FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

1. Grundbegriffe der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1. **Definition.** 1) Ein **(nicht-kommutativer) Wahrscheinlichkeitsraum** $(\mathcal{A}, \varphi)$ besteht aus

- einer $*$-Algebra $\mathcal{A}$:
  $\mathcal{A}$ ist Algebra mit Eins über $\mathbb{C}$, versehen mit einer Involution $*$:
$$(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$$
$$(ab)^* = b^* a^*$$
$$a^{**} = a$$
  für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$.
- einem Zustand
$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C};$$
  φ ist lineares Funktional mit
$$\varphi(1) = 1$$
$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$$
$$\varphi(aa^*) \geq 0$$
  für alle $a \in \mathcal{A}$.

2) Ist $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra (d.h. $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$, abgeschlossen in der Operatornorm), so heißt $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein **C^*-Wahrscheinlichkeitsraum**.
3) Ist $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra und φ ein normaler Zustand, so heißt $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein **W^*-Wahrscheinlichkeitsraum**.
4) Die Elemente $a \in \mathcal{A}$ heißen **(nicht-kommutative) Zufallsvariable** in $(\mathcal{A}, \varphi)$.
5) Für Zufallsvariable $a_1, \dots, a_n$ in $(\mathcal{A}, \varphi)$ bezeichnen wir die Menge aller Momente (oder Korrelationen)
$$\mu_{a_1,\dots,a_n} := \{\varphi(a_{i(1)} \dots a_{i(k)}) \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq i(1), \dots, i(k) \leq n\}$$
als **(gemeinsame) Verteilung** von $a_1, \dots, a_n$.
6) Zwei Mengen von Zufallsvariablen $\{a_1, \dots, a_n\}$ in $(\mathcal{A}_1, \varphi_1)$ und

$\{b_1,\dots,b_n\}$ in $(\mathcal{A}_2,\varphi_2)$ sehen wir als **isomorph** an, falls ihre Verteilungen übereinstimmen; genauer: wir sagen $\{a_1,\dots,a_n\}$ und $\{b_1,\dots,b_n\}$ sind

$$\textbf{isomorph} \qquad \text{falls} \qquad \mu_{a_1,\dots,a_n}=\mu_{b_1,\dots,b_n}$$

und

$$*\textbf{-isomorph} \qquad \text{falls} \qquad \mu_{a_1,a_1^*,\dots,a_n,a_n^*}=\mu_{b_1,b_1^*,\dots,b_n,b_n^*}.$$

1.2. **Bemerkungen.** 1) Für viele Fragestellungen und Konstruktionen spielt die Positivität keine Rolle, d.h. man kann rein algebraisch im Rahmen von Algebren und linearen Funktionalen arbeiten. Allerdings sollten all unsere Konstruktionen mit der Positivität verträglich sein; ansonsten verdient die Theorie nicht den Namen 'Wahrscheinlichkeitstheorie', sondern reduziert sich auf Kombinatorik.
Wir werden daher im folgenden immer mindestens $*$-Algebren voraussetzen, selbst falls der $*$ nirgends auftaucht.
2) Die Existenz einer Eins wird für unsere späteren Betrachtungen wesentlich sein; daher sind all unsere Algebren immer unital.

1.3. **Beispiele.** 1) Klassische (=kommutative) Wahrscheinlichkeitsräume finden sich in diesem Rahmen wieder gemäß: Sei $(\Omega,\mathcal{Q},P)$ ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum, d.h.

$$\begin{aligned}&\Omega \cong \text{Menge}\\ &\mathcal{Q}\cong \sigma\text{-Algebra von meßbaren Mengen}\\ &P\cong \text{Wahrscheinlichkeitsmaß},\end{aligned}$$

dann setze

$$\mathcal{A}=L^\infty(\Omega,P)$$

und

$$\varphi(X)=\int X(\omega)dP(\omega)$$

für beschränkte Zufallsvariable $X:\Omega\to\mathbb{C}$.

