10. Klassifikation von Faktoren

10.1. Def: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra

1) $Z(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ heißt das Zentrum von $\mathcal{M}$.

2) Ist $Z(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\cdot 1$, so heißt $\mathcal{M}$ Faktor

10.2. Bem: Man kann jede separable vN-Algebra in ein "direktes Integral" von Faktoren zerlegen. Dies ist technisch aufwändig.

10.3. Def.: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra und $e, f \in \mathcal{M}$ Projektionen (d.h. $e^2 = e = e^*$)
Wir sagen $e \sim f$ (äquivalent), falls es eine partielle Isometrie $u \in \mathcal{M}$ gibt mit $u^* u = e$ und $u u^* = f$.

10.4. Bem: 1) Beachte, dass u in $\mathcal{M}$ liegen muß.
Für $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ gilt:

$$e \sim f \iff \dim e\mathcal{H} = \dim f$$

2) Sei $(e_i)_{i\in I}$ Familie paarweise orthogonaler Projektionen in $B(\mathcal{H})$. Dann konvergiert $\sum_{i\in I} e_i$ in der SOT gegen eine Projektion $e = \sum_{i\in I} e_i$

<u>10.5. Satz:</u> Seien $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$ Familien jeweils paarweise orthogonaler Projektionen in einer vN-Algebra $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$, und sei $e = \sum e_i$ und $f = \sum f_i$. Dann gilt:

$$e_i \sim f_i \;\forall i \in I \implies \sum_{i\in I} e_i \sim \sum_{i\in I} f_i$$

<u>Beweis:</u> Sei $u_i \in \mathcal{M}$ mit $u_i^* u_i = e_i$, $u_i u_i^* = f_i$

Definiere u durch
$$u|e_i\mathcal{H} = u_i$$
$$u|(\oplus e_i\mathcal{H})^\perp = 0$$

Dann ist $u^*u = e$ und $uu^* = f$
und $u \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ (nachrechnen!) $\square$

<u>10.6. Def:</u> Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra und $e, f \in \mathcal{M}$ Projektionen. Wir sagen, e wird von f <u>majorisiert</u>, $e \prec f$, falls es eine Projektion $g \in \mathcal{M}$ gibt mit $e \sim g \leq f$

<u>10.7. Bem:</u> Beachte, dass für Projektionen $g \leq f$ äquivalent ist zu $fg = gf = g$

denn: Sei $g \leq f$, also $0 \leq g \leq f \leq 1$; daraus folgt
($\Rightarrow$)
$$g = g^3 \leq gfg \leq g1g = g$$
$$\implies \qquad \text{"="}$$
also $gfg = g \Rightarrow \underbrace{g(1-f)g}_{= g(1-f)(1-f)g} = 0 \Rightarrow (1-f)g = 0$ $\square$

<u>10.8. Bem.:</u> 1) $\prec$ ist reflexiv, d.h. $e \prec e$, und transitiv, d.h. $e_1 \prec e_2,\ e_2 \prec e_3 \Rightarrow e_1 \prec e_3$

2) Für Familien von paarweise orth. Projektionen gilt:

$$e_i \prec f_i \ \forall i \Rightarrow \sum e_i \prec \sum f_i$$

<u>10.9. Satz:</u> Sei M vN-Algebra und $e, f \in M$ in Projektionen. Dann gilt

$$e \sim f \Leftrightarrow e \prec f \text{ und } f \prec e$$

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" klar, da $e \sim f \leq f$

"$\Leftarrow$" (analog zu Bernstein-Schröder Thm) □

<u>10.10. Satz:</u> Sei M eine vN-Algebra und $x \in M$.

Dann ist $\operatorname{supp} x \sim \operatorname{supp} x^*$, wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} x &:= \text{Projektion auf } \overline{\operatorname{Bild}(x^*)} \\ &= \text{Projektion auf } (\ker x)^\perp \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u> Sei $x = u|x|$ Polarzerlegung von x, also $u \in M$ (vgl. 9.9.)

Dann ist $u^*u = \operatorname{supp} x$ und $uu^* = \operatorname{supp} x^*$

nachrechnen! □

<u>10.11. Lemma:</u> Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ ein Faktor und $e, f \in \mathcal{M}$ Projektionen mit $e \neq 0 \neq f$. Dann existieren $e_1, f_1 \neq 0$ mit:
$e_1 \leq e$, $f_1 \leq f$ und $e_1 \sim f_1$.

