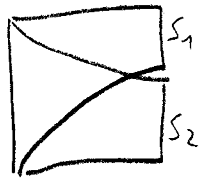
§9 Die Cuntzalgebra $\mathcal{O}_n$

9.1 Def.: Die <u>Cuntzalgebra</u> $\mathcal{O}_n$ ist für $2 \le n < \infty$ definiert als $\mathcal{O}_n := C^*(s_1, \dots, s_n \text{ Isometrien} \mid \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1)$

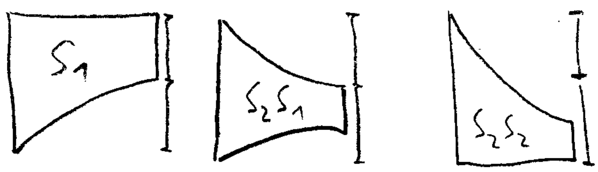
(Es gibt auch $\mathcal{O}_\infty := C^*(s_1, s_2, \dots \text{ Isometrien} \mid \sum_{i=1}^{N} s_i s_i^* \le 1 \ \forall N)$
$= C^*(s_1, s_2, \dots \text{ Isometrien} \mid s_i^* s_j = \delta_{ij})$)

9.2 Bemerkung: (a) $\mathcal{O}_n$ ist gewissermaßen die Struktur, einen Raum in n Kopien zu zerlegen:



$\mathcal{O}_2$

Bzw. in $m \ge n$ Kopien:



($s_1, s_2 s_1, s_2 s_2$ sind Isometrien mit $s_1 s_1^* + (s_2 s_1)(s_2 s_1)^* + (s_2 s_2)(s_2 s_2)^* = 1$)

(b) Die 1977 von Cuntz eingeführten Cuntzalgebren $\mathcal{O}_n$ sind erstens ein wichtiges Beispiel von C^*-Algebren, bzw. Gegenbeispiel (zu mehreren damaligen Fragen), zweitens sind sie jedoch strukturell so wichtig, dass sie sogar zu Bausteinen der Theorie der C^*-Algebren geworden sind. So gibt es z.B. Sätze à la

„A separable C^*-Alg. A ist exakt $\Leftrightarrow A \hookrightarrow \mathcal{O}_2$"
„$A \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow A$ unital, einfach, separabel, nuklear"
„A sep., nuklear $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty \Leftrightarrow A$ ist rein unendlich"
Kirchberg-Phillips

(c) $\mathcal{O}_n$ hat außergewöhnlich schöne Eigenschaften. Eine davon („rein unendlich"), die „einfach" impliziert, werden wir hier erarbeiten.

Zunächst studieren wir die algebraische Struktur der Wörter auf $\mathcal{O}_n$.

9.3 Definition: Ein Wort in $\mathcal{O}_n$ ist $S_\mu := S_{i_1} \cdots S_{i_k}$, wobei $\mu = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. $|\mu| = k$ bezeichnet die Länge des Wortes S_μ, μ heißt Multiindex.

9.4 Lemma: (a) $S_i^* S_j = \delta_{ij} 1$

(b) $|\mu| = |\nu|$, dann $S_\mu^* S_\nu = \delta_{\mu\nu} 1$

(c) $|\mu| < |\nu|$, dann $S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\nu'} & \text{falls } \nu = \mu\nu' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$|\mu| > |\nu|$, dann $S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\mu'}^* & \text{falls } \mu = \nu\mu' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

⌜**Bew:** (a) $i = j$: S_i ist Isometrie, also $S_i^* S_i = 1$

$i \neq j$: $S_i S_i^* + S_j S_j^* \leq \sum_{k=1}^n S_k S_k^* = 1$

$\Rightarrow S_i^* (S_i S_i^* + S_j S_j^*) S_i \leq S_i^* S_i = 1$

$\quad \| \quad 1 + S_i^* S_j S_j^* S_i$

$\Rightarrow S_i^* S_j S_j^* S_i \geq 0$ und $S_i^* S_j S_j^* S_i \leq 0$, also „$=0$".

