FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

10. von Neumann Algebren

10.1. **Definition.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die **starke (Operator-) Topologie** auf $B(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die durch die Familie von Halbnormen ($\xi \in \mathcal{H}$)

$$a \mapsto \|a\xi\|$$

gegeben wird.

10.2. **Bemerkungen.** 1) Somit konvergiert eine Folge (oder allgemeiner ein Netz) (a_n) stark gegen a ($a_n, a \in B(\mathcal{H})$), falls $a_n\xi$ gegen $a\xi$ konvergiert für alle $\xi \in \mathcal{H}$.
2) Beachte, daß $B(\mathcal{H})$ bezüglich der starken Topologie kein normierter Raum, sondern ein lokalkonvexer Vektorraum ist. Insbesondere können Elemente im Abschluß einer Menge im allgemeinen nicht durch Folgen, sondern nur allgemeiner durch Netze approximiert werden.
3) Beachte: Die Multiplikation $(a, b) \mapsto ab$ ist in der starken Topologie nur gemeinsam in beiden Faktoren stetig, falls der erste Faktor normbeschränkt bleibt, d.h. aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_nb_n \to ab$ i.a. nur falls es eine Schranke $M < \infty$ gibt mit

$$\|a_n\| \leq M \forall\, n.$$

Dies folgt aus:

$$\begin{aligned} \|a_nb_n\xi - ab\xi\| &= \|a_n(b_n - b)\xi + (a_n - a)b\xi\| \\ &\leq \|a_n\|\, \|(b_n - b)\xi\| + \|(a_n - a)\eta\| \qquad \text{mit } \eta = b\xi \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$a \mapsto ab \qquad \text{für festes } b$$

und

$$b \mapsto ab \qquad \text{für festes } a$$

sind stetig, nicht aber die Adjungiertenbildung

$$a \mapsto a^*.$$

4) Die starke Topologie ist im Allgemeinen (d.h. im unendlich-dimensionalen Fall) viel gröber als die gleichmäßige Topologie (welche durch die Operator-Norm gegeben wird). Neben der starken gibt es noch etliche andere lokalkonvexe Topologien auf $B(\mathcal{H})$ – schwach, σ-stark, σ-schwach, etc. Diese sind zwar alle verschieden, aber die Unterschiede sind nicht so groß wie zwischen der Normtopologie auf der einen Seite und den lokalkonvexen Topologien auf der anderen Seite. C^*-Algebren sind abgeschlossen in der Normtopologie, von Neumann Algebren in allen obigen lokalkonvexen Topologien.

10.3. **Definition.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S \subset B(\mathcal{H})$ eine Teilmenge von $B(\mathcal{H})$. Dann bezeichnen wir mit

$$S' := \{a \in B(\mathcal{H}) \mid ax = xa \quad \forall\, x \in S\}$$

die **Kommutante** von S und mit

$$S'' := (S')' \qquad \textbf{die Bikommutante} \text{ von } S.$$

10.4. **Bemerkung.** Beachte, daß S' immer eine unitale Algebra (mit **id** als Eins) ist. Falls S selbsadjungiert ist (d.h. mit x ist auch x^* in S) so ist S' eine $*$-Algebra.
Da die Bedingung $ax = xa$ $(x \in S)$ auch unter Grenzwertbildung erhalten bleibt, überträgt sie sich auf den starken Abschluß, und somit ist S' immer stark abgeschlossen.
Trivialerweise gilt $S \subset S''$, somit haben wir also

$$S \subset S'' \qquad \text{und } S'' \text{ stark abgeschlossene } *\text{-Algebra.}$$

Es bleibt die Frage, wie weit S'' von der von S erzeugten $*$-Algebra entfernt ist, bzw. wie weit S und S'' voneinander entfernt sind, falls S schon eine $*$-Algebra ist.

10.5. **Bikommutanten-Theorem.** Sei $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ eine unitale $*$-Algebra mit **id** als Eins. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{A}$ ist stark abgeschlossen
(ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): klar, da nach obigem die Bikommutante immer stark abgeschlossen
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $y \in \mathcal{A}''$. Wir müssen zeigen, daß y im starken Abschluß von $\mathcal{A}$ – und somit nach Voraussetzung in $\mathcal{A}$ – liegt. Nach Definition der starken Topologie bedeutet dies, daß für alle $\varepsilon > 0$ und je endlich viele $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ ein $x \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\|y\xi_i - x\xi_i\| \le \varepsilon \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Betrachte zunächst den Fall $n = 1$, d.h. für gegebenes $\xi \in \mathcal{H}$ müssen wir $y\xi$ beliebig genau durch $x\xi$ für ein $x \in \mathcal{A}$ approximieren.
Sei

$$\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{A}\xi} \subset \mathcal{H}$$