$$P(\Omega)=1 \qquad \text{entspricht} \qquad \varphi(1)=\int 1dP(\omega)=P(\Omega)=1$$

2) Typische nicht-kommutative Zufallsvariable sind Operatoren auf Hilberträumen: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und

$$\mathcal{A}=B(\mathcal{H})$$

(oder allgemeiner eine C^*- oder von Neumann-Algebra).
Dann sind die fundamentalen Zustände von der Gestalt

$$\varphi(a)=\langle\eta,a\eta\rangle,$$

wobei $\eta \in \mathcal{H}$ ein Einheitsvektor.

$$\|\eta\| = 1 \qquad \text{entspricht} \qquad \varphi(1) = \langle \eta, 1\eta \rangle = 1$$

1.4. **Erinnerung (GNS-Konstruktion).** Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein Zustand. Dann gibt es eine Darstellung

$$\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$$

auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einen Vektor $\eta \in \mathcal{H}$, so daß gilt:

$$\varphi(a) = \langle \eta, \pi(a)\eta \rangle.$$

Im Falle einer Zufallsvariablen kann die Verteilung in interessanten Fällen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ identifiziert werden.

1.5. **Satz.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein C^*-Wahrscheinlichkeitsraum und $a \in \mathcal{A}$ normal, d.h.

$$aa^* = a^*a.$$

Dann gibt es ein (eindeutig bestimmtes) Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Spektrum $\sigma(a)$, so daß gilt:

$$\varphi(p(a, a^*)) = \int_{\sigma(a)} p(z, \bar{z}) d\mu(z)$$

für alle Polynome p in zwei kommutierenden Variablen, d.h.

$$\varphi(a^n a^{*m}) = \int_{\sigma(a)} z^n \bar{z}^m d\mu(z)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach Gelfand-Isomorphismus gilt:

$$\begin{array}{ccc} C(\sigma(a)) & \hat{=} & C^*(a) \\ f & \hat{=} & f(a). \end{array}$$

Betrachte nun Abbildung

$$\begin{aligned} I : C(\sigma(a)) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \varphi(f(a)). \end{aligned}$$

Diese ist linear und positiv.
$\Longrightarrow$ Es gibt Maß μ auf $\sigma(a)$ mit

$$\varphi(f(a)) = I(f) = \int_{\sigma(a)} f(z) d\mu(z).$$

Dies gilt für alle stetigen f, also insbesondere auch für Polynome in z und $\bar{z}$.
zur Eindeutigkeit: Gelte

$$\int p(z,\bar{z})d\mu_1(z) = \int p(z,\bar{z})d\mu_2(z)$$

für alle Polynome p in z und $\bar{z}$.
Stone-Weierstrass $\Longrightarrow$ jedes stetige f auf (kompaktem!) $\sigma(a)$ durch Polynome gleichmäßig approximierbar, also auch

$$\int f(z)d\mu_1(z) = \int f(z)d\mu_2(z) \qquad \text{für alle stetigen } f.$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_1 = \mu_2.$$

$\square$

1.6. **Bemerkung.** 1) Wir werden in obigem Falle μ mit μ_{a,a^*} identifizieren.
2) Insbesondere entspricht einem selbstadjungierten beschränkten Operator $x = x^* \in B(\mathcal{H})$ also ein reelles Wahrscheinlichkeitsmaß μ_x.
3) Beachte: obige eindeutige Korrespondenz zwischen

$$\text{Momenten} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \text{Wahrscheinlichkeitsmaß}$$

beruht wesentlich auf Beschränktheit der Operatoren, d.h. Kompaktheit des Spektrums (Stone-Weierstrass!)
Unbeschränkten Operatoren kann man zwar auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß zuordnen, dies ist durch die Momente aber nicht mehr unbedingt eindeutig bestimmt.

Die Verteilung von Zufallsvariablen enthält auch metrische und algebraische Informationen, falls der Zustand treu ist.