$\Rightarrow \| S_j^* S_i \|^2 = \| (S_j^* S_i)^* (S_j^* S_i) \| = 0$

(b) $S_\mu^* S_\nu = S_{\mu_k}^* \cdots S_{\mu_1}^* S_{\nu_1} \cdots S_{\nu_k} \overset{(a)}{=} \delta_{\mu_1\nu_1} \cdots \delta_{\mu_k\nu_k} = \delta_{\mu\nu}$

(c) $S_\mu^* S_\nu = (S_{\mu_k}^* \cdots S_{\mu_1}^* S_{\nu_1} \cdots S_{\nu_k}) S_{\nu_{k+1}} \cdots S_{\nu_\ell} \overset{(b)}{=} \delta_{\mu\nu''} S_{\nu'}$, $\nu' = (\nu_{k+1}, \dots, \nu_\ell)$, $\nu'' = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ ⌟

9.5 Prop.: (a) $\mathcal{F}_k^n := \operatorname{Span}\{S_\mu S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k\} \cong M_{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$

(b) $\operatorname{Span}\{S_\mu S_\nu^* \mid \mu, \nu \text{ beliebig}\} \subseteq \mathcal{O}_n$ dicht

⌜**Bew:** (a) Setze $e_{\mu\nu} := S_\mu S_\nu^* \in \mathcal{F}_n^k$. Dann $e_{\mu\nu}^* = e_{\nu\mu}$ und

$e_{\mu\nu} e_{\varrho\sigma} = S_\mu S_\nu^* S_\varrho S_\sigma^* = \delta_{\nu\varrho} e_{\mu\sigma}$ nach 9.4(b).

Da $\{\mu \in \{1, \dots, n\}^k\}$ genau n^k Elemente hat, ex.

$M_{n^k} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_n^k$ nach 7.6 und ist ein Isomorphismus nach 7.7.

(Beachte: $\mathcal{F}_k^n = C^*(S_\mu S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k) \subseteq \mathcal{O}_n$, ist also C^*-Algebra.)

(b) Die Monome in $\mathcal{O}_n$ sind genau der Form $S_\mu S_\nu^*$ nach 9.4 ⌟

9.56 Lemma: (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $\sum_{\substack{\delta \text{ Multiindex} \\ \text{mit } |\delta| = k}} S_\delta S_\delta^* = 1$

(b) Für $l \leq k$ ist $\mathcal{F}_l^n \subseteq \mathcal{F}_k^n$

Beweis: (a) $\sum_{|\delta|=k} S_\delta S_\delta^* = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \sum_{i_k=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_k} S_{i_k}^* S_{i_{k-1}}^* \dots S_{i_1}^*$

$\left(\sum_{i_k=1}^n S_{i_k} S_{i_k}^* = 1 \right) \longrightarrow = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n S_{i_1} \dots S_{i_{k-1}} S_{i_{k-1}}^* \dots S_{i_1}^*$

$= \dots = \sum_{i_1=1}^n S_{i_1} S_{i_1}^* = 1$

(b) Sei $S_\mu S_\nu^* \in \mathcal{F}_l^n$, $|\mu| = |\nu| = l$. Dann ist

$S_\mu S_\nu^* = \sum_{\delta, |\delta| = k-l} S_\mu S_\delta S_\delta^* S_\nu^*$ und $S_\mu S_\delta S_\delta^* S_\nu^* \in \mathcal{F}_k^n$

31.1.2012

9.6 Lemma: Seien μ und ν Multiindizes mit $|\mu| \neq |\nu|$ und $|\mu|, |\nu| \leq k$. Dann ist $S_\gamma^*(S_\mu S_\nu^*)S_\gamma = 0$ für $S_\gamma = S_1^k S_2$.