und p die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_0$. Da

$$a\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0 \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}$$

folgt

$$ap = pa.$$

(denn: wegen

$$0 = \langle \zeta, a\eta \rangle = \langle a^*\zeta, \eta \rangle \qquad \forall\, \zeta \in \mathcal{H}_0^\perp, \eta \in \mathcal{H}_0, a \in \mathcal{A}$$

folgt auch

$$a\mathcal{H}_0^\perp \subset \mathcal{H}_0^\perp.$$

Damit ist aber für $\eta \in \mathcal{H}_0$ und $\zeta \in \mathcal{H}_0^\perp$

$$ap(\eta + \zeta) = a\eta = p(a\eta + a\zeta) = pa(\eta + \zeta),$$

also $ap = pa$.)
Somit ist $p \in \mathcal{A}'$, wegen $y \in \mathcal{A}''$ also

$$py = yp,$$

somit

$$y\mathcal{H}_0 = yp\mathcal{H}_0 = py\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0.$$

Da insbesondere

$$\xi = 1\xi \in \mathcal{H}_0,$$

bedeutet dies nun

$$y\xi \in \mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{A}\xi}.$$

Das ist aber genau die Behauptung.
Betrachte nun den Fall mit allgemeinem n und $\xi_1, \dots, \xi_n$. Dann gehen wir über zu

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H} \qquad (n \text{ Faktoren})$$

und lassen $\mathcal{A}$ 'diagonal' auf der direkten Summe wirken, d.h.

$$\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H})$$

wobei

$$\pi(a)(\eta_1, \dots, \eta_n) := (a\eta_1, \dots, a\eta_n) \qquad (a \in \mathcal{A},\ \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{H}).$$

Dann ist $\pi(\mathcal{A})$ eine $*$-Unteralgebra von $B(\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H})$ und

$$y \in \mathcal{A}'' \qquad \Longrightarrow \qquad \pi(y) \in \pi(\mathcal{A})''.$$

Beachte dabei

$$\pi(\mathcal{A})' = \{(a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in \mathcal{A}' \,\forall\, i, j\}.$$

Wende nun obiges Argument für $n = 1$ auf $\pi(y)$ und $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ an. $\square$

10.6. **Definition.** Eine **von Neumann Algebra** $\mathcal{M}$ ist eine $*$-Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$ (für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$), die die Identität **id** enthält und welche die zwei äquivalenten Bedingungen aus 10.5 erfüllt.

10.7. **Beispiele.** 1) Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist $B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra; allgemeiner liefert

$$B(\mathcal{H}_1) \oplus \cdots \oplus B(\mathcal{H}_n) \subset B(\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n)$$

für Hilberträume $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ triviale Beispiele für vN-Algebren. Im endlich-dimensionalen sind dies dann schon alle Möglichkeiten: Eine endlich-dimensionale vN-Algebra ist von der Gestalt

$$M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.
Im unendlich-dimensionalen gibt es hingegen jede Menge nicht nicht-trivialer vN-Algebren.
2) Die kommutativen vN-Algebren sind von der Gestalt $L^\infty(\mu)$ für ein Maß μ auf einem Maßraum, also z.B. $l^\infty(\mathbb{N})$ oder $L^\infty([0,1], dx)$.

10.8. **Bemerkungen.** 1) von Neumann Algebren sind sehr 'große' Algebren, in denen viele Operationen durchführbar sind. Trotzdem ist ihre Theorie nicht trivial, da es jede Menge von vN-Algebren gibt, welche von obigen Beispielen verschieden sind.
2) Sei $\mathcal{M}$ eine vN-Algebra, $a \in \mathcal{M}$ ein normales Element (d.h. $aa^* = a^*a$) und f eine meßbare Funktion auf dem Spektrum von a. Dann gilt via Funktionalkalkül

$$f(a) \in \mathcal{M} \qquad (f \text{ meßbar}).$$

(C^*-Algebren sind im Gegensatz dazu i.a. nur unter stetigem Funktionalkalkül abgeschlossen.)
3) Eine vN-Algebra enthält sehr viele Projektionen. Sei $x = x^* \in \mathcal{M}$ selbstadjungiert und

$$x = \int \lambda dE(\lambda)$$

die Spektraldarstellung von x mit Spektralmaß E, dann gilt: alle Spektralprojektionen

$$E(M) = \chi_M(x) \qquad (M \subset \mathbb{R} \text{ meßbar})$$

liegen (als Spezialfall von (2)) in $\mathcal{M}$. Somit wird $\mathcal{M}$ von seine Projektionen erzeugt.
(Beachte: Es gibt nicht-triviale C^*-Algebren, die keine nicht-trivialen Projektionen enthalten.)

