§8 Die (irrationale) Rotationsalgebra A_ϑ

8.1 <u>Def</u>: Die <u>Rotationsalgebra</u> A_ϑ ist als universelle C^*-Algebra definiert: $A_\vartheta := C^*(u,v \text{ unitär} \mid uv = e^{2\pi i\vartheta} vu)$ wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$. Wir schreiben oft abkürzend $\lambda := e^{2\pi i\vartheta} \in \mathbb{C}$. Ist $\vartheta \notin \mathbb{Q}$, so heißt A_ϑ <u>irrationale</u> Rotationsalgebra, andernfalls rationale Rotationsalgebra.

8.2 <u>Bemerkung</u>: Da die irrationalen Rotationsalgebren sehr viel schönere Eigenschaften haben als die rationale, wird meistens nur erstere behandelt in der Literatur und es wird bloß von Rotationsalgebren gesprochen, ohne $\vartheta \notin \mathbb{Q}$ zu spezifizieren.

8.3 <u>Bemerkung</u>: Ist $\vartheta = 0$, so ist A_ϑ kommutativ und es gilt $A_{\vartheta=0} = C(\mathbb{T}^2)$, wobei $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ der 2-Torus ist.

Deshalb heißt A_ϑ auch „nichtkommutativer Torus" und ist gewissermaßen ein vorsichtiger Schritt ins Nichtkommutative, da sich viele Konzepte von $C(\mathbb{T}^2)$ auf A_ϑ übertragen lassen.

<u>Beweis</u>: Betrachte $\tilde{u}(x,y) := x$ und $\tilde{v}(x,y) := y$ in $C(\mathbb{T}^2)$. Dann sind $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ unitär und erzeugen $C(\mathbb{T}^2)$ nach Stone-Weierstraß. Also ex. $A_{\vartheta=0} \twoheadrightarrow C(\mathbb{T}^2)$. Nach dem Gelfandisomorphismus ist $A_{\vartheta=0} \cong C(\operatorname{Spec} A_{\vartheta=0})$ und $\operatorname{Spec} A_{\vartheta=0} \cong \mathbb{T}^2$ (homöomorph), da jeder Charakter $\varphi \in \operatorname{Spec} A_{\vartheta=0}$ schon durch $\varphi(u)$ und $\varphi(v) \in S^1$ festgelegt ist. (vgl. 7.3)

(„$A_\vartheta = C(\mathbb{T}^2_{\text{nichtkom.}})$")

8.4 <u>Prop.:</u> A_θ ist auf $L^2(S^1)$ darstellbar:

$\tilde{u}: L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, $(\tilde{u}f)(t) := f(\lambda t)$ $\forall f \in L^2(S^1), t \in S^1$

$\tilde{v}: L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, $(\tilde{v}f)(t) := t f(t)$ $\forall f \in L^2(S^1), t \in S^1$

Dann sind $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{L}(L^2(S^1))$ unitär mit $\tilde{u}\tilde{v} = \lambda \tilde{v}\tilde{u}$, also

ex. $A_\theta \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(S^1))$ mit $u \mapsto \tilde{u}$, $v \mapsto \tilde{v}$.

(Oft wird die Rotationsalgebra auch so eingeführt.)

⌜<u>Bew.:</u> $\tilde{u}^*$ ist der Form $(\tilde{u}^* f)(t) = f(\bar{\lambda} t)$, denn

$(\tilde{u}^* f | g) = (f | \tilde{u} g) = \int_{S^1} f(t) \overline{\tilde{u}g(t)}\, dt = \int_{S^1} f(t) g(\lambda t)\, dt = \int_{S^1} f(\bar{\lambda} t) g(t)\, dt$.

Dann $(\tilde{u}^*(\tilde{u} f))(t) = (\tilde{u} f)(\bar{\lambda} t) = f(\lambda(\bar{\lambda} t)) = f(t)$, d.h. $\tilde{u}^*\tilde{u} = 1 = \tilde{u}\tilde{u}^*$.