1.7. **Definition.** Ein Zustand φ auf einer $*$-Algebra heißt **treu** (faithful), falls gilt:

$$\varphi(aa^*) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0.$$

1.8. **Satz.** Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein treuer Zustand. Sei $x = x^* \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(x) = \operatorname{supp} \mu_x,$$

(wobei $\operatorname{supp} \mu$ = Träger von μ = die kleinste kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $\mu(\operatorname{supp} \mu) = 1$). Somit gilt auch

$$\|x\| = \max\{|z| \mid z \in \operatorname{supp} \mu_x\}$$

und
$$\|x\| = \lim_{p\to\infty} \big(\varphi(x^p)\big)^{1/p}.$$

Beweis. Berechne alles in
$$C^*(x) \qquad \hat{=} \qquad C(\sigma(x)) \qquad\qquad \text{(Gelfand-Isomorphismus)}.$$
Da
$$\varphi \text{ treu} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \operatorname{supp}\mu_x = \sigma(x),$$
folgt auch erste Behauptung über Norm.
Außerdem
$$\varphi(x^p) = \int_{\operatorname{supp}\mu_x} t^p d\mu_x(t) \sim \|x\|^p \qquad (\text{für } p\to\infty),$$
somit folgt zweite Behauptung. □

1.9. **Satz.** Seien $(\mathcal{A}_1,\varphi_1)$ und $(\mathcal{A}_2,\varphi_2)$ W-Räume mit φ_1 und φ_2 treu. Weiterhin seien $a_1,\dots,a_n$ in $(\mathcal{A}_1,\varphi_1)$ und $b_1,\dots,b_n$ in $(\mathcal{A}_2,\varphi_2)$ $*$-isomorphe Zufallsvariable, d.h.
$$\mu_{a_1,a_1^*,\dots,a_n,a_n^*} = \mu_{b_1,b_1^*,\dots,b_n,b_n^*}.$$
1) Gilt
$$\mathcal{A}_1 = *\text{-alg}(a_1,\dots,a_n)$$
$$\mathcal{A}_2 = *\text{-alg}(b_1,\dots,b_n),$$
so kann
$$1\mapsto 1, \qquad a_i\mapsto b_i \quad (i=1,\dots,n)$$
zu einem $*$-Algebren-Isomorphismus
$$\mathcal{A}_1\cong\mathcal{A}_2$$
ausgedehnt werden.
2) Sind $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ C^*-Algebren und
$$\mathcal{A}_1 = C^*(a_1,\dots,a_n)$$
$$\mathcal{A}_2 = C^*(b_1,\dots,b_n),$$
dann gilt
$$\mathcal{A}_1\cong\mathcal{A}_2$$
vermöge
$$a_i\mapsto b_i.$$
2) Sind $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ von Neumann-Algebren, die φ_i normal und
$$\mathcal{A}_1 = vN(a_1,\dots,a_n)$$
$$\mathcal{A}_2 = vN(b_1,\dots,b_n),$$

dann gilt
$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$$
vermöge
$$a_i \mapsto b_i.$$