4) Im Gegensatz zu C^*-Algebren führt auch die Polarzerlegung von Elementen nicht aus vN-Algebren hinaus.

10.9. **Definition.** 1) Sei $a \in B(\mathcal{H})$ beliebig. Dann bezeichnen wir mit

$$|a| := \sqrt{a^*a} \qquad \text{den } \mathbf{Betrag} \text{ von } a.$$

2) Ein Element $u \in B(\mathcal{H})$ heißt **partielle Isometrie**, falls u isometrisch auf $\ker(u)^\perp$ ist, oder äquivalent

$$u = uu^*u.$$

10.10. **Satz.** 1) Polarzerlegung allgemein: Sei $a \in B(\mathcal{H})$ beliebig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie $u \in B(\mathcal{H})$ mit

$$a = u|a| \qquad \text{und} \qquad \ker(u) = \ker(a).$$

2) Polarzerlegung in vN-Algebren: Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra und $a \in \mathcal{M}$. Sei

$$a = u|a| \qquad \text{die Polarzerlegung von } a.$$

Dann ist

$$u \in \mathcal{M}.$$

Beweis. 1) Idee: Es soll gelten

$$a\xi = u|a|\xi;$$

also definiere u auf $|a|\mathcal{H}$ durch diese Formel, auf orthogonalen Komplement setze es Null (letzteres wird erzwungen durch Bedingung $\ker(u) = \ker(a)$ und der Beobachtung $\ker(a) = \ker(|a|)$; Eindeutigkeit der Polarzerlegung somit klar)
Beachte: es gilt

$$\begin{aligned} \||a|\xi\|^2 &= \langle |a|\xi, |a|\xi\rangle \\ &= \langle a^*a\xi, \xi\rangle \\ &= \langle a\xi, a\xi\rangle \\ &= \|a\xi\|^2, \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung $u : |a|\xi \mapsto a\xi$ ist isometrisch und wohl-definiert. Dehne dies dann auf den Abschluß aus und setze u auf dem orthogonalen Komplement Null. Dann Eigenschaften nachrechnen.
2) Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ nun eine vN-Algebra und $a \in \mathcal{M}$ mit Polarzerlegung $a = u|a|$. Sei $w \in \mathcal{M}'$ unitär. Setze

$$\tilde{w} := w^*uw.$$

Es gilt

$$\tilde{w}\tilde{w}^*\tilde{w} = w^*uww^*u^*ww^*uw = w^*uu^*uw = w^*uw = \tilde{w},$$

somit ist $\tilde{w}$ eine partielle Isometrie. Wegen

$$a\xi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad aw\xi = wa\xi = 0$$

ist

$$w : \ker(a) \to \ker(a)$$

unitär und es gilt

$$\ker(\tilde{w}) = \ker(u) = \ker(a).$$

Außerdem ist (da $|a| \in \mathcal{M}$, d.h. w, w^* und $|a|$ vertauschen)

$$\tilde{w}|a| = w^*uw|a| = w^*u|a|w = w^*aw = a.$$

Aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgt somit $\tilde{w} = u$, d.h.

$$wu = uw \qquad \forall\, w \in \mathcal{M}' \quad \text{unitär}.$$

Da $\mathcal{M}'$ von seinen unitären Elementen linear erzeugt wird, gilt also

$$au = ua \qquad \forall\, a \in \mathcal{M}',$$

also

$$u \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}.$$

□

Die Konstruktion und Klassifikation von vN-Algebren unterscheidet konkrete Algebren natürlich nur bis auf Isomorphie.

10.11. **Definition.** Seien $\mathcal{M}_1 \subset B(\mathcal{H}_1)$ und $\mathcal{M}_2 \subset B(\mathcal{H}_2)$ zwei vN-Algebren. Dann heißen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ **isomorph**,

$$\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2,$$

falls es einen $*$-Isomorphismus

$$\pi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$$

gibt.

10.12. **Beispiel.** Es gilt

$$M_2 \cong M_2 \otimes 1 \subset M_4$$

vermöge

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

10.13. **Bemerkung.** Obwohl π gemäß Definition nur die algebraischen Eigenschaften erhalten muß, hat ein solcher $*$-Isomorphismus automatisch die angemessenen Stetigkeitseigenschaften.

Das Studium allgemeiner vN-Algebren kann im wesentlichen auf die Untersuchung von fundamentalen nicht-kommutativen Bestandteilen zurückgeführt werden.

10.14. **Definition.** Sei $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ eine vN-Algebra. Dann heißt

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' \qquad \text{das } \textbf{Zentrum} \text{ von } \mathcal{M}.$$

Ist das Zentrum von $\mathcal{M}$ trivial, d.h.

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}1,$$

so heißt $\mathcal{M}$ ein **Faktor**.

