FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

3. Zwei kanonische Beispiele für freeness: Gruppenalgebren und voller Fockraum

3.1. **Definition.** Seinen $G_1, \dots, G_m$ Gruppen mit neutralen Elementen $e_1, \dots, e_m$. Das **freie Produkt**

$$G := G_1 * \dots * G_m$$

ist die Gruppe, die erzeugt wird von allen Elementen aus $G_1 \cup \dots \cup G_m$ und nur folgende Minimalrelationen besitzt:

- die Relationen aus den verschiedenen G_i $(i = 1, \dots, m)$
- die neutralen Elemente e_i der G_i werden mit dem neutralen Element e von G identifiziert:

$$e = e_1 = \dots = e_m.$$

Konkreter bedeutet dies:

$$G = \{e\} \cup \{g_1 \dots g_k \mid g_i \in G_{j(i)} \text{ mit } j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k) \text{ und } g_i \neq e_{j(i)}\},$$

und Multiplikation in G ist gegeben durch Hintereinanderschreiben (und Reduzieren auf obige Form durch Multiplizieren benachbarter Terme aus der gleichen Gruppe)

3.2. **Bemerkung.** Insbesondere gilt also in G:

$$g_i \in G_{j(i)},\ g_i \neq e,\ j(1) \neq \dots \neq j(k) \qquad \Longrightarrow \qquad g_1 \dots g_k \neq e.$$

3.3. **Beispiel.** Sei $\mathbb{F}_n$ die **freie Gruppe mit n Erzeugern**, d.h. $\mathbb{F}_n$ wird erzeugt von n Elementen $f_1, \dots, f_n$, die außer den Gruppenaxiomen keinen weiteren Relationen genügen.
Dann gilt:

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{Z}$$

und

$$\mathbb{F}_n * \mathbb{F}_m = \mathbb{F}_{n+m}.$$

3.4. **Definition.** Sei G eine Gruppe.
1) Die **Gruppenalgebra** $\mathbb{C}G$ ist die Menge

$$\mathbb{C}G := \{\sum_{g\in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in \mathbb{C} \text{ und nur endlich viele } \alpha_g \neq 0\}.$$

Versehen mit

- punktweiser Addition:
$$\big(\sum \alpha_g g\big) + \big(\sum \beta_g g\big) := \sum(\alpha_g + \beta_g)g$$
- kanonischer Multiplikation:
$$\begin{aligned}\big(\sum \alpha_g g\big) \cdot \big(\sum \beta_h h\big) :&= \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (gh)\\ &= \sum_{k\in G}\big(\sum_{g,h:\, gh=k} \alpha_g\beta_h\big)k\end{aligned}$$
- und Involution:
$$\big(\sum \alpha_g g\big)^* := \sum \bar{\alpha}_g g^{-1}$$

wird $\mathbb{C}G$ zu einer $*$-Algebra.
2) Mit dem kanonischen Zustand

$$\begin{aligned}&\tau_G : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}\\ &\sum \alpha_g g \mapsto \alpha_e \qquad (e \text{ neutrales Element von } G)\end{aligned}$$

erhalten wir also den Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\mathbb{C}G, \tau_G).$$

3.5. **Bemerkung.** 1) Positivität von τ_G ist klar, da

$$\begin{aligned}\tau_G\big((\sum \alpha_g g)(\sum \alpha_h h)^*\big) &= \tau_G\big((\sum \alpha_g g)(\sum \bar{\alpha}_h h^{-1})\big)\\ &= \sum_{g,h:\, gh^{-1}=e} \alpha_g \bar{\alpha}_h\\ &= \sum_g |\alpha_g|^2\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

2) Insbesondere folgt aus 1) also auch, daß τ_G treu ist:

$$\tau_G\big((\sum \alpha_g g)(\sum \alpha_g g)^*\big) = \sum_g |\alpha_g|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha_g = 0 \quad \forall g.$$

3.6. **Satz.** Seien $G_1, \dots, G_m$ Gruppen und

$$G := G_1 * \dots * G_m$$

ihr freies Produkt. Dann sind die $*$-Algebren

$$\mathbb{C}G_1, \dots, \mathbb{C}G_m$$

(betrachtet als Unteralgebren von $\mathbb{C}G$ in kanonischer Weise) frei in dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\mathbb{C}G, \tau_G).$$

Beweis. Seien

$$a_i = \sum_{g \in G_{j(i)}} \alpha_g^{(i)} g \in \mathbb{C}G_{j(i)} \qquad (1 \leq i \leq k)$$

mit

$$j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k)$$

und

$$\tau_G(a_i) = 0, \qquad \text{d.h.} \qquad \alpha_e^{(i)} = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_G(a_1 \dots a_k) &= \tau_G\big(\big(\sum_{g_1 \in G_{j(1)}} \alpha_{g_1}^{(1)} g_1\big) \dots \big(\sum_{g_k \in G_{j(k)}} \alpha_{g_k}^{(k)} g_k\big)\big) \\ &= \sum_{\substack{g_1 \in G_{j(1)}, \dots \\ \dots g_k \in G_{j(k)}}} \alpha_{g_1}^{(1)} \dots \alpha_{g_k}^{(k)} \tau_G(g_1 \dots g_k). \end{aligned}$$