Beweis. 1) Jedes Element von $\mathcal{A}_1$ ist von der Gestalt
$$p(a_i, a_i^*) = p(a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*),$$
wobei p Polynom in $2n$ nicht-kommutierenden Variablen. Der gesuchte Isomorphismus ist
$$p(a_i, a_i^*) \mapsto p(b_i, b_i^*).$$
Problem: Ist dies wohldefiniert?
Bleibt zu zeigen:
$$p := p(a_i, a_i^*) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q := p(b_i, b_i^*) = 0.$$
Sei $p = 0$.
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \qquad pp^* = 0 \\ &\Longrightarrow \qquad \varphi_1(pp^*) = 0 \\ &\Longrightarrow \qquad \varphi_2(qq^*) = \varphi_1(pp^*) = 0 \\ &\Longrightarrow \qquad q = 0 \qquad\qquad\qquad \text{da } \varphi_2 \text{ treu.} \end{aligned}$$
Abbildung ist bijektiv, da Umkehrabbildung
$$p(b_i, b_i^*) \mapsto p(a_i, a_i^*)$$
nach gleichem Argument existiert.
2) Jedes Element aus $\mathcal{A}_1$ kann nun durch Polynome der Form $p(a_i, a_i^*)$ nur noch approximiert werden in Operatornorm.
Somit noch z.z.:
$$p_n := p_n(a_i, a_i^*) \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q_n := p_n(b_i, b_i^*) \to 0.$$
Sei $p_n \to 0$. Da
$$\begin{aligned} \|p_n\|^2 &= \|p_n p_n^*\| \\ &= \operatorname{supp} \mu_{p_n p_n^*} && \text{nach (1.5), da } p_n p_n^* \text{ selbstadjungiert} \\ &= \operatorname{supp} \mu_{q_n q_n^*} \\ &= \|q_n q_n^*\| && \text{nach (1.5)} \\ &= \|q_n\|^2 \end{aligned}$$
folgt:
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \qquad \|q_n\| = \|p_n\| \to 0 \\ &\Longrightarrow \qquad q_n \to 0. \end{aligned}$$

3) nun Approximation nicht mehr in Operatornorm, sondern in schwacher Operatortopologie; da nach Voraussetzung φ_i normal, d.h. bzgl. dieser Topologie stetig, gilt dies auch □

1.10. **Beispiele.** 1) der zweiseitige Shift u
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum mit $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ und Basis $(e_i)_{i=-\infty}^{\infty}$.
u ist definiert durch ($k \in \mathbb{Z}$)

$$ue_k = e_{k+1};$$

somit auch

$$u^* e_k = e_{k-1}$$

Es gilt:

$$uu^* = u^* u = 1, \qquad \text{d.h. } u \text{ ist unitär.}$$

Betrachte als Zustand

$$\varphi(a) = \langle e_0, ae_0 \rangle.$$

Die Verteilung $\mu := \mu_{u,u^*}$ ist bestimmt durch die Momente ($n \geq 0$)

$$\varphi(u^n) = \langle e_0, u^n e_0 \rangle = \langle e_0, e_n \rangle = \delta_{n0}$$

und

$$\varphi(u^{*n}) = \langle e_0, u^{*n} e_0 \rangle = \langle e_0, e_{-n} \rangle = \delta_{n0}.$$

Da u normal, kann μ mit einem W-Maß auf

$$\sigma(u) = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

identifiziert werden, und zwar

$$\mu \cong \text{normalisiertes Lebesgue-Maß (Haar Maß) auf } \mathbb{T},$$

d.h.

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} dz.$$

Dieses μ ist eindeutig bestimmt durch

$$\int_{\mathbb{T}} z^k d\mu(z) = \delta_{k0} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) der einseitige Shift l ('Linksvernichter')
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum mit $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ und Basis $(e_i)_{i=0}^{\infty}$.
l ist definiert durch

$$le_n = e_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$
$$le_0 = 0.$$

($e_0 \cong \Omega$ 'Vakuum').
Somit

$$l^* e_n = e_{n+1} \qquad (n \geq 0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} ll^* &= 1 \\ l^*l &= 1 - |e_0\rangle\langle e_0|, \end{aligned}$$

d.h. l^* ist (nicht-unitäre) Isometrie.
Betrachte wieder Zustand

$$\varphi(a) := \langle e_0, ae_0\rangle \qquad \text{‘Vakuumerwartungswert’}$$

Die Verteilung μ_{l,l^*} ist bestimmt durch $(n, m \geq 0)$

$$\varphi(l^{*n}l^m) = \langle e_0, l^{*n}l^m e_0\rangle = \langle l^n e_0, l^m e_0\rangle = \delta_{n0}\delta_{m0}.$$

Da l nicht normal, entspricht dies keinem W-Maß.
Betrachte aber

$$s := l + l^*.$$

s ist selbstadjungiert, seine Verteilung ist also ein W-Maß auf $\mathbb{R}$.