10.15. **Bemerkung.** Eine allgemeine vN-Algebra $\mathcal{M}$ kann als direktes Integral

$$\mathcal{M} = \int_{\oplus} \mathcal{M}(t) d\mu(t)$$

über Faktoren $\mathcal{M}(t)$ geschrieben werden. Das direkte Integral entspricht einer kommutativen Operation, die Nicht-Kommutativität steckt somit in den einzelnen Faktoren.

10.16. **Beispiel.** Wegen

$$B(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H})' = B(\mathcal{H}) \cap \mathbb{C}1 = \mathbb{C}1,$$

sind die $B(\mathcal{H})$ Faktoren. Da aus Dimensionsgründen

$$\dim \mathcal{H}_1 \neq \dim \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow B(\mathcal{H}_1) \ncong B(\mathcal{H}_2),$$

gibt es für jedes $n = \dim \mathcal{H}$ einen Faktor $B(\mathcal{H})$. Dieser wird als Typ I_n bezeichnet ($n = 1, 2, \ldots, \infty$). Die I_n-Faktoren für $n < \infty$ sind genau die endlich-dimensionalen Faktoren.

10.17. **Bemerkung.** Murray und von Neumann haben in einer Serie von Arbeiten (ca. 1936-1943) weitere nicht-triviale Beispiele für vN-Algebren angegeben und eine gewisse Klassifikationstheorie entwickelt: Neben obigen Typ I_n Algebren gibt es weitere Beispiele, die als Typ II_1, II_∞ und III klassifiziert werden. Typ II_1 ist dabei für uns am interessantesten, die entsprechenden Faktoren können durch die Existenz einer Spur charakterisiert werden.

10.18. **Definition.** Sei $\mathcal{M}$ eine vN-Algebra.
1) Ein lineares Funktional

$$\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$$

mit $\tau(1) = 1$ heißt **Spur**, falls gilt:

$$\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{M}.$$

2) Eingeschränkt auf die Menge der Projektionen in $\mathcal{M}$ heißt τ eine **Dimensionsfunktion**

10.19. **Beispiele.** Die I_n Faktoren $B(\mathcal{H})$ besitzen genau dann eine (nämlich die übliche) Spur, falls $n < \infty$. In diesem Fall gilt für Projektionen p:

$$\tau(p) = \frac{\dim p\mathcal{H}}{n},$$

d.h. $\tau(p)$ mißt die Dimension des Bildraumes von p. Als mögliche Werte für diese 'Dimensionen' kommen in diesem Fall nur die diskreten Werte k/n mit $k = 0, 1, \dots, n$ vor.
Auf $B(\mathcal{H})$ für $\dim \mathcal{H} = \infty$ gibt es keine Spur. (Beachte: die übliche Spur kann nur auf einer Teilmenge von $B(\mathcal{H})$, den Spurklasse-Operatoren, sinnvoll definiert werden.)

10.20. **Definition.** Sei $\mathcal{M}$ ein Faktor.
Falls $\mathcal{M}$ nicht vom Typ I ist und eine Spur besitzt, so sagen wir: $\mathcal{M}$ ist vom **Typ II$_1$**.

10.21. **Bemerkungen.** 1) Im II_1-Fall nimmt die Dimensionsfunktion alle Werte im Intervall $[0, 1]$ an: Für jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ gibt es eine Projektion $p \in \mathcal{M}$ mit $\tau(p) = \lambda$. Man spricht daher auch von 'kontinuierlicher Dimension'.
2) Außerdem gilt: Seien $p, q \in \mathcal{M}$ zwei Projektionen mit $\tau(p) = \tau(q)$. Dann sind p und q äquivalent im Sinne von Murray-von Neumann, d.h. es gibt eine partielle Isometrie $u \in \mathcal{M}$ mit

$$uu^* = p \qquad \text{und} \qquad u^*u = q.$$

10.22. **Bemerkungen.** 1) Eine Spur auf einem II_1-Faktor ist automatisch eindeutig (mit der Normierung $\tau(1) = 1$) und stetig in den angemessenen Topologien.
2) Die Existenz eines II_1-Faktors ist nicht-trivial; wir werden aber demnächst ein konkretes Beispiel kennenlernen.
3) Im Gegensatz zu dem Fall I_n, in dem es für jedes n genau einen Faktor gibt, gibt es im II_1-Fall beliebig viele nicht-isomorphe Beispiele. Ein Ziel der vN-Algebren Theorie ist es, eine gewisse Systematik in all diese Fälle zu bekommen, sich von einfachen zu immer komplizierteren Klassen vorzuarbeiten.
4) Außer II_1 gibt es noch II_∞-Faktoren; diese sind von der Gestalt $\mathrm{II}_1 \otimes B(\mathcal{H})$. Alles was nicht unter die bisherigen Fälle fällt, heißt Typ III. Diese sind die kompliziertesten, Murray und von Neumann konnten nichts Wesentliches (außer der Existenz von Beispielen) über diese aussagen. Inzwischen kann man aber Typ III auch im gewissen Sinne auf Typ II zurückführen und Typ III ist nicht mehr so exotisch.
Wir werden uns hier auf die 'schönsten' nicht-trivialen vN-Algebren, die II_1-Faktoren, beschränken.

