11. Beispiele für von Neumann Algebren

Im folgenden ist Γ eine diskrete Gruppe.

Dann ist

$$\ell^2(\Gamma) := \{ \xi : \Gamma \to \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \Gamma} |\xi(x)|^2 \}$$

ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{x \in \Gamma} \xi(x) \overline{\eta(x)}$$

11.1. Definition: 1) Die <u>linksreguläre Darstellung</u> von Γ ist gegeben durch

$$\lambda : \Gamma \to B(\ell^2(\Gamma))$$
$$g \mapsto \lambda_g \quad \text{mit} \quad (\lambda_g \xi)(x) = \xi(g^{-1}x).$$

2) Die <u>rechtsreguläre Darstellung</u> von Γ ist gegeben durch

$$\rho : \Gamma \to B(\ell^2(\Gamma))$$
$$g \mapsto \rho_g \quad \text{mit} \quad (\rho_g \xi)(x) = \xi(xg)$$

11.2. Bemerkungen: 1) Sei $\delta_g \in \ell^2(\Gamma)$ (für $g \in \Gamma$) geg. durch

$$\delta_g(x) := \begin{cases} 1 & x = g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist $\xi = \sum_{x \in \Gamma} \xi(x)\, \delta_x$

und λ_g und ρ_g sind gegeben durch stetige lineare Ausdehnung von $\lambda_g \delta_x = \delta_{gx}$ und $\rho_g \delta_x = \delta_{xg^{-1}}$

2) Wegen $\lambda_g \lambda_{g^{-1}} = 1 = \lambda_{g^{-1}} \lambda_g$
sind alle λ_g (und ebenso alle ρ_g) unitäre Operatoren auf $\ell^2(\Gamma)$.

<u>11.3. Definition</u>: 1) Die <u>Faltung</u> $\xi * \eta$ für $\xi, \eta \in \ell^2(\Gamma)$ ist gegeben durch

$$(\xi * \eta)(x) := \sum_{g \in \Gamma} \xi(g)\eta(g^{-1}x) = \sum_{g \in \Gamma} \xi(xg^{-1})\eta(g)$$

2) Für $\xi \in \ell^2(\Gamma)$ setzen wir

$$D_\xi := \{\eta \in \ell^2(\Gamma) \mid \xi * \eta \in \ell^2(\Gamma)\}$$

und den Faltungsoperator

$$L_\xi : D_\xi \to \ell^2(\Gamma), \quad L_\xi \eta = \xi * \eta$$

Analog

$$D'_\xi := \{\eta \in \ell^2(\Gamma) \mid \eta * \xi \in \ell^2(\Gamma)\}$$

$$R_\xi : D'_\xi \to \ell^2(\Gamma), \quad R_\xi \eta = \eta * \xi$$

<u>11.4. Lemma</u>: Die Operatoren L_ξ und R_ξ haben für jedes $\xi \in \ell^2(\Gamma)$ abgeschlossenen Graphen in $\ell^2(\Gamma) \oplus \ell^2(\Gamma)$. Also gilt insbesondere:
Falls $D_\xi = \ell^2(\Gamma)$ (d.h. $\xi * \ell^2(\Gamma) \subset \ell^2(\Gamma)$), dann ist $L_\xi \in B(\ell^2(\Gamma))$.
Analog für R_ξ.

Beweis: Sei $(\eta_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\ell^2(\Gamma)$ mit $\eta_n \to \eta \in \ell^2(\Gamma)$ und $L_\xi \eta_n \to \zeta \in \ell^2(\Gamma)$.

Dann gilt für $x \in \Gamma$:

$$|\zeta(x) - \xi * \eta(x)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|\xi * \eta_n(x) - \xi * \eta(x)|}$$

$$= |\xi * (\eta_n - \eta)(x)|$$

$$\leq \|\xi\|_2 \cdot \|\eta_n - \eta\|_2 \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\to 0$$

$\Rightarrow \zeta(x) = \xi * \eta(x) \quad \forall x \in \Gamma$

$\Rightarrow \xi * \eta = \zeta \in \ell^2(\Gamma)$

$\Rightarrow \eta \in D_\xi$ und $L_\xi \eta = \zeta$. $\square$

11.5 Definition: Ein Vektor $\xi \in \ell^2(\Gamma)$ heißt

- Links-Faltungsoperator, falls $\xi * \ell^2(\Gamma) \subset \ell^2(\Gamma)$
- Rechts-Faltungsoperator, falls $\ell^2(\Gamma) * \xi \subset \ell^2(\Gamma)$

Somit ist dann $L_\xi \in B(\ell^2(\Gamma))$ bzw. $R_\xi \in B(\ell^2(\Gamma))$.