Bew: $S_\gamma^* S_\mu = S_2^* \underbrace{S_1^* \cdots S_1^*}_{k-|\mu|} \underbrace{S_1^* \cdots S_1^*}_{|\mu|} S_\mu \overset{9.4}{=} \delta_{\mu,(1,\dots,1)} S_2^* S_1^{*\,k-|\mu|}$

$S_\nu^* S_\gamma = S_\nu^* \underbrace{S_1 \cdots S_1}_{|\nu|} \underbrace{S_1 \cdots S_1}_{k-|\nu|} S_2 \overset{9.4}{=} \delta_{\nu,(1,\dots)} S_1^{k-|\nu|} S_2$

$\Rightarrow S_\gamma^*(S_\mu S_\nu^*)S_\gamma = \delta_{\mu,(1,\dots,1)} \delta_{\nu,(1,\dots,1)} S_2^* S_1^{*\,k-|\mu|} S_1^{k-|\nu|} S_2$

$= \delta_{\mu,(1,\dots)} \delta_{\nu,(1,\dots,1)} S_2^* S_1^a S_2$ mit $a = |\mu| - |\nu| \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$= 0$

9.7 Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ex. eine Isometrie $w \in \mathcal{O}_n$, so dass

(i) $wx = xw \quad \forall x \in \mathcal{F}_k^n$

(ii) $w^* S_\mu S_\nu^* w = \begin{cases} S_\mu S_\nu^* & \text{falls } |\mu| = |\nu| \\ 0 & \text{falls } |\mu| \neq |\nu| \end{cases} \quad \forall |\mu|, |\nu| \leq k$

Bew: Setze $w := \sum_{\delta \text{ mit } |\delta| = k} S_\delta S_\gamma S_\delta^*$, wenn $S_\gamma := S_1^{2k} S_2$.

Dann $w^* w = \sum_{\substack{\delta, \varepsilon \text{ mit} \\ |\delta| = |\varepsilon| = k}} S_\delta S_\gamma^* \underbrace{S_\delta^* S_\varepsilon}_{= \delta_{\delta\varepsilon}} S_\gamma S_\varepsilon^* = \sum_{\delta, |\delta| = k} S_\delta \underbrace{S_\gamma^* S_\gamma}_{= 1} S_\delta^* \underset{9.5b}{=} 1$

$= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n S_{i_1} \cdots S_{i_k} S_{i_k}^* \cdots S_{i_1}^*$

$\left(\sum_{i_k=1}^n S_{i_k} S_{i_k}^* = 1\right) \Rightarrow \; = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n S_{i_1} \cdots S_{i_{k-1}} S_{i_{k-1}}^* \cdots S_{i_1}^*$

$= \dots = \sum_{i_1=1}^n S_{i_1} S_{i_1}^* = 1$

(i) Sei $x = S_\mu S_\nu^*$, $|\mu| = |\nu| = k$: Dann

$w S_\mu = \sum_{\delta, |\delta| = k} S_\delta S_\gamma \underbrace{S_\delta^* S_\mu}_{= \delta_{\delta\mu}} = S_\mu S_\gamma$, $\quad S_\nu^* w = \sum_{\delta, |\delta| = k} \underbrace{S_\nu^* S_\delta}_{= \delta_{\nu\delta}} S_\gamma S_\delta^* = S_\gamma S_\nu^*$

Also $w S_\mu S_\nu^* = S_\mu S_\gamma S_\nu^* = S_\mu S_\nu^* w$.

(ii) Seien $|\mu|, |\nu| \le k$.

1\. Fall: $|\mu|=|\nu|=k$. Dann $w^* S_\mu S_\nu^* w \overset{(i)}{=} w^* w S_\mu S_\nu^* = S_\mu S_\nu^*$

2\. Fall: $\underbrace{|\mu|=|\nu|}_{=:l}<k$. Dann $S_\mu S_\nu^* = \sum_{\varepsilon,\, |\varepsilon|=k-l} S_\mu S_\varepsilon S_\varepsilon^* S_\nu^*$, da $\sum_{\varepsilon,\, |\varepsilon|=k-l} S_\varepsilon S_\varepsilon^* \overset{9.5b}{=} 1$ ...

Aber $S_\mu S_\varepsilon S_\varepsilon^* S_\nu^* \in \mathcal{F}_k^n$, also $w^* S_\mu S_\nu^* w = S_\mu S_\nu^*$ nach 1. Fall.