1.11. **Lemma.** Sei $s := l + l^*$ mit l Linksvernichter gemäß 1.10. Dann ist die Verteilung von s bezüglich des Vakuumerwartungswertes φ gegeben durch

$$d\mu_s(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - t^2}dt,$$

d.h. für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\varphi(s^n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^n\sqrt{4 - t^2}dt.$$

Beweis. Setze

$$l^{(1)} := l^* \qquad\qquad l^{(-1)} := l.$$

Dann

$$\begin{aligned} \varphi\big((l + l^*)^n\big) &= \varphi\big((l^{(1)} + l^{(-1)})^n\big) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_n\in\{-1,1\}} \varphi\big(l^{(i_n)}\dots l^{(i_1)}\big) \\ &= \sum \langle e_0, l^{(i_n)}\dots l^{(i_1)}e_0\rangle \end{aligned}$$

Nun

$$\begin{aligned}\langle e_0, l^{(i_n)} \dots l^{(i_1)} e_0 \rangle &= \langle e_0, l^{(i_n)} \dots l^{(i_2)} e_{i_1} \rangle \\ &\qquad \text{falls } i_1 = 1 \\ &= \langle e_0, l^{(i_n)} \dots l^{(i_3)} e_{i_1+i_2} \rangle \\ &\qquad \text{falls } i_1 + i_2 \geq 0 \\ &= \dots \\ &= \langle e_0, e_{i_1+i_2+\cdots+i_n} \rangle \\ &\qquad \text{falls } i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1} \geq 0 \\ &= \delta_{0,i_1+i_2+\cdots+i_n}.\end{aligned}$$

Andernfalls

$$\langle e_0, l^{(i_n)} \dots l^{(i_1)} e_0 \rangle = 0.$$

Somit

$$\begin{aligned}\varphi\big((l+l^*)^n\big) = \#\{(i_1, \dots, i_n) \mid & i_m = \pm 1, \\ & i_1 + \cdots + i_m \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq m \leq n, \\ & i_1 + \cdots + i_n = 0\}.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für ungerades n:

$$\varphi(s^n) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} t^n \sqrt{4-t^2} dt.$$

Sei also nun $n = 2k$ gerade.
Eine Folge $(i_1, \dots, i_{2k})$ wie oben entspricht Pfad im Gitter $\mathbb{Z}^2$, der bei $(0,0)$ startet, bei $(2k, 0)$ endet, immer einen diagonalen Schritt nach rechts oben ($i_m = +1$) oder nach rechts unten ($i_m = -1$) macht und dabei nicht unter die x-Achse fällt, d.h. der Pfad besitzt nur Punkte der Form (i,j) mit $j \geq 0$. Solche Pfade heißen **Catalan-Pfade** (der Länge $2k$).
Sei

$$C_k := \text{Anzahl der Catalan-Pfade von } (0,0) \text{ nach } (2k,0).$$

Somit

$$\varphi\big((l+l^*)^{2k}\big) = C_k.$$

Beispiele:

- $k = 1$

$$\varphi\big((l+l^*)^2\big) = \varphi(ll^*)$$

$$\hat{=}(+1,-1)$$

$$\Longrightarrow \qquad C_1 = 1.$$

- $k = 2$

$$\varphi\big((l+l^*)^4\big) = \varphi(lll^*l^*) + \varphi(ll^*ll^*)$$

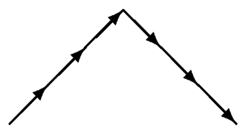
$$\hat{=}(+1,+1,-1,-1)$$

$$(+1,-1,+1,-1)$$

$$\Longrightarrow \qquad C_2 = 2.$$

• $k = 3$

$$
\begin{aligned}
\varphi\big((l+l^*)^6\big) =&\varphi(llll^*l^*l^*) + \varphi(lll^*ll^*l^*) + \varphi(ll^*lll^*l^*)\\
&+ \varphi(lll^*l^*ll^*) + \varphi(ll^*ll^*ll^*)
\end{aligned}
$$



