FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

2. Freie Zufallsvariable

Der zentrale Begriff der 'Unabhängigkeit' aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie laßt sich leicht auf unseren algebraischen Rahmen umschreiben und erweitern.

2.1. **Definition.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unteralgebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ heißen **unabhängig**, falls

- die $\mathcal{A}_i$ kommutieren:
$$ab = ba \qquad \text{für alle } a \in \mathcal{A}_i \text{ und } b \in \mathcal{A}_j \text{ mit } i \neq j.$$
- φ faktorisiert:
$$\varphi(a_1 \dots a_m) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_m) \qquad \text{für alle } a_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}_m.$$

2.2. **Bemerkungen.** 1) Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird über Unabhängigkeit der erzeugten Algebren definiert; a und b unabhängig bedeutet also nichts anderes als

- a und b kommutieren:
$$ab = ba$$
- $\varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n)\varphi(b^m)$ für alle $n, m \geq 0$.

Zusammen ergibt dies eine Berechnungsvorschrift für gemischte Momente in a und b aus den Momenten von a und denen von b:
$$\text{Unabhängigkeit} \qquad \hat{=} \qquad \mu_a, \mu_b \rightsquigarrow \mu_{a,b},$$
nämlich:
$$\varphi(a^{n_1} b^{m_1} \dots a^{n_k} b^{m_k}) = \varphi(a^{n_1 + \dots + n_k})\varphi(b^{m_1 + \dots + m_k}).$$

2) Unser zentraler Begriff, 'freeness', ist nun eine zwar analoge, aber doch ganz andere Vorschrift. Beachte insbesondere: freeness ist analog zu Unabhängigkeit, aber keine Verallgemeinerung davon!

2.3. **Definitionen.** Sei $(\mathcal{A},\varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
1) Seien $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}$ Unteralgebren mit $1\in\mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,m)$. Die $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m$ heißen **frei**, falls gilt:

$$\varphi(a_1\dots a_k)=0$$

für alle $k\in\mathbb{N}$ und

$$a_i\in\mathcal{A}_{j(i)}\qquad (1\leq j(i)\leq m)$$

mit

$$\varphi(a_i)=0\qquad (i=1,\dots,k)$$

und

$$j(1)\neq j(2)\neq\dots\neq j(k).$$

2) Seien $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m\subset\mathcal{A}$ beliebige Teilmengen von $\mathcal{A}$. Die $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m$ heißen frei, falls $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m$ frei sind, wobei

$$\mathcal{A}_i:=\mathrm{alg}(1,\mathcal{X}_i)\qquad (i=1,\dots,m).$$

3) Insbesondere heißen $a_1,\dots,a_m\in\mathcal{A}$ **freie Zufallsvariable**, falls die davon erzeugten Algebren

$$\mathcal{A}_i:=\mathrm{alg}(1,a_i)$$

frei sind. Wir nennen $a_1,\dots,a_m$ **$*$-frei**, falls die davon erzeugen $*$-Algebren

$$\mathcal{A}_i:=\mathrm{alg}(1,a_i,a_i^*)$$

frei sind.

2.4. **Bemerkungen.** 1) Das Substantiv zu 'frei (free)' heißt **freeness (= freie Unabhängigkeit)**.
2) Beachte: die Bedingung an die Indizes fordert nur, daß benachbarte Elemente aus verschiedenen Algebren sind, $j(1)=j(3)$ ist z.B. erlaubt.
3) Konkreter bedeutet die Bedingung an freie Zufallsvariable $a_1,\dots,a_m$ also:

$$\varphi\big(p_1(a_{j(1)})\dots p_k(a_{j(k)})\big)=0$$

für alle Polynome $p_1,\dots,p_k$ in einer Variablen und alle Indizes

$$j(1)\neq j(2)\neq\dots\neq j(k),$$

so daß

$$\varphi(p_i(a_{j(i)}))=0\qquad (i=1,\dots,k).$$

4) Freeness von Zufallsvariablen ist zwar über die Algebren definiert, überträgt sich aber auf C^*- und W^*-Rahmen: Sei $(\mathcal{A},\varphi)$ ein C^*-Wahrscheinlichkeitsraum und seien $a_1,\dots,a_m$ $*$-frei. Dann sind auch die von den a_i erzeugten C^*-Algebren

$$\mathcal{B}_i:=C^*(1,a_i)$$

frei. (Beweis: Übungsaufgabe!)
(analog für W^*-Algebren)
5) Freeness ist, obwohl nicht so direkt ersichtlich, auch nichts anderes als eine ganz bestimmte Vorschrift zur Berechnung von gemischten Momenten aus gegebenen Momenten,

$$\text{freeness} \qquad \hat{=} \qquad \mu_a, \mu_b \rightsquigarrow \mu_{a,b}.$$