Wir werden nun konkrete Beispiele für II_1-Faktoren kennenlernen. Dazu werden wir die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ einer diskreten Gruppe (vgl. 3.4) auf einem Hilbertraum darstellen und in der starken Topologie abschließen. Dies liefert die vN-Algebra $L(G)$ der Gruppe G. Typischerweise ergibt dies II_1-Faktoren.

10.23. **Notation.** Sei G eine diskrete Gruppe. Betrachte den zugehörigen Hilbertraum

$$l_2(G) := \{\sum \alpha_g g \mid \alpha_g \in \mathbb{C}, \sum_g |\alpha_g|^2 < \infty\}$$

mit Skalarprodukt

$$\langle g, h \rangle = \begin{cases} 1, & g = h \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(d.h. den l^2-Abschluß der Gruppenalgebra) und definiere eine Darstellung

$$\lambda : \mathbb{C}G \to B(L^2(G))$$

der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ auf $l^2(G)$ durch Linkswirkung, d.h. durch ($h \in G$)

$$\lambda(h)(\sum \alpha_g g) := \sum_g \alpha_g hg$$

und lineare Ausdehnung, d.h.

$$\lambda(\sum_{endlich} \beta_h h) = \sum_{endlich} \beta_h \lambda(h).$$

Somit ist

$$\lambda(\mathbb{C}G) \subset B(l^2(G))$$

eine $*$-Unteralgebra von $B(l^2(G))$, und wir definieren die **Gruppen von Neumann Algebra von** G als ihren schwachen Abschluß

$$L(G) := \lambda(\mathbb{C}G)''.$$

Analog definieren wir die vN-Algebra $R(G)$ durch Rechts-Wirkung, d.h.

$$R(G) := \rho(\mathbb{C}G)'',$$

wobei

$$\rho(h)(\sum_g \alpha_g g) := \sum_g gh.$$

Wir definieren ein lineares Funktional

$$\tau : L(G) \to \mathbb{C}$$

durch

$$\tau(a) := \langle 1, a1 \rangle,$$

wobei $1 \in G \subset l^2(G)$ das neutrale Element von G ist.

Beachte, daß gilt

$$\lambda(g^{-1}) = \lambda(g)^* \qquad (g \in G),$$

die Gruppenelemente werden daher durch unitäre Operatoren dargestellt.

10.24. **Lemma.** 1) Es gilt

$$ab = ba \qquad \forall\, a \in L(G), b \in R(G).$$

2) Die Abbildung

$$\begin{aligned} L(G) &\to l^2(G) \\ a &\mapsto a1 \end{aligned}$$

ist injektiv.
3) τ ist eine treue Spur auf $L(G)$.

Beweis. 1) Wegen

$$\lambda(h)\rho(k)g = hgk = \rho(k)\lambda(h)g$$

gilt

$$ab = ba \qquad \forall\, a \in \lambda(\mathbb{C}G), b \in \rho(\mathbb{C}G).$$

Sei nun $a \in L(G)$ und $b \in R(G)$. Dann gibt es Netze (a_n), (b_n) mit $a_n \in \lambda(\mathbb{C}G)$, $b_n \in \rho(\mathbb{C}G)$ und $a_n \to a$, $b_n \to b$ (in der starken Topologie). Somit gilt

$$a_n b_m = b_m a_n \qquad \forall\, n, m,$$

und damit

$$a_n b = \lim_m a_n b_m = \lim_m b_m a_n = b a_n$$

und

$$ab = \lim_n a_n b = \lim_n b a_n = ba.$$

(Beachte: die Multiplikation ist bezüglich der starken Topologie nicht in beiden Faktoren gemeinsam stetig.)
2) Sei $a \in L(G)$ mit $a1 = 0$. Z.z.: $a = 0$. Wir zeigen:

$$a\xi \stackrel{!}{=} 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{C}G \subset l^2(G).$$