$$\hat{=}(+1,+1,+1,-1,-1,-1)$$

$$(+1,+1,-1,+1,-1,-1)$$

$$(+1,+1,-1,-1,+1,-1)$$

$$(+1,-1,+1,+1,-1,-1)$$

$$(+1,-1,+1,-1,+1,-1)$$

$$\Longrightarrow \qquad C_3 = 5.$$

C_k ist am besten rekursiv zu bestimmen: Ein Catalan-Pfad Π von $(0,0)$ nach $(2k,0)$ treffe in $(2i,0)$ $(1 \leq i \leq k)$ zum ersten Mal die x-Achse. Dann ist

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2,$$

wobei

$$\Pi_1 = \text{Stück von } (0,0) \text{ nach } (2i,0)$$
$$\Pi_2 = \text{Stück von } (2i,0) \text{ nach } (2k,0).$$

Π_2 ist selbst ein Catalan-Pfad der Länge $2(k-i)$, d.h. dafür gibt es C_{k-i} Möglichkeiten.
Π_1 ist ein Catalan-Pfad, der strikt über der x-Achse verläuft, also

$$\Pi_1 = \{(0,0),(1,1),...,(2i-1,1),(2i,0)\} = (0,0) \cup \Pi_3 \cup (2i,0)$$

und $\Pi_3 - (0,1)$ ist ein Catalan-Pfad von $(1,0)$ nach $(2i-1,0)$, d.h. der Länge $2(i-1)$. Dafür gibt es C_{i-1} Möglichkeiten.

Somit

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} C_{i-1} C_{k-i}.$$

Dies und der Anfangswert

$$C_1 = 1$$

bestimmt die C_k eindeutig:

$$C_k = \frac{1}{k}\binom{2k}{k-1} \qquad \textbf{Catalan-Zahlen}$$

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 2$$
$$C_3 = 5$$
$$C_4 = 14$$
$$C_5 = 42$$
$$\dots$$

Bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^{2k}\sqrt{4-t^2}\,dt = C_k.$$

Nachrechnen! $\square$

1.12. **Definition.** 1) Ein unitäres Element u in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ heißt **Haar unitär**, falls

$$\varphi(u^k) = \delta_{k0} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

2) Ein selbstadjungiertes Element $s = s^*$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ heißt **Halbkreiselement ('semi-circular') mit Radius** r $(r > 0)$, falls es die Verteilung

$$d\mu_s(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt, & -r \le t \le r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

1.13. **Bemerkungen.** 1) $s := l + l^*$ ist also ein Halbkreiselement vom Radius 2.
2) Sei $\tilde{s}$ ein Halbkreiselement vom Radius r. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{s}^n) &= \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - \tilde{t}^2}\,\tilde{t}^n d\tilde{t} \\ &= \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} \frac{r}{2} \cdot \sqrt{4 - (2\tilde{t}/r)^2} \cdot \big(\frac{2\tilde{t}}{r}\big)^n \cdot \frac{r^n}{2^n} \cdot d\big(\frac{2\tilde{t}}{r}\big) \cdot \frac{r}{2} \\ &= \big(\frac{r}{2}\big)^n \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - t^2}\,t^n dt \\ &= \big(\frac{r}{2}\big)^n \varphi(s^n),\end{aligned}$$

also

$$\varphi(\tilde{s}^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ (r/2)^n \cdot C_{n/2}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Außerdem

$$\begin{array}{cc} s & \mapsto \lambda s \\ \text{Halbkreis} & \text{Halbkreis} \\ \text{Radius } r & \text{Radius } \lambda r \end{array}$$