$\tilde{v}^*$ ist der Form $(\tilde{v}^* f)(t) = \bar{t} f(t)$. $\left((f | \tilde{v} g) = \int_{S^1} f(t) \bar{t} \overline{g(t)}\, dt \right)$

Also $(\tilde{v}^*(\tilde{v} f))(t) = \bar{t}(\tilde{v} f)(t) = \bar{t} t f(t) = f(t)$, also $\tilde{v}^*\tilde{v} = 1 = \tilde{v}\tilde{v}^*$.

Und $(\tilde{u}(\tilde{v} f))(t) = (\tilde{v} f)(\lambda t) = \lambda t f(\lambda t)$ $\overset{\forall t \forall f}{\Longrightarrow}$ $\tilde{u}\tilde{v} = \lambda \tilde{v}\tilde{u}$

$(\tilde{v}(\tilde{u} f))(t) = t(\tilde{u} f)(t) = t f(\lambda t)$

⌞

8.5 <u>Prop.:</u> A_θ ist wie folgt darstellbar: Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $S \in \mathcal{L}(H)$ der bilaterale Shift, gegeben durch $S e_n = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $d(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ gegeben durch $d(\lambda) e_n := \lambda^n e_n$.
Dann sind S und $d(\lambda)$ unitär und $d(\lambda) S = \lambda S d(\lambda)$.

(Mit der ONB $e_n = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ auf $L^2(S^1)$ ist $\tilde{u} \leftrightarrow d(\lambda)$, $\tilde{v} \leftrightarrow S$.)

⌜<u>Bew.:</u> S ist unitär mit $S^* e_n = e_{n-1}$, $d(\lambda)$ ebenso mit $d(\lambda)^* = d(\bar{\lambda})$.

Dann $d(\lambda) S e_n = d(\lambda) e_{n+1} = \lambda^{n+1} e_{n+1} = \lambda S d(\lambda) e_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

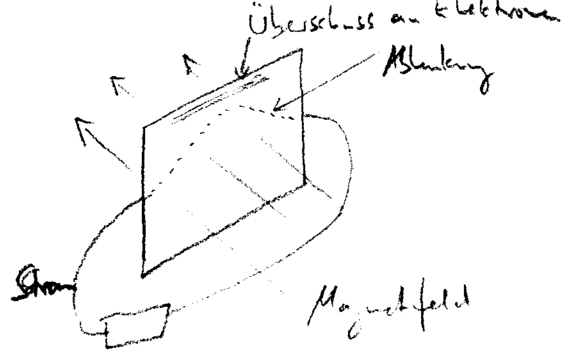
(Vgl. auch im Beweis von 7.12)
⌞

8.6 <u>Bemerkung:</u> Prop. 8.4 und Prop 8.5 zeigen, dass A_θ „existiert", d.h. die Relationen von A_θ definieren keine triviale C^*-Algebra. (Wie z.B. $C^*(u \text{ unitär} \mid u^2 = 0) = 0$, da $u = uuu^* = 0$)

8.7 Werbung (s. Gracia-Bondia et al, Vorwort zu Kapitel 12):

- Die nichtkommutativen Tori sind erste Beispiele von nichtkommutativen Riemannschen Flächen / nicht-kommutativen Mannigfaltigkeiten.
- Eine solche nichtkommutative (Differential-) Geometrie zu verstehen wäre sehr nützlich für die Beziehungen zur Physik, z.B. um das Higgs-Teilchen besser zu beschreiben. Zitat: „At a deep and perhaps fundamental level, quantum field theory and noncommutative geometry are made of the same stuff." (Gr.-B., S.522)
- Nichtkommutative Tori werden als Modelle in verschiedenen physikalischen Theorien benutzt, so z.B. in der Superstringtheorie, in der Fermionenfeldtheorie, in der Raum-Zeit-Geometrie oder um den Quanten-Hall-Effekt zu beschreiben:

Hall-Effekt (1880):
Edwin



Eine der ersten Hinweise auf Existenz von Elektronen mit Ladung
(Entdeckung der Elektronen: 1897 Joseph Thomson)

Quanten-Hall-Effekt:
(Klaus von Klitzing 1980, hierfür Nobelpreis)
(1985)

Bei sehr tiefen Temperaturen (1°K) und starken Magnetfeldern steigt die Spannung nicht linear sondern in Stufen an (Quantisierung). Die magnetische Ablenkung wird durch zwei Unitäre u und v mit $uv = e^{2\pi i\theta} vu$ beschrieben.
Connes lieferte die Techniken für diese Beschreibung und bekam u.a. dafür die Fields-Medaille (1982).

Quellen:
- Alain Connes, Noncommutative Geometry, Chapter 4.6
- Bellissard, van Elst, Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect
- Gracia-Bondia, Várilly, Figueroa, Elements of Noncommutative Geometry, Kapitel 12 Quellenangabe → [334], [497]

Sind die Darstellungen aus 8.4 und 8.5 isomorph? Sind sie isomorph zu A_ϑ? Zeige nun, dass A_ϑ einfach ist, d.h. alle Antworten sind „ja".

8.8 Definition: Sei A eine unitale C^*-Algebra.

- Ist $B \subseteq A$ eine C^*-Unteralgebra mit $1 \in B$, so ist $\varphi: A \to B \subseteq A$ eine (bedingte) Erwartung auf B, falls φ positiv, linear und unital ist, mit $\varphi^2 = \varphi$.
  φ ist treu, falls $a \geq 0, \varphi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.
- $\tau: A \to \mathbb{C}$ ist eine (normalisierte) Spur, falls τ positiv, linear ist, mit $\|\tau\| = 1$ und $\tau(ab) = \tau(ba)$ $\forall a, b \in A$.
  τ ist treu, falls $a \geq 0, \tau(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.

8.9 Prop.: (ϑ irrational) (a) Für $\zeta, \mu \in S^1$ ist $\rho_{\zeta,\mu}: A_\vartheta \to A_\vartheta$, gegeben durch $\rho_{\zeta,\mu}(u) = \zeta u$, $\rho_{\zeta,\mu}(v) = \mu v$ ein Automorphismus.

(b) Die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2: A_\vartheta \to A_\vartheta$, gegeben durch

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(x)\,dt \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t},1}(x)\,dt$$

sind kontrahierende, treue Erwartungen mit $\varphi_1(A_\vartheta) = C^*(u) \subseteq A_\vartheta$, ($\|\varphi_j\| \leq 1$)

$\varphi_2(A_\vartheta) = C^*(v) \subseteq A_\vartheta$ und $\varphi_1|_{C^*(u)} = id_{C^*(u)}$, $\varphi_2|_{C^*(v)} = id_{C^*(v)}$.

Außerdem gilt $\varphi_1\left(\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{kl} u^k v^l\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k0} u^k$, $\varphi_2\left(\sum_{k,l} a_{kl} u^k v^l\right) = \sum_l a_{0l} v^l$

dies gilt nicht für $\vartheta \in \mathbb{Q}$. $\longrightarrow$ sowie $\varphi_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j x u^{-j}$, $\varphi_2(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} v^j x v^{-j}$ $\forall x \in A_\vartheta$.

($u^{-k} := u^{*k}$ für $k \in \mathbb{N}$)

Sei beispielsweise $\vartheta = \frac{p}{q}$. Dann ist $\varphi_1(v^q) = 0$ aber

$$\frac{1}{2n+1} \sum_j u^j v^q u^{-j} = \Big(\frac{1}{2n+1} \sum_j \underbrace{\lambda^{qj}}_{=1}\Big) v^q = v^q$$

Beweis: (a) ζu, μv sind unitär ∧ $(\zeta u)(\mu v) = \lambda(\mu v)(\zeta u)$,
also ex. $\varrho_{\zeta,\mu}$ nach der univ. Eig. und $\varrho_{\zeta,\mu}\circ\varrho_{\bar\zeta,\bar\mu} = \varrho_{\bar\zeta,\bar\mu}\circ\varrho_{\zeta,\mu} = \mathrm{id}_{A_\theta}$.