Wir setzen

$L(\Gamma) = \{ L_\xi \mid \xi \in \ell^2(\Gamma)$ ist Links-Faltungsop.$\} \subset B(\ell^2(\Gamma))$

$R(\Gamma) = \{ R_\xi \mid$ — " — Rechts- — " — $\} \subset B(\ell^2(\Gamma))$

11.6. Bemerkungen: 1) Beachte, dass δ_g Links-Faltungsop. ist für alle $g \in \Gamma$. Wir haben

$$\delta_g * \xi = \lambda_g \xi \quad , \quad \text{also} \quad L_{\delta_g} = \lambda_g$$

und analog

$$\xi * \delta_g = \rho_{g^{-1}} \xi \quad , \quad \text{also} \quad R_{\delta_{g^{-1}}} = \rho_g$$

2) Für $\xi \in \ell^2(\Gamma)$ setze $\overline{\xi} \in \ell^2(\Gamma)$ gemäß

$$\overline{\xi}(x) := \overline{\xi(x^{-1})}$$

Es gilt: ξ Links-Faltungsop. $\Rightarrow$ $\overline{\xi}$ Links-Faltungsop. und $L_{\overline{\xi}} = L_\xi^*$

Faltung assoziativ $\Rightarrow$ $L_{\xi * \eta} = L_\xi L_\eta$

$\Rightarrow$ $L(\Gamma)$ und $R(\Gamma)$ sind unitale $*$-Unteralgebren von $B(\ell^2(\Gamma))$.

Wir zeigen: Sie sind vN-Algebren und kommutanten voneinander.

11.7. Satz: Sei Γ eine diskrete Gruppe. Dann sind $L(\Gamma)$ und $R(\Gamma)$ von Neumann Algebren und es gilt:

$$L(\Gamma) = R(\Gamma)' = \rho(\Gamma)'$$

$$R(\Gamma) = L(\Gamma)' = \lambda(\Gamma)'$$

und somit

$$\rho(\Gamma)'' = L(\Gamma)' = R(\Gamma)$$

$$\lambda(\Gamma)'' = R(\Gamma)' = L(\Gamma)$$

<u>11.8. Def.</u>: $L(\Gamma)$ heißt die <u>(linke) Gruppen-vN-Algebra</u> von Γ; $R(\Gamma)$ ist die <u>rechte Gruppen-vN-Algebra</u> von Γ.

<u>Beweis von 11.7.</u>: Wir brauchen nur

(i) $L(\Gamma) = R(\Gamma)' = \rho(\Gamma)'$

zu zeigen.

(ii) $R(\Gamma) = L(\Gamma)' = \lambda(\Gamma)'$

folgt genauso. Aus (i) und (ii) folgt

$L(\Gamma) = R(\Gamma)' = L(\Gamma)''$

somit ist $L(\Gamma)$ nach Bikommutantentheorem eine vN-Algebra.

Die Inklusionen $L(\Gamma) \subset R(\Gamma)' \subset \rho(\Gamma)'$ sind klar

da $\rho(\Gamma) \subset R(\Gamma)$

somit bleibt für (i) nur zu zeigen: $\rho(\Gamma)' \subset L(\Gamma)$

Sei $T \in \rho(\Gamma)'$ und setze $\xi = T\delta_e$ (e neutrales Element von Γ)

Dann folgt für alle $g \in \Gamma$:

$$\xi * \delta_g = \rho_{g^{-1}}\xi = \underbrace{\rho_{g^{-1}} T}_{T\rho_{g^{-1}}}\delta_e = T\delta_g$$

$\overset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow}$ $\xi * \eta = T\eta \qquad \forall \eta \in \operatorname{span}\{\delta_g \mid g \in \Gamma\}$

$\Rightarrow$ ξ Links-Faltungsop. und $T = L_\xi \in L(\Gamma)$

11.9 Satz: Sei Γ eine diskrete Gruppe. Dann definiert $\tau(x) := \langle x\delta_e, \delta_e\rangle$ eine treue Spur auf $L(\Gamma)$; insbesondere ist $L(\Gamma)$ eine endliche vN-Algebra.

Beweis: Sei $\tau(x^*x) = 0$ für $x = L_\xi$.

Dann ist
$$\begin{aligned}\|\xi\|^2 &= \|L_\xi \delta_e\|^2 \\ &= \langle L_\xi \delta_e, L_\xi \delta_e\rangle \\ &= \langle L_\xi^* L_\xi \delta_e, \delta_e\rangle \\ &= \tau(x^*x) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi = 0$

$\Rightarrow x = 0$, d.h. τ ist treu.

Wegen Stetigkeit reicht es Spureigenschaft auf schwach dichter Unteralgebra zu zeigen.

$\rightsquigarrow$ genügt z.z.: $\tau(\lambda_g \lambda_h) = \tau(\lambda_h \lambda_g)$

es gilt:
$$\begin{aligned}\tau(\lambda_g\lambda_h) &= \langle \lambda_g \lambda_h \delta_e, \delta_e\rangle \\ &= \langle \delta_h, \delta_{g^{-1}}\rangle \\ &= \begin{cases} 1 & g = h \\ 0 & g \neq h\end{cases} \\ &= \langle \delta_g, \delta_{h^{-1}}\rangle \\ &= \tau(\lambda_h\lambda_g)\end{aligned}$$

<u>11.10 Satz:</u> Sei Γ eine diskrete Gruppe. $L(\Gamma)$ ist genau dann ein Faktor, wenn Γ i.c.c. (infinite conjugacy classes) ist, d.h. wenn jede nicht triviale Konjugationsklasse ($h \neq e$) $\{ghg^{-1} \mid g \in \Gamma\}$ unendlich ist.