Sei

$$\xi = \sum_{endlich} \alpha_g g \in \mathbb{C}G \subset l^2(G).$$

Dann gilt

$$\xi = b1,$$

wobei
$$b = \rho(\sum_{endlich} \alpha_g g) \in R(G).$$
Somit
$$\begin{aligned} a\xi &= ab1 \\ &= ba1 \\ &= b0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
3) Sei $a \in L(G)$ mit $\tau(a^*a) = 0$. Dann ist
$$0 = \tau(a^*a) = \langle 1, a^*a1 \rangle = \langle a1, a1 \rangle,$$
also $a1 = 0$. Daraus folgt aber nach obigen $a = 0$. Somit ist τ treu. Die Spureigenschaft ergibt sich folgendermaßen: Sei
$$a = \sum_{endlich} \alpha_g \lambda(g) \in \lambda(\mathbb{C}G)$$
und
$$b = \sum_{endlich} \beta_h \lambda(h) \in \lambda(\mathbb{C}G).$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} \tau(ab) &= \langle 1, ab1 \rangle \\ &= \langle 1, \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h gh \rangle \\ &= \sum_g \alpha_g \beta_{g^{-1}} \\ &= \sum_h \beta_h \alpha_{h^{-1}} \\ &= \langle 1, ba1 \rangle. \end{aligned}$$
Somit haben wir
$$\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall\, a, b \in \lambda(\mathbb{C}G).$$
Durch Stetigkeit überträgt sich dies wie oben auf $a, b \in L(G)$. □

$L(G)$ liefert somit das gewünschte Beispiel für den II_1-Fall. Wir müssen nur noch sicherstellen, daß wir einen Faktor erhalten. Dies ist nicht immer der Fall, sondern setzt eine bestimmte Bedingung an die Gruppe G voraus.
Beachte, daß für endliche Gruppen $L(G) = \mathbb{C}(G)$ eine endlichdimensionale vN-Algebra ist. Dies ist gerade die reguläre Darstellung von G, welche in eine direkte Summe aller irreduziblen Darstellungen

zerfällt, d.h. $L(G)$ ist eine direkte Summe von Matrizenalgebren mit Anzahl der Summanden = Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G. Das heißt aber, daß für endliche Gruppen $L(G)$ i.a. kein Faktor ist.

10.25. **Definition.** Eine diskrete Gruppe G heißt **i.c.c. (infinite conjugacy classes)** Gruppe, falls jede nicht-triviale Konjugationsklasse ($1 \neq g \in G$)
$$\{hgh^{-1} \mid h \in G\}$$
unendlich viele Element enthält.

10.26. **Lemma.** Sei G eine i.c.c. Gruppe. Dann ist $L(G)$ ein Faktor.

Beweis. Sei a im Zentrum von $L(G)$, d.h.
$$a \in L(G) \cap L(G)'.$$
Sei
$$a1 = \sum_g \alpha_g g \in l^2(G).$$
Z.z.: $a \in \mathbb{C}1$, d.h. in obiger Darstellung verschwinden alle α_g mit $g \neq 1$. Beachte:
$$\alpha_g = \langle g, a1 \rangle.$$
Dann gilt für alle $h \in G$:
$$\begin{aligned} \alpha_{hgh^{-1}} &= \langle hgh^{-1}, a1 \rangle \\ &= \langle \lambda(h)\rho(h^{-1})g, a1 \rangle \\ &= \langle g, \rho(h)\lambda(h^{-1})a1 \rangle \\ &= \langle g, a\rho(h)\lambda(h^{-1})1 \rangle \\ &= \langle g, a1 \rangle \\ &= \alpha_g. \end{aligned}$$
Somit muß $g \mapsto \alpha_g$ auf allen Konjugationsklassen konstant sein. Da alle nicht-trivialen Konjugationsklassen unendlich viele Elemente enthalten, andererseits aber auch
$$\sum_g |\alpha_g|^2 < \infty$$
sein muß, gilt also
$$\alpha_g = 0 \qquad \text{falls } g \neq 1.$$
□

Somit haben wir eine explizite Klasse von II_1-Faktoren erhalten.

10.27. **Satz.** Sei G eine diskrete i.c.c. Gruppe. Dann ist $L(G)$ (und ebenso $R(G)$) ein II_1-Faktor.

10.28. **Bemerkung.** In Verschärfung obigen Lemmas gilt sogar:

$$L(G)' = R(G) \qquad \text{und} \qquad R(G)' = L(G).$$

10.29. **Beispiel.** Sei $G = S_\infty$ die Gruppe derjenigen Permutationen von unendlich-vielen Elementen, welche fast alle (= alle bis auf endlich viele) Elemente fest lassen:

$$S_\infty := \{\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \pi \text{ ist bijektiv und} \\ \pi(k) \neq k \text{ nur für endlich viele } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist G i.c.c., denn für $\pi \in S_\infty$ mit $\pi \neq \mathbf{id}$ gibt es $k \neq l$ mit $\pi(k) = l$. Sei nun $\sigma_m = (k, m)$ die Permutation

$$\sigma_m(n) = \begin{cases} m, & n = k \\ k, & n = m \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für $l \neq m$

$$\sigma_m \pi \sigma_m^{-1}(m) = \sigma_m \pi(k) = \sigma_m(l) = l.$$

Das bedeutet aber, daß für $m \neq l$ all die Elemente $\sigma_m \pi \sigma_m^{-1}$ verschieden sind, die Konjugationsklasse von π also unendlich viele Elemente enthält.
Somit ist $L(S_\infty)$ ein II_1-Faktor.