3\. Fall: $|\mu| \neq |\nu|$. Dann $w^* S_\mu S_\nu^* w = \sum_{\substack{\varepsilon,\delta \\ \text{mit } |\varepsilon|=|\delta|=k}} S_\delta S_\gamma^* \underbrace{S_\delta^* S_\mu S_\nu^* S_\varepsilon}_{=0 \text{ nach } 9.6} S_\gamma S_\varepsilon^* = 0$.

(denn $S_\delta^* S_\mu S_\nu^* S_\varepsilon \overset{9.4}{=} S_{\mu'} S_{\nu'}^*$ mit $|\mu'|,|\nu'| \le k$, $|\mu'| \neq |\nu'|$)

∎

9.8 Prop.: Es gibt eine treue Erwartung $\varphi: \mathcal{O}_n \to \mathcal{F}^n$

mit $\varphi(S_\mu S_\nu^*) = \begin{cases} S_\mu S_\nu^* & \text{falls } |\mu|=|\nu| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

wobei $\mathcal{F}^n := \overline{\mathrm{span}}\{\mathcal{F}_k^n \mid k \in \mathbb{N}\} = \overline{\mathrm{span}}\{S_\mu S_\nu^* \mid |\mu|=|\nu|\}$.

Bew: Für $\zeta \in S^1$ ist $\rho_\zeta : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ gegeben durch $\rho_\zeta(S_i) = \zeta S_i$ ein Automorphismus. (ρ_ζ ex. nach der univ. Eig., $\rho_\zeta \circ \rho_{\bar\zeta} = \rho_{\bar\zeta} \circ \rho_\zeta = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_n}$)

Für $x \in \mathcal{O}_n$ ist $f_x : S^1 \to S^1$, $\zeta \mapsto \rho_\zeta(x)$ normstetig.

(s. 8.9 und benutze $\rho_\zeta(S_\mu S_\nu^*) = \zeta^{|\mu|-|\nu|} S_\mu S_\nu^*$)

Also ex. $\varphi(x) = \int_0^1 f_x(e^{2\pi i t})\,dt = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t}}(x)\,dt \longleftarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f_x(e^{2\pi i t_j})$ (s. 8.9)

$\frac{1}{n}\sum \rho_{e^{2\pi i t_j}}(x)$

und ist positiv, linear, unital und treu.

Außerdem $\varphi(S_\mu S_\nu^*) = \left(\int_0^1 e^{2\pi i t(|\mu|-|\nu|)}\,dt\right) S_\mu S_\nu^* = \delta_{|\mu|,|\nu|} S_\mu S_\nu^*$.

Also gilt auch $\varphi^2 = \varphi$.

∎

Die Erwartung aus 9.8 kann lokal sogar algebraisch beschrieben werden. Das ist eine starke Eigenschaft, die schon bei A_θ zum Beweis der Einfachheit geführt hat.

9.9 Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \operatorname{span}\{S_\mu S_\nu^* \mid |\mu|, |\nu| \leq k\}$ gilt dann $\varphi(x) = w^* x w \in \mathcal{F}_k^n$ für w aus 9.7.

⌜Bew: $|\mu|, |\nu| \leq k$. Dann $\varphi(S_\mu S_\nu^*) \underset{9.8}{=} \begin{cases} S_\mu S_\nu^* & \text{falls } |\mu| = |\nu| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \underset{9.7}{=} w^*(S_\mu S_\nu^*) w \in \mathcal{F}^n_{|\mu|}$

⌞ und $\mathcal{F}^n_\ell \subseteq \mathcal{F}^n_k$, $\ell \leq k$, s. 9.5b.

9.10 Definition: Sei A eine unitale C^*-Algebra. A heißt *rein unendlich* (purely infinite), falls es zu jedem $0 \neq x \in A$ Elemente $a, b \in A$ gibt, so dass $axb = 1$.

9.11 Bemerkung: (a) A rein unendlich $\Rightarrow$ A ist einfach

(Sei $0 \neq I \triangleleft A$, also ex. $0 \neq x \in I$. Dann aber $1 = axb \in I$)

(b) Der Begriff „rein unendlich" kommt aus der Theorie der Von-Neumann-Algebren und besagt: Eine vN-Algebra M ist rein unendlich bzw. Typ III, falls M keine endlichen Projektionen besitzt (p endl., falls $p \sim q \leq p \Rightarrow p = q$).
Typ III-von-Neumann-Algebren sind Bausteine in der Theorie der Von-Neumann-Algebren.

