: ξ ist separierend für $\mathcal{M}$

denn: Sei $x\xi = 0$ für $x \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \underbrace{p_n x}_{x p_n} \xi = 0 = x \underbrace{p_n \xi}_{\frac{1}{2^n}\xi_n} = \frac{1}{2^n} x \xi_n$$

$$\Rightarrow x\xi_n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow xy\xi_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mathcal{M} \text{ abelsch}}}{=} yx\xi_n = 0 \quad \forall y \in \mathcal{M}$$

$\Rightarrow x = 0$, da $\{y\xi_n \mid y \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{H}$

□

9.16. Definition: Eine abelsche vN-Algebra $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ heißt <u>maximal</u>, falls $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \subset B(\mathcal{H})$ für eine abelsche vN-Algebra impliziert, dass $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0$

9.17. Bemerkung: Dies ist äquivalent zu: $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ (Übungsaufgabe)

9.18. Korollar: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine separable maximale abelsche vN-Algebra. Dann hat $\mathcal{M}$ einen zyklischen Vektor.

__Beweis:__ 9.15 $\Rightarrow$ $\exists$ separierender Vektor ξ für $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$

separierend für $\mathcal{M}'$ $\underset{9.14}{\Longleftrightarrow}$ zyklisch für $\mathcal{M}$ $\square$

__9.19 Beispiel:__ Sei K kompakter Hausdorffraum und μ endliches Borel Maß auf K.

Dann ist $L^2(K,\mu) := \{ f : K \to \mathbb{C}$ meßbar $|$

$$\int |f(t)|^2 \, d\mu(t) < \infty \}$$

ein Hilbertraum.

Betrachte Multiplikationsoperatoren M_f

$M_f \, g := f g$ für $f \in L^\infty(K,\mu)$, $g \in L^2(K,\mu)$

Dann ist

- $A := \{ M_f \mid f \in C(K) \}$ C^*-Algebra
- $A' = \{ M_f \mid f \in L^\infty(K,\mu) \}$ vN-Algebra

$\Big\}$ komm.

- $A'' = A'$, d.h. A' maximal abelsch
- 1 (mit $1(t) = 1$ $\forall t \in K$) ist zyklisch und separierend für A'

$\mathcal{M} = A' \cong L^\infty(K,\mu)$ ist die typische kommutative vN-Algebra.

9.20 Satz: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine separable abelsche vN-Algebra. Dann gibt es einen separablen kompakten Hausdorffraum K und ein endliches Borelmaß μ auf K so dass $\mathcal{M}$ und $L^\infty(K,\mu)$ $*$-isomorph sind.

Beweisskizze: 9.15 $\Rightarrow$ $\exists$ separierenden Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ für $\mathcal{M}$

Schränke Operatoren $x \in \mathcal{M}$ auf $\overline{\mathcal{M}\xi} \subset \mathcal{H}$ ein
$\rightsquigarrow$ $*$-isomorphes Bild von $\mathcal{M}$ und ξ ist zyklischer Vektor
Somit können wir annehmen, dass $\mathcal{M}$ zyklischen Vektor ξ besitzt.

Betrachte separable (in Norm!) C^*-Unteralgebra A von $\mathcal{M}$, welche stark dicht in $\mathcal{M}$ ist.

Sei $K = \Sigma(A) \Rightarrow A \overset{\varphi}{\cong} C(K)$

Betrachte $\tau(f) := \langle \varphi^{-1}(f)\xi, \xi \rangle$

$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Maß μ mit $\tau(f) = \int f \, d\mu$

Beachte: für $x \in A$

$$\|x\xi\|^2 = \langle x\xi, x\xi\rangle = \langle \underbrace{x^*x}_{\varphi^{-1}\circ\varphi(x^*x)}\xi, \xi\rangle$$
$$= \tau(\varphi(x^*x))$$
$$= \int \varphi(x^*)\varphi(x)\, d\mu$$
$$= \int |\varphi(x)|^2 \, d\mu$$

Somit ist $\underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{x\xi}} \mapsto \underset{C(K)}{\underset{\cap}{f(x)}}$ isometrisch und

kann zu unitärer Abb. $\mathcal{H} \mapsto L^2(K, \mu)$ fortgesetzt werden. Dann nachrechnen, dass alles zusammenpasst. $\square$