FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

11. Freeness und von Neumann Algebren

11.1. **Satz.** Sei $(\mathcal{M}, \tau)$ ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum (d.h. $\mathcal{M}$ ist eine vN-Algebra und τ ein normaler und treuer Zustand). Sei $a \in \mathcal{M}$ mit Polarzerlegung $a = u|a|$. Dann hängt die gemeinsame Verteilung $\mu_{u,u^*,|a|}$ nur von μ_{a,a^*} ab.

Beweis. Seien a_1 und a_2 zwei Zufallsvariable mit gleichen $*$-Verteilungen und Polarzerlegungen

$$a_1 = u_1|a_1|$$

und

$$a_2 = u_2|a_2|.$$

Die Gleichheit $\mu_{a_1,a_1^*} = \mu_{a_2,a_2^*}$ impliziert, daß die von a_1 und von a_2 erzeugen vN-Algebren

$$\mathcal{M}_i := vN(a_i)$$

isomorph sind,

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}_1 &\cong \mathcal{M}_2 \\ a_1 &\mapsto a_2 \end{aligned}$$

Der Isomorhpismus erhält natürlich den Zustand,

$$\tau_2 \circ \pi = \tau_1,$$

und bildet $|a_1|$ in $|a_2|$ ab. Um zu sehen, daß auch u_1 in u_2 übergeht, muß man die Bedingung an den Kern von u_1 bzw. u_2 in der Polarzerlegung algebraisch fassen. Die Eindeutigkeit der Polarzerlegung ergibt dann

$$\pi(u_1) = u_2.$$

Man kann sich überzeugen, daß die Bedingung an u in der Polarzerlegung $a = u|a|$ auch durch

$$u^*u = s(|a|) \qquad \text{und} \qquad uu^* = s(|a^*|)$$

ausgedrückt werden kann, wobei $s(x)$ für $x = x^*$ der sogenannte **Träger** von x ist, d.h. die kleinste Projektion q für die gilt:

$$qx = xq = x.$$

q liegt immer in der von x erzeugten vN-Algebra. □

11.2. **Definition.** Eine Zufallsvariable c heißt **Kreiselement (zirkular)**, falls

$$c = \frac{s_1 + is_2}{\sqrt{2}}, \qquad c^* = \frac{s_1 - is_2}{\sqrt{2}},$$

wobei $\{s_1, s_2\}$ eine Halbkreisfamilie (vom Radius 2) bildet.

11.3. **Bemerkung.** 1) Dies ist äquivalent zu folgender Charakterisierung mittels Kumulanten:

$$k_n(c^{(*)}, \dots, c^{(*)}) = 0 \qquad \text{falls } n \neq 2$$

und

$$k_2(c, c) = k_2(c^*, c^*) = 0, \qquad k_2(c, c^*) = k_2(c^*, c) = 1.$$

Dies folgt direkt aus der Charakterisierung von Halbkreisvariablen mittels Kumulanten und der Tatsache, daß gemischte Kumulanten in freien Variablen verschwinden:

$$k_2(c, c) = \frac{1}{2}\big(k_2(s_1, s_1) - k_2(s_2, s_2)\big) = 0,$$

$$k_2(c, c^*) = \frac{1}{2}\big(k_2(s_1, s_1) + k_2(s_2, s_2)\big) = 1.$$

2) Ein konkretes Beispiel für eine Kreisvariable ist

$$c = l_1 + l_2^*, \qquad c^* = l_1^* + l_2$$

mit den üblichen Linkvernichtern und Linkserzeugern auf dem vollen Fockraum.

Die Realisierung von Halbkreisfamilien durch Zufallsmatrizen (Satz 9.4) ergibt uns direkt folgendes Zufallsmatrizenbild für Kreiselemente.

11.4. **Satz.** Betrachte die Zufallsmatrizen

$$X^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(a_{kl} + ib_{kl}\big)_{k,l=1}^{n}$$

mit

- a_{kl}, b_{kl} ($1 \leq k \leq l < \infty$) sind unabhängige $N(0, 1/2)$-verteilte Gauß-Variable
- $a_{kl} = a_{lk}$, $b_{kl} = b_{lk}$

Dann gilt

$$(X^{(n)}, X^{(n)*}) \xrightarrow{\text{Vert}} (c, c^*),$$

wobei c Kreiselement.
Sind mehrere Matrizen $X_1^{(n)}, \dots, X_r^{(n)}$ wie oben gegeben, wobei die Eingänge der verschiedenen $X_j^{(n)}$ jeweils unabhängig voneinander sind, so werden die $X_1^{(n)}, \dots, X_r^{(n)}$ asymptotisch frei.
Außerdem sind solche Matrizen asymptotisch frei von konstanten Diagonalmatrizen.