($B \subseteq A$ hereditär, falls $0 \leq a \leq b$, $b \in B \Rightarrow a \in B$)

Für einfache C^*-Algebren A ist äquivalent:
A ist rein unendlich $\Longleftrightarrow$ Jede hereditäre C^*-Unteralgebra von A besitzt eine unendliche Projektion.

Sei nun A rein unendlich. Angenommen A besitzt eine endliche Projektion p. Dann ist $pAp \subseteq A$ hereditär und besitzt eine unendliche Projektion $q \in pAp$, d.h. $q \leq p$ $\Rightarrow$ p kann nicht endlich sein.

9.12 Satz: $\mathcal{O}_n$ ist rein unendlich für $2 \le n < \infty$ (und $n = \infty$).

Bew: Sei $0 \neq x \in \mathcal{O}_n$, dann ist $x^*x \gneq 0$ und also $\varphi(x^*x) \gneq 0$. o.E. $\|\varphi(x^*x)\| = 1$. Nach 9.5(b) ex. $y \in \operatorname{span}\{S_\mu S_\nu^* \mid \mu, \nu \text{ bel.}\}$ mit $y = y^*$ und $\|x^*x - y\| < \frac{1}{4}$

(a priori $y \neq y^*$, aber mit $y' := \frac{y+y^*}{2}$ ist $\|x^*x - y'\| \le \frac{1}{2}\|x^*x - y\| + \frac{1}{2}\|x^*x - y^*\| < \frac{1}{4}$)

Also gilt $\|\varphi(y)\| > \frac{3}{4}$. ($1 = \|\varphi(x^*x)\| \le \|\varphi(x^*x - y)\| + \|\varphi(y)\| < \frac{1}{4} + \|\varphi(y)\|$)

Sei k die maximale Länge der μ_i und ν_i aus $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i S_{\mu_i} S_{\nu_i}^*$.

$\overset{9.9}{\Longrightarrow} \exists w \in \mathcal{O}_n$ Isometrie mit $w^* y w = \varphi(y)$.

Da nun $\varphi(y) \in \mathcal{F}_k^n \cong M_{n^k}$, fasse $\varphi(y)$ als Matrix auf.

Da $\varphi(y)$ selbstadjungiert ist, ist $\varphi(y)$ diagonalisierbar und es gibt eine eindimensionale Projektion $e \in \mathcal{F}_k^n$ mit

$e\varphi(y) = \varphi(y)e = \|\varphi(y)\|e$ (genauer gesagt: $e\varphi(y) = \pm\|\varphi(y)\|e$)

($\exists v$ unitär: $v\varphi(y)v^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, also mit $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$v\varphi(y)v^* p_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 p_1 = p_1 v \varphi(y) v^*$, d.h. mit $e := v^* p_1 v$

gilt $\varphi(y)(v^* p_1 v) = \lambda_1 (v^* p_1 v) = (v^* p_1 v)\varphi(y)$)

(benutze auch 3.4(a) und 2.9 für $\|\varphi(y)\|$ = größter Eigenwert von $\varphi(y)$)

Es gibt ein Unitäres $u \in \mathcal{F}_k^n$, dass die Projektion e zu $S_1^k S_1^{*k}$ transformiert (dies entspricht $e_{11} \in M_{n^k}$), also

$ueu^* = S_1^k S_1^{*k}$.