(b) Für $x\in A_\theta$ ist $f_x: \mathbb{T}^2 \to A_\theta$, $(\zeta,\mu)\mapsto \varrho_{\zeta,\mu}(x)$ normstetig.

(denn für $x=\sum_{k,l=-n}^{n} a_{kl}u^kv^l$ ist $\|f_x(\zeta_1,\mu_1)-f_x(\zeta_2,\mu_2)\| \le \underbrace{\sum_{k,l=-n}^{n} |\zeta_1^k\mu_1^l - \zeta_2^k\mu_2^l|\,|a_{kl}|}_{\to 0 \text{ für } (\zeta_1,\mu_1)\to(\zeta_2,\mu_2)}$)

Also ist auch $g_x:[0,1]\to A_\theta$, $t\mapsto f_x(1,e^{2\pi i t})$ normstetig,

d.h. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g_x(t_j) \to \int_0^1 g_x(t)\,dt = \varphi_1(x)$ ex. als Limes von Riemannsummen. (für $0=t_1<t_2<\dots<t_n=1$)

Aus $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varrho_{1,e^{2\pi i t_j}}(x)\to\varphi_1(x)$ folgt außerdem, dass

φ_1 kontrahierend, $\left(\|\varphi_1(x)\|\leftarrow \frac{1}{n}\|\sum\varrho_{1,e^{2\pi i t_j}}(x)\| \le \frac{1}{n}\sum\|\varrho_{1,e^{2\pi i t_j}}(x)\| = \|x\|\right)$

positiv, ($x\ge 0 \Rightarrow \varrho_{1,e^{2\pi i t}}(x)\ge 0$ $\forall x\,\forall t$, $\varphi_1(x)$ also Limes von pos. El.)

linear, unital ($\varrho_{1,e^{2\pi i t}}(1)=1$ $\forall t$) und treu ist.

$\varphi_1(u^kv^l) \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varrho_{1,e^{2\pi i t_j}}(u^kv^l) = u^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varrho_{1,e^{2\pi i t_j}}(v^l)\right) \to u^k\varphi_1(v^l)$

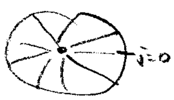
und $\varphi_1(v^l)=\int_0^1 \varrho_{1,e^{2\pi i t}}(v^l)\,dt = \int_0^1 e^{2\pi i t l}v^l\,dt = \int_0^1 e^{2\pi i t l}\,dt\, v^l = \delta_{0l}$.

Somit $\varphi_1|_{C^*(u)} = \mathrm{id}_{C^*(u)}$, $\varphi_1(A_\theta)=C^*(u)\subseteq A_\theta$ und $\varphi_1^2=\varphi_1$

$\left(\varphi_1\underbrace{\varphi_1(x)}_{\in C^*(u)} = \mathrm{id}_{C^*(u)}\varphi_1(x)=\varphi_1(x)\quad \forall x\in A_\theta\right)$.

Schlussfolgerung: $\lim \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^j(u^kv^l)u^{-j} = \lim\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^{j+k}\lambda^{jl}u^{-j}v^l$

$=\left(\lim\frac{1}{2n+1}\underbrace{\sum_j \lambda^{jl}}_{\to\delta_{0l}}\right)u^kv^l$



$\zeta_n=\lambda^l$, $l\neq 0$.

$= \varphi_1(u^kv^l)$

$$\sum_{j=-n}^{n}\lambda^j = \frac{\lambda^{n+1}-1}{1-\lambda} - 1 + \frac{\lambda^{-n}-\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda^{-n}-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

beschränkt durch $\frac{2}{|1-\lambda|}$

24.1.2012

(ϑ irrational)

8.10 Korollar: $\tau := \varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 : A_\vartheta \to \mathbb{C}$ ist eine unitale treue Spur mit $\tau(\sum a_{kl} u^k v^l) = a_{00}$ (Null-nulltes Fourierkoeff.)