11.5. **Satz.** Sei $(\mathcal{M}, \tau)$ ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum und τ eine Spur. Sei $c \in \mathcal{M}$ ein Kreiselement mit Polarzerlegung $c = vb$. Dann gilt

(i) v und b sind $*$-frei, d.h. $\{v, v^*\}, \{b\}$ sind frei
(ii) v ist Haar unitär
(iii) b ist Viertelkreiselement, d.h.

$$\tau(b^k) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 t^k \sqrt{4 - t^2} dt \qquad \forall\, k \geq 0.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgende Invarianz eines Kreiselementes unter Multiplikation mit einem freien unitären Element.

11.6. **Lemma.** Sei $c \in (\mathcal{M}, \tau)$ ein Kreiselement und u eine beliebige unitäre Zufallsvariable, so daß u und c $*$-frei sind. Dann gilt: c und uc haben die gleiche $*$-Verteilung, d.h.

$$\mu_{c,c^*} = \mu_{uc,c^*u^*}.$$

Beweis. a) kombinatorischer Beweis: 'direktes' Nachrechnen, z.B.

$$\tau\big((uc)(c^*u^*)\big) = \tau(cc^*)$$

und

$$\begin{aligned} \tau\big((c^*u^*)(c^*u^*)(uc)(uc)\big) &= \tau(c^*u^*c^*c^*cuc) \\ &= k_2(c^*, c)k_2(c^*, c)\tau(u^*u) \\ &= k_2(c^*, c)k_2(c^*, c) \\ &= \tau(c^*c^*cc). \end{aligned}$$

Etwas aufwendigere Kombinatorik für allgemeines Moment (vgl. Banica, Nica+Speicher)
b) Beweis mit Zufallsmatrizen (Voiculescu 1990): Realisiere c und u gemäß Satz 10.4 in der Form

$$c \hat{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \big(a_{kl} + ib_{kl}\big)_{k,l=1}^n,$$

(wobei a_{kl}, b_{kl} $(1 \leq k \leq l < \infty)$ unabhängige $N(0,1/2)$-verteilte Gauß-Variable sind) und

$$u \hat{=} \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $|\lambda_i| = 1$ und

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\delta_{\lambda_i} \xrightarrow{\text{Vert}} \mu_{u,u^*}.$$

Betrachte nun

$$uc \hat{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\big((a_{kl}+ib_{kl})\lambda_l\big)_{k,l=1}^n.$$

Beachte, daß für zwei unabhängige Gauß-Variable a und b mit gleicher Varianz und für eine komplexe Zahl $\lambda + i\mu$ mit $|\lambda + i\mu| = 1$ gilt: Realteil und Imaginärteil von

$$(a+ib)(\lambda+i\mu) = (\lambda a - \mu b) + i(\mu a + \lambda b)$$

sind wiederum unabhängige Gauß-Variable mit der gleichen Varianz wie a.

$$\tau\big((\lambda a - \mu b)^2\big) = \lambda^2\tau(a^2) + \mu^2\tau(b^2) = \tau(a^2).$$

Somit haben die Eingänge von uc in der obigen Zufallsmatrizenrealisierung die gleiche gemeinsame Verteilung wie die Eingänge von u, d.h. aber die Verteilung von $\{c, c^*\}$ und die Verteilung von $\{uc, (uc)^*\}$ stimmen überein. $\square$

Beweis. [11.5] (iii) Es gilt $b = \sqrt{c^*c}$, d.h.