2.5. **Lemma.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien die Unteralgebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ frei. Sei $\mathcal{B}$ die von den $\mathcal{A}_i$ erzeugte Algebra,

$$\mathcal{B} := \operatorname{alg}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m).$$

Dann ist $\varphi|_{\mathcal{B}}$ eindeutig bestimmt durch die Kenntnis der $\varphi|_{\mathcal{A}_i}$ für $i = 1, \dots, m$ und die freeness Bedingung.

Beweis. B wird linear erzeugt von Elementen der Gestalt

$$a_1 \dots a_k$$

mit

$$a_i \in \mathcal{A}_{j(i)} \qquad (1 \le j(i) \le m),$$

wobei wir annehmen können

$$j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k).$$

Sei $a_1 \dots a_k \in \mathcal{B}$ ein solches Element.
z.z.: $\varphi(a_1 \dots a_k)$ ist eindeutig bestimmt durch Kenntnis der $\varphi|_{\mathcal{A}_i}$ $(i = 1, \dots, m)$.
Beweis durch Induktion nach k.
$k = 1$: klar, da $a_1 \in \mathcal{A}_{j(1)}$.
$k - 1 \to k$: Setze

$$a_i^0 := a_i - \varphi(a_i)1 \in \mathcal{A}_i.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 \dots a_k) &= \varphi\big((a_1^0 + \varphi(a_1)1) \dots (a_k^0 + \varphi(a_k)1)\big) \\ &= \varphi(a_1^0 \dots a_k^0) + rest, \end{aligned}$$

wobei

$$rest = \sum_{\substack{(p(1)<\dots<p(s))\dot\cup \\ \dot\cup(q(1)<\dots<q(k-s))=(1,\dots,k) \\ s<k}} \varphi(a_{p(1)}^0 \dots a_{p(s)}^0) \cdot \varphi(a_{q(1)}) \dots \varphi(a_{q(k-s)}).$$

Da

$$\begin{aligned} &\varphi(a_i^0) = 0 \\ \Longrightarrow \qquad &\varphi(a_1^0 \dots a_k^0) = 0. \end{aligned}$$

Alle Terme in *rest* haben Länge $< k$, sind also nach Induktionsvoraussetzung bestimmt.
$\Longrightarrow$ Behauptung. $\square$

2.6. **Beispiele.** Seien a und b frei.
1) Nach Definition

$$\varphi(ab) = 0 \qquad \text{falls } \varphi(a) = 0 = \varphi(b).$$

Allgemeiner Fall folgt gemäß:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi\big((a-\varphi(a)1)(b-\varphi(b)1)\big) \\ &= \varphi(ab) - \varphi(a1)\varphi(b) - \varphi(a)\varphi(1b) + \varphi(a)\varphi(b)\varphi(1) \\ &= \varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

2) Analog:

$$\varphi\big((a^n - \varphi(a^n)1)(b^m - \varphi(b^m)1)\big) = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad \varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n)\varphi(b^m),$$

d.h. gleiches Ergebnis wie im Fall unabhängiger Zufallsvariable.
Ebenso

$$\varphi(a^{n_1} b^m a^{n_2}) = \varphi(a^{n_1+n_2})\varphi(b^m).$$

3) Unterschied zu Unabhängigkeit sieht man bei

$$\varphi(abab) =?$$

Betrachte

$$\varphi\big((a-\varphi(a)1)(b-\varphi(b)1)(a-\varphi(a)1)(b-\varphi(b)1)\big) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(abab) &= \dots \\ &= \varphi(aa)\varphi(b)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(a)\varphi(bb) - \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)\varphi(b). \end{aligned}$$

2.7. **Folgerung.** Falls freie Zufallsvariable a und b kommutieren,

$$ab = ba \qquad \text{und} \qquad a, b \text{ frei},$$

so muß mindestens eine der beiden Größen verschwindende Varianz besitzen,

$$\varphi\big((a-\varphi(a)1)^2\big) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \varphi\big((b-\varphi(b)1)^2\big) = 0.$$

Sind also a und b klassische Zufallsvariable, so können sie nur frei sein, falls mindestens eine fast sicher konstant ist. Somit: 'freeness' ist ein rein nicht-kommutatives Konzept, insbesondere ist es keine spezielle Art von Abhängigkeit zwischen klassischen Zufallsvariablen!