Bew: $\varphi_1\varphi_2(u^k v^l) = \delta_{k0}\varphi_1(v^l) = \delta_{k0}\delta_{l0} = \varphi_2\varphi_1(u^k v^l)$ $\forall k,l \in \mathbb{Z}$

Also ist τ wohldef., linear, positiv, $\tau(1) = 1$, τ treu.

Außerdem $\tau((u^k v^l)(u^m v^n)) = \bar{\lambda}^{lm}\tau(u^{m+k} v^{l+n}) = \delta_{m+k,0}\,\delta_{l+n,0}\,\bar{\lambda}^{lm}$

und $\tau((u^m v^n)(u^k v^l)) = \bar{\lambda}^{nk}\delta_{m+k,0}\,\delta_{l+n,0}$ $\quad \overset{=}{\uparrow}$

($m+k = l+n = 0 \Rightarrow (k+m)n = 0$ und $l = -n$, also $nk = -mn = lm$)

8.11 Bem.: τ ist die eindeutige unitale Spur auf A_ϑ, ϑ irrational.

Bew: Sei τ' weitere unitale Spur auf A_ϑ. Dann

$$\tau'(x) \underset{\tau'(u^j x u^{-j}) = \tau'(x)}{=} \lim \tau'\Big(\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^j x u^{-j}\Big) = \tau'(\varphi_1(x)),$$ ebenso $\tau'(x) = \tau'(\varphi_2(x))$

Also $\tau'(x) = \tau'(\varphi_1\varphi_2(x)) = \tau'(\tau(x)) = \tau(x)\tau'(1) = \tau(x)$ $\forall x \in A_\vartheta$

8.12 Satz: A_ϑ ist einfach, ϑ irrational.

Bew: Sei $0 \neq I \lhd A_\vartheta$ ein Ideal in A_ϑ. Also ex. $0 \neq x \in I$, d.h. $0 \neq x^*x \in I$. Dann ist $0 \neq \varphi_1(x^*x) = \lim \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^j x^*x u^{-j} \in I$

Ebenso $0 \neq \varphi_2(x^*x) \in I$. Dann $0 \neq \tau(x^*x) = \varphi_1\underbrace{\varphi_2(x^*x)}_{\in I} \in I$, andererseits $\tau(x^*x) \in \mathbb{C}\cdot 1$, also $1 \in I$, d.h. $I = A_\vartheta$.

8.13 Frage: Sind die A_ϑ isomorph für verschiedene $\vartheta \in \mathbb{R}$?

Klar: $\vartheta' = \pm\vartheta \mod \mathbb{Z} \Rightarrow A_{\vartheta'} \cong A_\vartheta$

$e^{2\pi i\vartheta} = e^{2\pi i(\vartheta+n)}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ und $A_\vartheta \cong A_{-\vartheta}$ per $u \leftrightarrow v$, $v \leftrightarrow u$

(und der universellen Eig.)

Man kann sehen, dass auch „$\Leftarrow$" gilt (z.B. mit K-Theorie).
Hierfür wichtig: Bild der Projektionen unter der Spur τ.

Noch in den 60ern war nicht klar, ob A_ϑ projektionslos ist oder nicht, d.h. ob nichttriviale Projektionen in A_ϑ existieren.
Zum Vergleich: $C(\mathbb{T}^2)$ ist projektionslos, da $\mathbb{T}^2$ zusammenhängend ist.

Kaplansky fragte 1958 nach einem Beispiel einer einfachen, unitalen, projektionslosen C^*-Algebra. Das erste Beispiel hierfür konnte erst 1981 von Blackadar geliefert werden (etwas später, 1982, zeigten Pimsner und Voiculescu ein zweites, natürlicheres Beispiel, nämlich $C^*_r(F_2)$, unter Benutzung von K-Theorie).
1981 zeigte Rieffel, dass A_ϑ nicht projektionslos ist. Diese sogenannten Powers-Rieffel-Projektionen helfen bei der Frage 8.13.