$$\begin{aligned}
\tau(b^{2k}) &= \tau\big((c^*c)^k\big) \\
&= \#\{\pi \in NCP(2k) \mid \pi \text{ verbindet nur } c \text{ mit } c^*\} \\
&= \#NCP(2k) \\
&\qquad \text{(da jedes } \pi \in NCP(2k) \text{ automatisch gerade und ungerade koppelt)} \\
&= \tau(s^{2k}) \qquad\qquad \text{wobei } s \text{ Halbkreiselement} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^{2k}\sqrt{4-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2} t^{2k}\sqrt{4-t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Da $b \geq 0$, folgt

$$b = \sqrt{b^2},$$

d.h. nach Stone-Weierstraß gibt es Polynome p_n mit

$$p_n(b^2) \to \sqrt{b^2} = b \qquad \text{gleichmäßig.}$$

Also $b = \lim_{n\to\infty} p_n(b^2)$ und somit auch

$$b^{2k+1} = \lim_{n\to\infty} b^{2k} p_n(b^2).$$

Dann gilt nach obigem

$$\begin{aligned} \tau(b^{2k+1}) &= \lim_{n\to\infty} \tau(b^{2k} p_n(b^2)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^2 t^{2k} p_n(t^2) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 t^{2k+1} dt. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\ker(v) = \ker(|c|) = \ker(b).$$

Da τ treu ist und die Verteilung von b bzgl. τ kein Atom bei 0 besitzt, ist

$$\ker(b) = \{0\}.$$

(Sei p die Spektralprojektion von b auf $\{0\}$. Da μ_b kein Atom bei 0 besitzt, ist $\tau(p) = 0$, da τ treu, also auch $p = 0$.)
Somit ist

$$\ker(v) = \{0\},$$

v also eine Isometrie:

$$v^* v = 1.$$

Außerdem ist

$$c^* = bv^*,$$

also

$$v^* cc^* = v^* vbbv^* = c^* cv^*.$$

Da die Wurzel durch Polynome approximiert werden kann, gilt dann aber auch

$$v^* \sqrt{cc^*} = \sqrt{c^* c}\, v^*.$$

Daher ist

$$c^* = bv^* = v^* |c^*|$$

und

$$\ker(v^*) \subset \ker(|c^*|) = \{0\}$$

($\sqrt{cc^*}$ hat die gleiche Verteilung wie $\sqrt{c^* c}$.) Also ist v ein unitäres Element.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Dann ist mit c auch λc ein Kreiselement. Da die Polarzerlegung von diesem durch

$$\lambda c = (\lambda v)b = (\lambda v)|\lambda c|$$

gegeben wird, muß λv für alle $|\lambda| = 1$ die gleiche $*$-Verteilung wie v besitzen. Insbesondere also ($n \in \mathbb{N}$)

$$\tau(v^n) = \tau((\lambda v)^n) = \lambda^n \tau(v^n)$$

und

$$\tau(v^{*n}) = \tau((\bar{\lambda} v^*)^n) = \bar{\lambda}\tau(v^{*n}).$$

Damit folgt aber

$$\tau(v^n) = \tau(v^{*n}) = 0 \qquad (n \neq 0),$$

d.h. v ist ein Haar unitäres Element.

(i) Sei u ein Haar unitäres Element welches frei ist von $\{v, v^*, b\}$, also auch von c, c^*. Nach 11.6 haben c und und uc die gleiche $*$-Verteilung. Außerdem hat uc Polarzerlegung

$$uc = (uv)b = (uv)|uc|.$$

Es reicht also zu zeigen: uv und b sind $*$-frei.

Beachte: Mit u ist auch uv ein Haar unitäres Element (da $\tau(uvuvuv \dots uv)$ in Momenten von u und v ausgedrückt werden kann, erstere aber alle 0 sind; bzw. direkt nach dem schon bewiesenen (ii)). Somit reicht es, folgendes zu sehen: Seien $p_1, p_2, \dots$ Polynome mit $\tau(p_i(b)) = 0$, dann müssen wir zeigen:

$$\tau\big((uv)^{n_1} p_1(b)(uv)^{n_2} \dots (uv)^{n_k} p_k(b)(uv)^{n_{k+1}}\big) \stackrel{!}{=} 0,$$

wobei die $n_i \in \mathbb{Z}$ und (mit möglicher Ausnahme von $i = 1$ oder $i = k+1$) gilt:

$$n_i \neq 0.$$

Betrachte obiges Produkt nun als Ausdruck alternierend in Monomen der Form u, u^* und Monomen der Form v, v^*, $p(p)$, $vp(b)$, $p(b)v^*$ und $vp(b)v^*$ (mit $\tau(p(b)) = 0$). Da die erste Gruppe von Monomen frei von der zweiten Gruppe von Monomen und $\tau(u) = \tau(u^*) = 0$ und da τ Spur, reicht es somit zu zeigen:

$$\tau(vp(b)) = 0 \qquad \text{und} \qquad \tau(p(b)v^*) = 0$$

für alle Polynome p mit $\tau(p(b)) = 0$.