10.30. **Bemerkung.** 1) Der II_1-Faktor $L(S_\infty)$ kann im folgenden Sinne durch endlich-dimensionale vN-Algebren approximiert werden: Für $n \in \mathbb{N}$ kann die Permutationsgruppe S_n von n Elementen in kanonischer Weise als Unteralgebra von S_∞ aufgefaßt werden,

$$S_n \subset S_\infty,$$

und damit auch

$$\mathbb{C}S_n \subset \mathbb{C}S_\infty \subset L(S_\infty).$$

$\mathbb{C}S_n$ ist eine endlich-dimensionale vN-Algebra (kein Faktor!). Da jedes Element aus $\mathbb{C}S_\infty$ in irgendeinem $\mathbb{C}S_n$ liegt für n hinreichend groß, gilt auch

$$\mathbb{C}S_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}S_n.$$

Andererseits liegt nach Definition $\mathbb{C}S_\infty$ stark dicht in $L(S_\infty)$.
Somit hat $L(S_\infty)$ die folgende Approximiationseigenschaft (wobei $\mathcal{M}_n := L(S_n) = \mathbb{C}S_n$): Es gibt eine aufsteigenden Folge von endlich-dimensionalen Unter-vN-Algebren $\mathcal{M}_n$, so daß $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ stark dicht liegt in $L(S_\infty)$.
Faktoren mit dieser Eigenschaft werden **hyperfinit** genannt.

Murray und von Neumann haben gezeigt, daß es nur einen hyperfiniten II_1-Faktor gibt; dieser wird normalerweise mit R bezeichnet.
Dieser Eindeutigkeitssatz ist nicht trivial, da es beliebig viele Möglichkeiten gibt, sich aufsteigende Folgen von approximierenden vN-Algebren $\mathcal{M}_n$ zu wählen. Es ist nicht apriori klar, daß zwei solche Möglichkeiten zu dem gleichen starken Abschluß führen, insbesondere wenn die aufsteigenden vN-Algebren ganz verschiedene Dimensionen besitzen. Der Normabschluß von $\bigcup \mathcal{M}_n$ z.B. hängt i.a. wirklich von der gewählten Folge ab. Man erhält eine ganze Klasse von C^*-Algebren, die sogenannten AF-Algebren (bzw. spezieller die UHF-Algebren, falls man fordert, daß alle $\mathcal{M}_n$ Faktoren sind.)
2) Aus tiefliegenden Arbeiten von Connes folgt, daß für alle amenablen (mittelbaren) Gruppen G die zugehörige Gruppen-vN-Algebra hyperfinit ist:

$$G \text{ amenabel, i.c.c.} \qquad \Longrightarrow \qquad L(G) \cong R.$$

Bei amenablen Gruppen geht die konkrete Struktur der Gruppe also beim starken Abschluß total verloren.

10.31. **Beispiel.** Sei $G = \mathbb{F}_n$ die freie Gruppe mit n Erzeugern, wobei $n = 1, 2, \ldots, \infty$.
1) $\mathbb{F}_n$ ist für $n \geq 2$ i.c.c. (Konjugieren mit $(g_1 g_2)^k$ oder ähnlichen Wörtern führt in der Regel zu verschiedenen Gruppenelementen; g_1 und g_2 seien dabei zwei freie Erzeuger von $\mathbb{F}_n$). Somit ergibt also auch

$$L(\mathbb{F}_n) \qquad \mathrm{II}_1\text{-Faktor } (n \geq 2).$$

2) Für $n = 1$ gilt $\mathbb{F}_1 = \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ ist als kommutative Gruppe nicht i.c.c. und $L(\mathbb{Z})$ ist auch kein Faktor. $L(\mathbb{Z})$ ist aber auch leicht zu identifizieren und im gewissen Sinne die kanonische kommutative vN-Algebra: $L(\mathbb{Z})$ wird erzeugt von einem unitären Element $u = \lambda(1)$ (beachte neutrales Element ist hier 0) und es gilt

$$\tau(u^n) = \langle 0, u^n 0 \rangle = \langle 0, n \rangle = \delta_{0n}$$

und

$$\tau(u^{*n}) = \langle 0, u^{*n} 0 \rangle = \langle 0, -n \rangle = \delta_{0n},$$

d.h. u ist Haar unitär.
$L(\mathbb{Z})$ ist also die von einem Haar unitären Element erzeugte kommutative vN-Algebra, d.h.