8.14 Proposition: Zu jedem $\alpha \in (\mathbb{Z}+\vartheta\mathbb{Z})\cap[0,1]$ existiert eine Projektion $p_\alpha \in A_\vartheta$ mit $\tau(p_\alpha)=\alpha$, ϑ irrational.

Beweis: O.E. $\vartheta\in(0,\frac{1}{2})$. Da A_ϑ einfach ist, ist A_ϑ isomorph zu $C^*(\tilde{u},\tilde{v})\subseteq \mathcal{B}(L^2(S^1))$ von 8.4. Ist $f\in \mathcal{C}(S^1)$, so ist der Multiplikationsoperator $M_f\in \mathcal{B}(L^2(S^1))$ gegeben durch $M_f g = fg$ für $g\in L^2(S^1)$. Dann gilt $M_f\in C^*(\tilde{u},\tilde{v})$ $\forall f\in \mathcal{C}(S^1)$ und $\tau(M_f)=\int_{S^1} f(t)\,dt$ (wobei dt das auf S^1 normierte Lebesguemaß ist).
Für $z(t)=t$ ist $M_z=\tilde{v}\in C^*(\tilde{u},\tilde{v})$. Da $M_fM_g=M_{fg}$, $M_f+M_g=M_{f+g}$, $M_f^*=M_{\bar{f}}$ und $\lambda M_f=M_{\lambda f}$, ist also auch $M_f\in C^*(\tilde{u},\tilde{v})$ für jedes Polynom $f=\sum_{-n}^{n} a_j z^j\in \mathcal{C}(S^1)$, also für alle $f\in \mathcal{C}(S^1)$. Somit kann die Spur aus 8.10 auf M_f angewandt werden und es gilt für Polynome f: $\tau(M_f)=\tau\left(\sum_{j=-n}^{n} a_j v^j\right)=a_0=\sum_{j=-n}^{n} a_j\underbrace{\int_{S^1} z(t)^j\,dt}_{=\delta_{0j}} = \int_{S^1} f(t)\,dt$

Idee: Finde Projektion $p=M_f$ mit $\tau(p)=\int f(t)\,dt=\alpha$.
Problem: p Projektion $\Leftrightarrow$ f Projektion, aber $\mathcal{C}(S^1)$ ist projektionslos.
($M_f^2=M_f \Leftrightarrow M_{f^2}=M_f \Leftrightarrow f^2=f$ ...)

Lösung: Finde Projektion $p=M_g\tilde{u} + M_f + M_h\tilde{u}^*\in C^*(\tilde{u},\tilde{v})\cong A_\vartheta$ mit $\tau(p)\underset{\uparrow}{=}\tau(M_f)=\int_{S^1}f(t)\,dt=\alpha$.

$\left(\tau(M_g\tilde{u})=\tau\left(\sum a_j v^j u\right)\underset{8.10}{=}0 \text{ für } g \text{ Polynom, also für alle } g\in \mathcal{C}(S^1)\right)$

Aus $p=p^*$ folgt dann $M_g\tilde u + M_f + M_h\tilde u^* = M_{\tilde u_{\bar h}}\tilde u + M_{\bar f} + M_{\tilde u^*_{\bar g}}\tilde u^*$

[$\tilde u M_g = M_{\tilde u_g}\tilde u$, da $(\tilde u M_g)f = \tilde u(gf)$ und somit $(\tilde u M_g)f(t) = g(\lambda t)f(\lambda t)$
während $(M_{\tilde u_g}\tilde u)f(t) = M_{\tilde u_g}(\tilde u f)(t) = (\tilde u_g)(\tilde u f)(t) =$
und $\tilde u^* M_g = M_{\tilde u^*_g}\tilde u^*$. Also $(M_g\tilde u)^* = \tilde u^* M_g^* = \tilde u^* M_{\bar g} = M_{\tilde u^*_{\bar g}}\tilde u^*$
]