Dies folgt nun so: Mit c ist auch $-c$ Kreiselement mit Polarzerlegung

$$-c = (-v)b = (-v)|-c|.$$

Somit gilt

$$\tau(vp(b)) = \tau((-v)p(b)),$$

also
$$\tau(vp(b)) = 0.$$
Analog für $\tau(p(b)v^*) = 0$.
Damit folgt aber die Behauptung. □

Wir wollen nun die freien Gruppen Faktoren näher untersuchen. Gemäß Definition gilt
$$L(\mathbb{F}_n) = L(\mathbb{Z}) * \ldots * L(\mathbb{Z}),$$
d.h. $L(\mathbb{F}_n)$ wird von n freien Haar unitären Elementen erzeugt. Gemäß Funktionalkalkül können wir die einzelnen Erzeuger aber auch durch andere, besser handhabbare Elemente ersetzen – insbesondere durch Halbkreiselemente.

11.7. **Lemma.** Sei $(\mathcal{M}, \tau)$ ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit τ treu und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M}$ n freie Zufallsvariable. Für die x_i gelte jeweils eine der folgenden beiden Möglichkeiten:

(i) x_i ist Halbkreiselement

(ii) x_i ist direkte Summe von Vielfachen von Haar unitären Elementen, d.h. x_i ist normal und die $*$-Verteilung von x_i ist Konvexkombination von Vielfachen von Haar-Verteilungen:
$$\mu_{x_i, x_i^*} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_{r_k u, r_k u^*},$$
wobei u ein Haar unitäres Element,
$$0 \leq \alpha_k \leq 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1,$$
und die $r_k > 0$. (Die Verteilung von x_i ist somit eine Konvexkombination von Gleichverteilungen auf N konzentrischen Kreisen mit den Radien r_k $(k = 1, \ldots, N)$.)

Dann ist die von den $x_1, \ldots, x_n$ erzeugte vN-Algebra isomorph zu $L(\mathbb{F}_n)$:
$$vN(x_1, \ldots, x_n) \cong L(\mathbb{F}_n).$$

Beweis. $L(\mathbb{F}_n)$ wird erzeugt von n freien Haar unitären Elementen. Wir müssen nur zeigen, daß wir ein Haar unitäres Element mittels Funktionalkalkül durch eine invertierbare meßbare Funktion auf Variable wie im Satz angegeben abbilden können.
Durch die Abbildung $x \mapsto e^{ix}$ können wir ein selbsadjungiertes x mit Gleichverteilung auf $[0, 2\pi]$ auf ein Haar unitäres u abbilden. Durch Zerlegung von $[0, 2\pi]$ in Teilintervalle und Abbildung dieser auf konzentrische Kreise mit verschiedenen Radien können wir ein Haar unitäres

Element also durch eine Konvexkombination von Vielfachen davon ersetzen.
Sei x ein Halbkreiselement mit Radius 2 – d.h. mit Verteilung auf $[-2,2]$ – und sei

$$F:[-2,2]\to[0,1]$$

die reelle invertierbare Funktion

$$F(t):=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{t}\sqrt{4-s^2}ds.$$

Dann ist

$$y:=F(x)$$

ein selbstadjungiertes Element mit Gleichverteilung auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned}\tau(y^n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}F(t)^n\sqrt{4-t^2}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 s^n\sqrt{4-t^2}\frac{ds}{F'(t)}\qquad\text{mit } s=F(t)\\&=\int_0^1 s^n ds.\end{aligned}$$

Somit können wir also ein Haar unitäres Element auch durch ein Halbkreiselement ersetzen. □

11.8. **Bemerkung.** Durch Verallgemeinerung obigen Beweises kann man letztendlich zeigen, daß alle normalen Elemente, deren Verteilungen keine Atome besitzen, ineinander übergeführt werden können

Da wir an Kompressionen $(L(\mathbb{F}_n))_{1/N}$ von $L(\mathbb{F}_n)$ interessiert sind, wird es von Vorteil sein, unsere Erzeuger gleich als $N\times N$-Matrizen zu wählen.