Beweis. Seien a, b frei und $ab = ba$. Dann folgt nach obigem Beispiel
$\varphi(a^2)\varphi(b^2) = \varphi(a^2b^2) = \varphi(abab) = \varphi(a^2)\varphi(b)^2 + \varphi(a)^2\varphi(b^2) - \varphi(a)^2\varphi(b)^2$,
also

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\varphi(a^2) - \varphi(a)^2\big)\big(\varphi(b^2) - \varphi(b)^2\big) \\ &= \varphi\big((a - \varphi(a)1)^2\big) \cdot \varphi\big((b - \varphi(b)1)^2\big) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung $\square$

2.8. **Bemerkungen.** 1) Aus 2.7 folgt insbesondere: Ist a frei von sich selbst, d.h.

$$a, a \quad \text{frei},$$

so gilt

$$\varphi(a^2) = \varphi(a)^2,$$

d.h. im Falle $a = a^*$ und φ treu ist a konstant:

$$a = \varphi(a)1.$$

2) Funktionen von freien Zufallsvariablen sind frei; genauer: sind a und b frei und f und g Polynome (bzw., falls a, b selbstadjungiert, stetige Funktionen im C^*-Fall, und meßbare Funktionen im W^*-Fall), so sind auch $f(a)$ und $g(b)$ frei.
(Beweis: Übungsaufgabe!)
3) Freeness verhält sich gut bzgl. sukkzessiver Anwendung: Seien $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ Unteralgebren von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_i^1, \dots, \mathcal{B}_i^{n_i}$ jeweils Unteralgebren von $\mathcal{A}_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Dann gilt:
i) Sind die $(\mathcal{A}_i)_{i=1,\dots,m}$ frei in $\mathcal{A}$ und die $(\mathcal{B}_i^j)_{j=1,\dots,n_i}$ jeweils frei in $\mathcal{A}_i$ für alle $i = 1, \dots, m$, dann sind alle $(\mathcal{B}_i^j)_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n_i}$ frei in $\mathcal{A}$.
(Beweis: Übungsaufgabe)
ii) Sind alle

$$(\mathcal{B}_i^j)_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n_i} \qquad \text{frei in } \mathcal{A}$$

und gilt

$$\mathcal{A}_i = \operatorname{alg}(\mathcal{B}_i^1, \dots, \mathcal{B}_i^{n_i}) \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, m,$$

dann sind auch

$$(\mathcal{A}_i)_{i=1,\dots,m} \qquad \text{frei in } \mathcal{A}.$$

4) Beispiel für i):
Seien

$$\{a, b\}, c \qquad \text{frei}$$

und

$$a, b \qquad \text{frei.}$$

Dann sind auch

$$a, b, c \qquad \text{frei.}$$

Letzteres ergibt z.B. direkt

$$\varphi(abc) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c),$$

während man nach erstem berechnet

$$\varphi(abc) = \varphi((ab)c) = \varphi(ab)\varphi(c) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c).$$

Analog zum klassischen Fall der Unabhängigkeit sind konstante Zufallsvariable frei von allem.

2.9. **Lemma.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \qquad \text{eine beliebige Unteralgebra.}$$

Dann sind

$$\mathbb{C}1 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}$$

frei.

Beweis. Sei $a_1 \dots a_k$ gemäß Definition von freeness und $k \geq 2$.
($k = 1$ ist trivialerweise immer erfüllt.)
Dann ist also mindestens ein

$$a_i \in \mathbb{C}1 \qquad \text{und} \qquad \varphi(a_i) = 0,$$

d.h. aber

$$a_i = 0.$$

Damit auch

$$a_1 \dots a_k = 0.$$

$\Longrightarrow \qquad \varphi(a_1 \dots a_k) = 0$
$\Longrightarrow \qquad$ Behauptung. $\square$