Setze $z := \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} S_1^{*k} u e w^* \in \mathcal{O}_n$. Dann gilt:

$\|z\| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\|z\| = \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\|S_1^{*k} u e w^*\|}_{\le 1 \text{ da } \|S_1\|, \|u\|, \|e\|, \|w\| \le 1} \le \|\varphi(y)\|^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$)

$$zyz^* = 1 \quad \Big(zyz^* = \|\varphi(y)\|^{-1} S_1^{*k} \underbrace{u \underbrace{e \underbrace{w^* y w}_{=\varphi(y)} e}_{=\|\varphi(y)\| e} u^*}_{=\|\varphi(y)\| S_1^k S_1^{*k}} S_1^k = 1 \Big)$$

zx^*xz^* ist invertierbar $\Big(\|1 - zx^*xz^*\| = \|z(y - x^*x)z^*\|$
$\le \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} < 1, \quad 2.4 \Big)$

Setze dann $a := b^*x^*$, $b := z^*(zx^*xz^*)^{-\frac{1}{2}}$.

Also $axb = b^*x^*xb = (zx^*xz^*)^{-\frac{1}{2}} zx^*xz^*(zx^*xz^*)^{-\frac{1}{2}} = 1$.

(falls $e\varphi(y) = -\|\varphi(y)\|e$, so ist $zyz^* = -1$, also ist $-zx^*xz^*$ invertierbar $\Rightarrow zx^*xz$ invertierbar)

Idee:
- Sei $0 \neq x \in \mathcal{O}_n$
- dann $x^*x \gneq 0$
- wähle $y = y^*$ im Span von $S_\mu S_\nu^*$ in der Nähe von x^*x
- Zeige nun $\exists z: zyz^* = 1$. Das überträgt sich zwar nicht ganz auf x^*x, aber immerhin so, dass zx^*xz^* invertierbar ist. Hierfür muss z eine kontrollierte Norm haben.

Kernstück:
- Dieses y ist per $\varphi(y)$ eine Matrix, die sich per $e\varphi(y)e$ zu $\|\varphi(y)\|e$ kleinschneiden und per S_1^{k*} zu 1 wieder aufblähen lässt.
($\varphi(y) \in M_{n^k} \rightsquigarrow e\varphi(y)e \approx \begin{pmatrix} \|\varphi(y)\| & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \approx \|\varphi(y)\| S_1^k S_1^{*k}$)
- Andererseits ist $\varphi(y)$ als algebraische Operation (also mit Elementen in $\mathcal{O}_n$) darstellbar: $\varphi(y) = w^*yw$.
- Somit können obige Transformationen von y mit Elementen aus $\mathcal{O}_n$ (!) durchgeführt werden, d.h. $\exists z: zyz^* = 1$

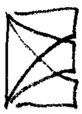
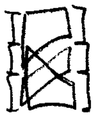
- Definiere dann a und b wie oben, so dass $axb = 1$

9.13 Bemerkung: (a) $\mathcal{O}_n$ ist auch noch „nuklear". Für diese C^*-Algebren funktioniert die Invariante der K-Theorie besonders gut. $\mathcal{O}_n$ ist sogar eine „Kirchbergalgebra" (separabel (s), unital (u), rein unendlich (pi), nuklear (n) = pi-sun), für diese gilt, dass sie schon komplett durch ihre K-Gruppen klassifiziert sind.

(b) Es gibt viele Verallgemeinerungen von Cuntzalgebren, z.B. Cuntz-Krieger-Algebren $\mathcal{O}_A$, $A \in M_{I\times I}(\{0,1\})$

$$\mathcal{O}_A := C^*\left(S_i \text{ partielle Isometrie}, i\in I \;\middle|\; \begin{array}{l} S_i^*S_j = 0 \text{ für } i\neq j \\ S_i^*S_i = \sum a_{ij} S_jS_j^* \quad \forall i \end{array}\right)$$

wobei A eine $I\times I$-Matrix mit $a_{ij}\in\{0,1\}$ ist.

Idee: $\mathcal{O}_n$:  $\mathcal{O}_A$:  mit Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

bzw. Graph 

oder Cuntz-Pimsner-Algebren $\mathcal{O}_E$, E rechter Hilbert A-Modul.

($A = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \mathcal{O}_n$)

(c) Gilt $\mathcal{O}_n \cong \mathcal{O}_m$ für $n\neq m$? Antwort: nein, es gilt $n\neq m \Rightarrow \mathcal{O}_n \not\cong \mathcal{O}_m$. Z.B. mit K-Theorie (oder mit Ext-Theorie).