11.9. **Satz.** Sei $(\mathcal{M},\tau)$ ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum. Für festes $N\in\mathbb{N}$ betrachten wir die folgenden n Matrizen in $M_N(\mathcal{M})$:

$$X_i:=\frac{1}{\sqrt{N}}\big(a_i(p,q)\big)_{p,q=1}^N\qquad(i=1,\dots,n-1)$$

und

$$X_n:=\begin{pmatrix}a&0&\dots&0\\0&2a&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&Na\end{pmatrix},$$

wobei folgendes gilt:

- $a_i(p,q)=a_i(q,p)^*$ für alle $i=1,\dots,n-1$ und $p\neq q$
- alle $a_i(p,q)$ für $p\neq q$ sind Kreiselemente

- alle $a_i(p,p)$ sind Halbkreiselemente
- a ist Haar unitäres Element
- $a_i(p,q)$ $(i=1,\dots,n;\ 1\le p\le q\le N)$, a sind frei

Dann sind die Matrizen $X_1,\dots,X_n$ frei; $X_1,\dots,X_{n-1}$ sind Halbkreiselemente und die Verteilung von X_n ist eine Konvexkombination von Vielfachen von Haar Verteilungen; insbesondere erzeugen $X_1,\dots,X_n$ also den freien Gruppen Faktor $L(\mathbb{F}_n)$.

Beweis. Wir realisieren die Halbkreis- und Kreiselemente als $k\times k$-Matrizen im Limes $k\to\infty$, wobei alle Eingänge normalverteilt und unabhängig voneinander (bei den Halbkreiselementen bis auf Symmetrie). Setzen wir solche Matrizen gemäß Satz zu $Nk\times Nk$-Matrizen zusammen, so erhalten wir im Limes $k\to\infty$ Halbkreiselemente, welche untereinander frei sind. Realisieren wir das Haar unitäre Element u durch eine konstante $k\times k$-Diagonalmatrix und bilden X_n laut Satz, so ist dies eine konstante $Nk\times Nk$-Diagonalmatrix, welche im Limes $k\to\infty$ also frei von den übrigen X_i $(i=1,\dots,n-1)$ wird (und klarerweise die im Satz behauptete Verteilung besitzt). □

11.10. **Satz.** Seien N und n natürliche Zahlen mit $N,n\ge 2$. Dann gilt

$$\big(L(\mathbb{F}_n)\big)_{1/N}\cong L(\mathbb{F}_{N^2(n-1)+1}).$$

Beweis. Der expliziten Schreibweise wegen führen wir den Beweis für $n=3$ und $N=2$, d.h. wir wollen zeigen:

$$\big(L(\mathbb{F}_3)\big)_{1/2}=L(\mathbb{F}_9).$$

Sei $\mathcal{N}$ erzeugt von $X_1,X_2,X_3\in M_2(\mathcal{M})$ mit

$$X_1=\begin{pmatrix} s_1 & c_1\\ c_1^* & s_2\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix} s_3 & c_2\\ c_2^* & s_4\end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix},$$

wobei s_1,s_2,s_3,s_4 Halbkreiselemente, c_1,c_2 Kreiselemente, a Haar unitäres Element und $s_1,s_2,s_3,s_4,c_1,c_2,a\in\mathcal{M}$ $*$-frei sind.
Aus Satz 11.9 folgt, daß

$$\mathcal{N}\cong L(\mathbb{F}_3).$$

Mit X_3 liegt auch

$$X_3X_3^*=\begin{pmatrix} aa^* & 0\\ 0 & 4aa^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

und somit auch deren Spektralprojektionen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathcal{N}$. Mit diesen Projektionen können wir aber auch die Erzeuger X_1, X_2, X_3 in ihre Blöcke zerlegen, d.h. die folgenden Elemente liegen in $\mathcal{N}$:

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Da wir aus diesen Elementen X_1, X_2, X_3 wieder zurückgewinnen können, wird $\mathcal{N}$ also auch von obigen 8 Elementen erzeugt. (Diese sind natürlich nicht frei.)
Wir betrachten nun die Kompression

$$\big(L(\mathbb{F}_3)\big)_{1/2} \cong P\mathcal{N}P, \qquad \text{wobei} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Erzeugendensystem für $\mathcal{N}$ impliziert nun auch ein Erzeugendensystem für $P\mathcal{N}P$ gemäß folgenden Lemma.