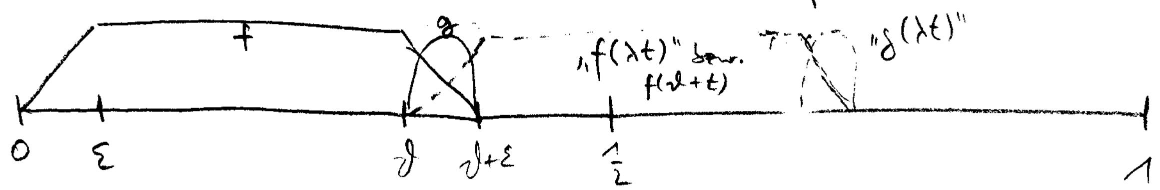
Koeff.vgl. $\Longrightarrow$ $h = \tilde u^*\bar g$ und f reellwertig.

Aus $p=p^2$ folgt $M_g\tilde u + M_f + M_{\tilde u^*\bar g}\tilde u^* = M_{g\tilde u_g}\tilde u^2 + M_{fg+g\tilde u f}\tilde u$

$$+ M_{\tilde u^*\bar g\tilde u^* g + g\bar g + f^2} + M_{\tilde u^*\bar g\tilde u^* f + f\tilde u^*\bar g}\tilde u^* + M_{\tilde u^*\bar g\tilde u^{*2} g}\tilde u^{*2}$$

Koeff.vgl. $\Longrightarrow$ $g\tilde u_g(t) = g(t)g(\lambda t) = 0$, $g(t)(1-f(t)-f(\lambda t)) = 0$,
$f(t)-f(t)^2 = |g(t)|^2 + |g(\bar\lambda t)|^2$

Für $\varepsilon>0$, so dass $\vartheta+\varepsilon<\frac12$ und unter der Transformation $[0,1]\to S^1$
ist



eine Lösung mit $\tau(p)=\vartheta$.
Ist nun $\alpha\in\mathbb Z+\vartheta\mathbb Z\cap[0,1]$, also $\alpha = k+\vartheta l$, so ist
$A_\alpha\hookrightarrow A_\vartheta$ per $u\mapsto u$, $v\mapsto v^l$ und in A_α ex. p_α mit $\tau^{(\alpha)}(p_\alpha)=\alpha$.
Aber $\tau^{(\vartheta)}|_{A_\alpha}$ ist eine Spur auf A_α, nach 8.11 also $\tau^{(\vartheta)}(p_\alpha) = \tau^{(\alpha)}(p_\alpha)=\alpha$
für $p_\alpha\in A_\alpha\subseteq A_\vartheta$.
]

8.15 Bemerkung: Haben gezeigt: $\tau(\text{Proj. in } A_\vartheta)\supseteq\mathbb Z+\vartheta\mathbb Z\cap[0,1]$.
Man kann sogar „=" zeigen (aufwändig).
Also $\vartheta' = \pm\vartheta \mod \mathbb Z \iff A_{\vartheta'}\cong A_\vartheta$

[Bew: „⟹" s. 8.13 „⟸" Sei $\varphi: A_{\vartheta'}\xrightarrow{\cong} A_\vartheta$, $p\in A_{\vartheta'}$ mit $\tau^{(\vartheta')}(p)=\vartheta'$.
Dann $\tau^{(\vartheta)}\circ\varphi = \tau^{(\vartheta')}$ nach 8.11, also $\vartheta' = \tau^{(\vartheta)}(\varphi(p))\in\tau^{(\vartheta)}(\text{Proj. in } A_\vartheta) = \mathbb Z+\vartheta\mathbb Z\cap[0,1]$
d.h. $\vartheta' = \pm\vartheta \mod \mathbb Z$.
]