$$L(\mathbb{Z}) \cong L^\infty(T, dz) \qquad \text{wobei } T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ Torus.}$$

10.32. **Bemerkungen.** 1) Schon Murray-von Neumann haben gezeigt, daß die freien Gruppen Faktoren $L(\mathbb{F}_n)$ ($n \geq 2$) nicht hyperfinit sind, d.h.

$$L(\mathbb{F}_n) \not\cong R \qquad (n \geq 2).$$

2) Ansonsten war aber so gut wie nichts über die Struktur der $L(\mathbb{F}_n)$ bekannt. Insbesondere ist es ein berühmtes (immer noch offenes) Problem zu entscheiden, ob die $L(\mathbb{F}_n)$ untereinander isomorph sind oder nicht:

$$??? \qquad L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_m) \qquad (n, m \geq 2, n \neq m) \qquad ???$$

Die Frage nach Isomorphie oder nicht von irgendwelchen mathematischen Objekten gipfelt ja meist in der Suche nach Invarianten. Für vN-Algebren gibt es nur sehr wenige Invarianten. Eine davon ist die sogenannte Fundamentalgruppe.

10.33. **Definition.** Sei $\mathcal{M}$ ein II_1-Faktor. Sei $0 < \lambda < 1$. Dann gibt es eine Projektion $p \in \mathcal{M}$ mit $\tau(p) = \lambda$. Betrachte nun

$$p\mathcal{M}p := \{pap \mid a \in \mathcal{M}\} \qquad \textbf{Kompression von } \mathcal{M}.$$

Dies ist wieder eine vN-Algebra, mit p als Eins (dargestellt auf dem Hilbertraum $p\mathcal{H}$ für $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$).
Es gilt: $p\mathcal{M}p$ ist ein Faktor und

$$\tilde{\tau} : p\mathcal{M}p \to \mathbb{C}$$

mit

$$\tilde{\tau}(pap) := \frac{1}{\lambda}(pap) \qquad (apa \in \mathcal{M})$$

ist eine Spur. Somit ist $p\mathcal{M}p$ auch ein II_1-Faktor.
$p\mathcal{M}p$ hängt nun nur von λ ab, nicht aber von dem speziell gewählten p. Sei nämlich q eine andere Projektion mit $\tau(q) = \lambda$. Somit (vgl. 10.21) sind p und q äquivalent, d.h. es gibt eine partielle Isometrie u mit

$$uu^* = p \qquad \text{und} \qquad u^*u = q.$$

Dann liefert

$$u : q\mathcal{H} \to p\mathcal{H} \qquad \text{und} \qquad u^* : p\mathcal{H} \to q\mathcal{H}$$

aber einen Isomorphismus zwischen

$$p\mathcal{M}p : p\mathcal{H} \to p\mathcal{H}$$

und

$$q\mathcal{M}q : q\mathcal{H} \to q\mathcal{H}.$$

Wir bezeichnen daher auch

$$\mathcal{M}_\lambda := p\mathcal{M}p \qquad (p \in \mathcal{M} \text{ Projektion mit } \tau(p) = \lambda).$$

Die **Fundamentalgruppe** von $\mathcal{M}$ besteht nun aus den reellen Zahlen $\lambda \in (0,1]$, so daß $\mathcal{M}_\lambda \cong \mathcal{M}$.

10.34. **Bemerkungen.** 1) Beachte: Die Fundamentalgruppe bildet in kanonischer Weise eine Halbgruppe und es gibt auch ein Inverses dazu, nämlich die Matrizen über $\mathcal{M}$: Sei z.B. $\tau(p) = 1/n$. Dann ist $\mathcal{N} = p\mathcal{M}p$ äquivalent zu $\mathcal{M} = M_n(\mathcal{N})$.
2) Beispiel für Kompression: Sei

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$pM_3p = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong M_2.$$

3) Murray und von Neumann haben gezeigt, daß die Fundamentalgruppe des hyperfiniten Faktors R aus allen reellen positiven Zahlen besteht. (Dies ist klar, sobald die Unabhängigkeit von R von den approximierenden endlich-dimensionalen Algebren gezeigt ist.)
4) Eine Hoffnung im Zusammenhang mit den freien Gruppen Faktoren war, daß die Fundamentalgruppe Information über die $L(\mathbb{F}_n)$ ergibt, z.B. die verschiedenen $L(\mathbb{F}_n)$ unterscheiden kann. Somit haben wir folgendes Problem: Was können wir über die Kompressionen von den freien Gruppen Faktoren aussagen.
Freeness wird uns einige Aussagen in diese Richtung liefern.