11.10.1. *Lemma.* Sei $\mathcal{N} \subset M_2(\mathcal{M})$ eine vN-Algebra, welche von Elementen $Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{N}$ erzeugt wird. Sei außerdem $P, U \in \mathcal{N}$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für ein unitäres Element $u \in \mathcal{M}$. Dann wird $P\mathcal{N}P$ erzeugt von Elementen der Form $(i = 1, \dots, k)$

$$PY_iP, \quad PY_iU^*, \quad UY_iP, \quad UY_iU^*.$$

Beachte, daß obige Elemente alle die Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

haben

Beweis. Elemente in $\mathcal{N}$ können durch Linearkombinationen von Produkten der Form

$$Y_{i(1)}^{(*)} \dots Y_{i(r)}^{(*)}$$

approximiert werden. Somit wird $P\mathcal{N}P$ durch Elemente der Form

$$PY_{i(1)}^{(*)} \dots Y_{i(r)}^{(*)}P$$

linear erzeugt. Wir schieben nun zwischen den Faktoren jeweils

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = PP + U^*U$$

ein und verteilen P und U^* auf das vorangehende Y und P und U auf das nachfolgende Y. Somit können wir obiges Produkt auch als ein Produkt von Elementen wie im Satz behauptet und ihren Adjungierten ansehen. Das ergibt die Behauptung. □

Um dieses Lemma anzuwenden, brauchen wir also noch das Element U. Dies verschaffen wir uns durch Polarzerlegung von

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß die Polarzerlegung von c_1

$$c_1 = v_1 b_1$$

uns auch die Polarzerlegung von C_1 in der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

liefert. Da die Polarzerlegung nicht aus der vN-Algebra $\mathcal{N}$ herausführt (Satz 10.10), können wir den Erzeuger C_1 auch durch die beiden Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

ersetzen. Analog ersetzen wir

$$C_2 := \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch seine Polarzerlegung

$$\begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind nach Satz 11.5 v_i Haar unitär, b_i Viertelkreiselement und v_i $*$-frei von b_i $(i = 1, 2)$.
$\mathcal{N}$ wird also von folgenden Elementen erzeugt:

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind alle in den Matrizen auftauchenden verschiedenen Elemente aus $\mathcal{M}$ frei untereinander.
Wir betrachten nun die Kompression

$$P\mathcal{N}P \qquad \text{mit} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dazu setzen wir

$$U := \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(beachte: P und U liegen in $\mathcal{N}$)
und erhalten gemäß obigem Lemma für $P\mathcal{N}P$ folgendes Erzeugendensystem:

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 s_2 v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 s_4 v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 a v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} v_1 b_1 v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 b_2 v_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Beachte, daß $PUU^* = P$ keinen zusätzlichen Erzeuger ergibt.)
Die von obigen Elementen in $M_2(\mathcal{M})$ erzeugte vN-Algebra ist natürlich isomorph zu der in $\mathcal{M}$ von folgenden 9 Elementen erzeugen vN-Algebra:

$$\begin{gathered} s_1 \\ v_1 s_2 v_1^* \\ s_3 \\ v_1 s_4 v_1^* \\ a \\ v_1 a v_1^* \\ v_1 b_1 v_1^* \\ v_2 v_1^* \\ v_1 b_2 v_1^*. \end{gathered}$$

Wir behaupten nun: all diese Elemente sind $*$-frei; da außerdem jedes von ihnen entweder Haar unitär, Halbkreis- oder Viertelkreiselement ist – also alle jeweils $L(\mathbb{Z})$ als vN-Algebra erzeugen – erzeugen alle zusammen $L(\mathbb{F}_9)$.
Es bleibt obige behauptete freeness all dieser Elemente zu zeigen: Betrachte die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &:= \{s_1, s_3, a\} \\ \mathcal{X}_2 &:= \{v_1 s_2 v_1^*, v_1 s_4 v_1^*, v_1 b_1 v_1^*, v_1 b_2 v_1^*, v_1 a v_1^*\} \\ \mathcal{X}_3 &:= \{v_2 v_1^*\} \end{aligned}$$