<u>Beweis:</u> Es gilt $f\mathcal{M}e \neq 0$

(denn: $K := \overline{\mathcal{M}e\mathcal{H}}$ inv. unter $\mathcal{M}$

$\Rightarrow p = \operatorname{Proj}(K) \in \mathcal{M}'$

weiterhin: $xK \subset K \quad \forall x \in \mathcal{M}'$

d.h. $px = xp$ — " —

$\Rightarrow p \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$

$\Rightarrow p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C} \cdot 1$

$\Rightarrow p = 0$ oder $p = 1$

Da $K \neq \{0\} \Rightarrow p \neq 0$

$\Rightarrow p = 1$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{M}e\mathcal{H}} = \mathcal{H}$

$\Rightarrow f\overline{\mathcal{M}e\mathcal{H}} \neq 0$

$\Rightarrow f\mathcal{M}e \neq 0$)

$\Rightarrow \exists z \in \mathcal{M}$ mit $x := fze \neq 0$

Es gilt $fx = x$ und $xe = x$

$x^* f = x^*$ $\qquad$ $x(1-e) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{supp} x^* \leq f$ $\quad$ und $\operatorname{supp} x^* \sim \operatorname{supp} x$ $\quad$ $\Rightarrow \operatorname{supp} x \leq e$ $\qquad \square$

10.12. Satz: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ ein Faktor und $e, f \in \mathcal{M}$ Projektionen. Dann ist $e \prec f$ oder $f \prec e$.

Beweis: Betrachte paarweise orth. Familien $((e_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$ mit $e_i \leq e$, $f_i \leq f$, $e_i \sim f_i$

Induktiv geordnet durch Induktion

$\underset{\text{Zorn}}{\Rightarrow}$ $\exists$ max. Familie $((e_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$

Dann ist $\sum_i e_i =: e' \leq e$, $\sum_i f_i =: f' \leq f$

und $e' \sim f'$ (nach 10.5)

Beh: $e' = e$ oder $f' = f$

denn: Sei $e - e' \neq 0$ und $f - f' \neq 0$

$\Rightarrow \exists \underset{\neq 0}{g} \leq e - e'$, $\underset{\neq 0}{h} \leq f - f'$ mit $g \sim h$

Dann ist aber $((e_i)_{i\in I} \cup \{g\}, (f_i)_{i\in I} \cup \{h\})$ eine echt größere Familie $\leadsto$ Wdsp

also: $e = e' \sim f' \leq f$ oder $f = f' \sim e' \leq e$

$\Downarrow$ $e \prec f$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ $f \prec e$

$\square$

<u>10.13. Def.</u>: Sei $\mathcal{M}$ vN-Algebra. Eine Projektion $0 \neq e \in \mathcal{M}$ heißt <u>minimal</u>, falls

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{M} \text{ Proj} \\ f \leq e \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0 \text{ oder } f = e$$

<u>10.14. Bem.</u>: 1) e minimal $\Leftrightarrow$ $e\mathcal{M}e = \mathbb{C}e$ (vgl. 7.10)

2) Für $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ gilt:

$$e \text{ minimal} \Leftrightarrow \dim e\mathcal{H} = 1$$

<u>10.14. Def</u>: Sei $\mathcal{M}$ vN-Algebra. Eine Projektion $e \in \mathcal{M}$ heißt <u>endlich</u>, falls

$$e \sim f \leq e \Rightarrow f = e$$

<u>10.15. Bem.</u>: 1) $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$; dann gilt

$$e \text{ endlich} \Leftrightarrow \dim e\mathcal{H} < \infty$$

2) e minimal $\Rightarrow$ e endlich

denn: Sei e minimal und $e \sim f \leq e$

$\Rightarrow f = e$ oder $f = 0$

$\quad \llcorner\!\!\Rightarrow e = 0$

<u>10.16. Def.</u>: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ ein Faktor.

$\mathcal{M}$ heißt von Typ I $:\Leftrightarrow$ $\exists$ minimale Projektion in $\mathcal{M}$

— " — II $:\Leftrightarrow$ $\exists$ endliche — " —, aber keine minimale

— " — III $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ enthält keine endliche Projektion

(Murray + von Neumann ~ 1930's)

10.17. Bem: 1) $\mathcal{M}$ von Typ I $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \cong B(\mathcal{H}_1)$ für ein $\mathcal{H}_1$

2) Typ II und III sind viel interessantere Objekte; ihre Existenz ist nicht apriori klar.

3) Typ II zerfällt weiter in 2 Unterfälle

II_1 : $\mathbb{1}$ ist endliche Projektion

II_∞ : $\mathbb{1}$ ist nicht endlich, aber es gibt endliche Projektion

4) Typ II_1 kann auch dadurch charakterisiert werden, dass $\overbrace{\text{es eine}}^{\text{nicht Typ I ist und es}}$ (eindeutige) Spur darauf gibt, d.h. ein Zustand $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, für den gilt $\tau(xy) = \tau(yx) \quad \forall x, y \in \mathcal{M}$

5) Typ III galt zu von Neumanns Zeiten als nicht behandelbar, aber Tomita-Takesaki Theory und Arbeiten von Connes etc. haben dies behoben. Insbesondere gibt es gemäß Connes eine weitere Zerlegung von Typ III in Fälle

III_λ mit $\lambda \in [0, 1]$