Zwischenfazit: Unterschiede zwischen Von-Neumann- und C^*-Algebren

- vNAlg. sind größer: (a) Sei $F := \{ x_{\xi,\eta} \mid \xi,\eta \in H \} \subseteq B(H)$ die Menge der Rang-1-Operatoren $x_{\xi,\eta}\, \zeta := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$.

$$\underset{\{\text{alle Operatoren endl. Rangs}\}}{\overset{}{{}^*\text{-}Alg(F)}} \subsetneq \underset{K(H)}{C^*(F)} \subsetneq \underset{B(H)}{W^*(F)} \subseteq B(H)$$

(b) $S: H \to H$, $Se_n = e_{n+1}$ Shift, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ONB.

$$K(H) \subsetneq C^*(S) \subsetneq \underset{B(H)}{W^*(S)} \subseteq B(H)$$

- vNAlg. sind häufiger isomorph: (a) $C^*(F) \subsetneq C^*(S)$, „=" für W^*

  (b) $A \cong B$ als C^*-Alg. $\Rightarrow A'' \cong B''$, aber „$\not\Leftarrow$" i.A.

  (c) oft ist unbekannt, ob $M_1 \cong M_2$ für vNAlg., z.B. $LF_n \cong LF_m$? $n \neq m$

  (Für „kanonische" analoge Unter-C^*-Alg. gilt „$\not\cong$")

- C^*-Algebren haben eine axiomatische Definition (Banachalgebra $\wedge$ Involution, C^*-Bed. etc), sie können also abstrakt betrachtet werden. Von-N.-Alg. sind immer konkret ($M \subseteq B(H)$), zumindest wenn man unter „axiomatischer Definition" etwas einigermaßen Hübsches versteht.

  Das erlaubt es uns sogar, recht abstrakte, „pure" C^*-Algebren einzuführen – die universellen C^*-Algebren.

  Rest der Vorlesung: sich daraus ergebende Beispiele.