Freeness innerhalb der einzelnen Mengen ist jeweils klar, Probleme könnte es nur zwischen den Mengen geben. Es reicht somit aus, exemplarisch zu sehen, daß a, vav^*, wv^* frei sind, falls a, v, w $*$-frei und alle drei Haar unitär (wobei $v = v_1$ und $w = v_2$). Beachte, daß a, vav^*, wv^* jeweils Haar unitär, wir müssen also nur sehen, daß alternierende Produkte aus nicht-trivialen Potenzen von diesen Elementen Erwartungswert 0 besitzen. Lesen wir ein solches Produkt als Ausdruck in a, a^*, v, v^*, w, w^*, so läßt sich dieser nicht auf 1 reduzieren, da z.B. Potenzen von a und a^* nie zusammenkommen können; d.h. aber der Erwartungswert ist 0, da a, v, w $*$-frei und Haar unitär. □

Man beachte, daß obiger Satz auch für $n = \infty$ gilt: ∞ viele freie Erzeuger werden unter Kompression wieder in ∞ viele freie Erzeuger überführt. Wir erhalten also folgendes Korollar in diesem Fall.

11.11. **Korollar.** Es gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\big(L(\mathbb{F}_\infty)\big)_{1/N} \cong L(\mathbb{F}_\infty).$$

Die Fundamentalgruppe von $L(\mathbb{F}_\infty)$ enthält also alle Zahlen der Form $1/N$ (und als Gruppe somit alle positiven rationalen Zahlen).

Letztendlich kann man mit verfeinerten Argumenten die Fundamentalgruppe im Fall $n = \infty$ bestimmen.

11.12. **Satz (Radulescu).** Die Fundamentalgruppe von $L(\mathbb{F}_\infty)$ ist $\mathbb{R}_+$.

Im Fall $n < \infty$ können wir erst mal nichts über die Fundamentalgruppe aussagen. Da wir nicht wissen, ob die verschiedenen $L(\mathbb{F}_n)$ isomorph sind oder nicht, können wir auch nicht entscheiden, ob die Kompression $(L(\mathbb{F}_n)_{1/N}$ isomorph ist zu $L(\mathbb{F}_n)$. Wir sehen aber, daß wir durch Kompression verschiedene $L(\mathbb{F}_n)$ miteinander verknüpfen können; ein Isomorphismus impliziert dann auch andere, z.B. sagt uns obiger Satz ja

$$\big(L(\mathbb{F}_3)\big)_{1/2} \cong L(\mathbb{F}_9) \qquad \text{und} \qquad \big(L(\mathbb{F}_2)\big)_{1/2} \cong L(\mathbb{F}_5).$$

Das heißt aber

$$L(\mathbb{F}_3) \cong L(\mathbb{F}_2) \qquad \Longrightarrow \qquad L(\mathbb{F}_9) \cong L(\mathbb{F}_5).$$

Durch eine Verfeinerung dieser Analyse – insbesondere die Ausdehnung der $L(\mathbb{F}_r)$ und der Formel

$$\big(L(\mathbb{F}_r)\big)_{1/N} \cong L(\mathbb{F}_{N^2(r-1)+1})$$

auf nicht-ganzzahliges r – erhält man schließlich, daß folgende Dichotomie vorliegt.

11.13. **Satz (Dykema, Radulescu).** Es gilt genau eine der beiden folgenden Möglichkeiten:

- Entweder sind alle $L(\mathbb{F}_n)$ für $2 \leq n < \infty$ isomorph, dann besteht die Fundamentalgruppe von allen $L(\mathbb{F}_n)$ $(2 \leq n < \infty)$ aus ganz $\mathbb{R}_+$
- oder je zwei der $L(\mathbb{F}_n)$ für $2 \leq n < \infty$ sind nicht isomorph; dann besteht die Fundamentalgruppe von allen $L(\mathbb{F}_n)$ $(2 \leq n < \infty)$ jeweils nur aus $\{1\}$.