<u>Beweis:</u> i) Sei Γ nicht i.c.c., d.h. $\exists\, h \neq e$ mit

$h^\Gamma := \{ghg^{-1} \mid g \in \Gamma\}$ endlich

Sei $x := \sum_{k \in h^\Gamma} \lambda_k \in L(\Gamma)$

Beachte: $g h^\Gamma g^{-1} = h^\Gamma \quad \forall g \in \Gamma$

$\Rightarrow \lambda_g x \lambda_{g^{-1}} = x$

d.h. $\lambda_g x = x \lambda_g \quad \forall g \in \Gamma$

$\Rightarrow x \in L(\Gamma)'$

$\Rightarrow x \in L(\Gamma) \cap L(\Gamma)' = Z(L(\Gamma))$

und $x \notin \mathbb{C} \cdot 1$

da $\{\lambda_g\}_{g \in \Gamma}$ linear unabhängig

$\Rightarrow Z(L(\Gamma))$ nicht trivial

d.h. $L(\Gamma)$ ist kein Faktor

ii) Sei Γ i.c.c.

Sei $x \in Z(L(\Gamma))$

$x \in L(\Gamma) \Rightarrow x = L_\xi$ für $\xi = \sum_g \alpha_g \delta_g \in \ell^2(\Gamma)$

$x \in L(\Gamma)' \Rightarrow x = \lambda_h x \lambda_h^* \quad \forall h \in \Gamma$

$$= L_{\delta_h * \xi * \delta_{h^{-1}}}$$

$\Rightarrow \xi = \delta_h * \xi * \delta_{h^{-1}} \quad \forall h \in \Gamma$

$$= \sum_g \alpha_g \delta_{hgh^{-1}}$$

$\Rightarrow \alpha_k = \xi(k) = \sum_g \alpha_g \delta_{hgh^{-1}}(k) = \alpha_{h k h^{-1}}$

$\Rightarrow \alpha$ ist konstant auf jeder Konjugationsklasse, d. h. $\alpha \equiv 0$ auf den nicht-trivialen Konjugationsklassen (da $\xi \in \ell^2(\Gamma)$)

$\Rightarrow \xi = \alpha_e \delta_e$

$\Rightarrow x = \alpha_e \cdot 1 \in \mathbb{C} \cdot 1$

□

<u>11.11. Korollar:</u> Sei Γ eine nicht-triviale diskrete i.c.c. Gruppe. Dann ist $L(\Gamma)$ ein II_1-Faktor.

<u>Beweis:</u> Da $|\Gamma| = \infty$ (weil i.c.c), und die $\{\lambda_g \mid g \in \Gamma\}$ linear unabhängig, ist $L(\Gamma)$ unendlich-dimensional. Nach 11.9 und 11.10 ist es endlich und Faktor $\Rightarrow$ II_1-Faktor □

11.12. <u>Beispiele</u>: 1) Betrachte

$\Gamma = S_\infty = \bigcup_{n\geq 1} S_n$ (Permutationen von $\mathbb{N}$, die nur endlich viele Pkte bewegen)

Γ ist i.c.c.: Sei $\sigma \in S_\infty$, $\sigma \neq id$

$\Rightarrow \exists\, i \neq j : \sigma(i) = j$

Betrachte nun $\pi_r = (i, r)$ Transposition

$r > j$
$\Rightarrow \pi_r \sigma \pi_r (r) = j$ $\qquad$ $\hookrightarrow \pi_r = \pi_r^{-1}$

d.h. alle $\pi_r \sigma \pi_r^{-1}$ sind verschieden

Somit ist $L(S_\infty)$ ein II_1-Faktor.

Dies ist der sogenannte <u>hyperfinite</u> II_1-Faktor R, der durch folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt ist: $R = \overline{\bigcup_n A_n}^{WOT}$,

wobei $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von endlich-dim. vN-Algebren ist.

Wähle hier $A_n = L(S_n) \subset L(S_\infty)$

R ist der "kleinste" und "schönste" II_1-Faktor.

2) Betrachte $\Gamma = \mathbb{F}_n$

$\mathbb{F}_n$ = freie Gruppe mit n Generatoren

$\mathbb{F}_n$ ist für $n \geq 2$ i.c.c.

$L(\mathbb{F}_n)$ ist ein <u>freier Gruppenfaktor</u>

Murray und von Neumann haben gezeigt:

$$L(\mathbb{F}_n) \not\cong R$$

(daru haben sie "Eigenschaft Γ" eingeführt)

Es ist immer noch ein offenes Problem, ob

$$L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_m) \quad \text{für } n \neq m, \; n,m \geq 2 \quad ?$$