Für alle $g_1, \dots, g_k$ mit

$$\alpha_{g_1}^{(1)} \dots \alpha_{g_k}^{(k)} \neq 0$$

gilt aber:

$$g_i \neq e \quad (i = 1, \dots, k) \qquad \text{und} \qquad j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} \qquad g_1 \dots g_k \neq e \\ &\Longrightarrow \qquad \tau_G(g_1 \dots g_k) = 0. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \qquad \tau_G(a_1 \dots a_k) = 0$
$\Longrightarrow \qquad$ Behauptung. $\square$

3.7. **Bemerkungen.** 1) Man kann die Gruppenalgebren in kanonischer Art und Weise zu C^*-Algebren

$$C_r^*(G) \qquad \text{(reduzierte) Gruppen-}C^*\text{-Algebra}$$

und von Neumann-Algebren

$$L(G) \qquad \text{Gruppen-vN-Algebra}$$

ausdehnen. τ_G dehnt dabei zu Zustand (treu!) auf $C_r^*(G)$ und $L(G)$ aus.
Obiger Satz gilt dann gemäß 2.4 auch in diesen Fällen.
2) Insbesondere gilt also:

$$L(\mathbb{F}_n) \text{ und } L(\mathbb{F}_m) \text{ sind frei in } (L(\mathbb{F}_{n+m}), \tau_{\mathbb{F}_{n+m}}).$$

Dies war der Ausgangspunkt von Voiculescu; er wollte folgendes (immer noch ungelöste) **Isomorphie-Problem der freien Gruppen von Neumann-Algebren** angehen:

$$? \qquad L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_m) \qquad \text{für } n, m \geq 2,\ n \neq m. \qquad ?$$

3) Freeness hat mittlerweile etliche Information über die Struktur der $L(\mathbb{F}_n)$ geliefert.
allgemeine Philosophie: die freien Gruppen vN-Algebren sind die nächst interessante Klasse nach den einfachsten nicht trivialen vN-Algebren (den gut verstandenen hyperfiniten vN-Algebren) und freeness ist das richtige Werkzeug, um diese Klasse zu studieren.

3.8. **Definition.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.
1) Der **volle Fockraum** über $\mathcal{H}$ ist der Hilbertraum

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

wobei

$$\mathcal{H}^{\otimes 0} := \text{ein-dimensionaler Hilbertraum},$$

erzeugt von einem Einheitsvektor

$$\Omega \qquad (\text{‘Vakuum’})$$

(also: die $\mathcal{H}^{\otimes n}$ stehen senkrecht aufeinander und

$$\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \dots \langle f_n, g_n \rangle.)$$

2) Die **Vakuumerwartung** ist der Zustand

$$\tau : B(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}$$
$$a \mapsto \langle \Omega, a\Omega \rangle.$$

3) Für jedes $f \in \mathcal{H}$ definieren wir den **(Links-) Erzeugungsoperator** $l^*(f)$ und den **(Links-) Vernichtungsoperator** $l(f)$ gemäß:

$$l^*(f)\Omega = f$$
$$l^*(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$$

und

$$l(f)\Omega = 0$$
$$l(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = \langle f, h_1\rangle h_2 \otimes \cdots \otimes h_n.$$

3.9. **Bemerkungen.** 1) Man sieht leicht: Die Operatoren $l(f)$ und $l^*(f)$ sind Adjungierte voneinander; sie sind beschränkt und haben die Norm

$$\|l(f)\| = \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

2) Die l, l^* erfüllen folgende **Cuntz-Relationen**

$$l(f)l^*(g) = \langle f, g\rangle 1.$$

3) Sei f Einheitsvektor. Eingeschränkt auf

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}f) \qquad \hat{=} \qquad \text{Hilbertraum mit Basis } (e_n)_{n=0}^{\infty},$$

wobei

$$e_0 := \Omega$$
$$e_n := f^{\otimes n} \qquad (n \geq 1),$$

wirkt $l := l(f)$ als einseitiger Shift (vgl 1.10):

$$l\Omega = 0$$
$$lf^{\otimes n} = f^{\otimes(n-1)} \qquad (n \geq 1).$$

$$\Longrightarrow \qquad l(f) + l^*(f) \qquad \text{ist Halbkreiselement für jedes } f \in \mathcal{H}.$$

3.10. **Satz.** Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum

$$(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau) \qquad \text{für einen Hilbertraum } \mathcal{H}.$$

Sei $e_1, \ldots, e_m \in \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem, d.h.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Setze

$$\mathcal{A}_i := \operatorname{alg}(l(e_i), l^*(e_i)) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Dann sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ frei.

Beweis. Setze
$$l_i := l(e_i), \qquad l_i^* := l^*(e_i).$$
Sei
$$a_i = \sum_{n,m\geq 0} \alpha_{n,m}^{(i)} l_{j(i)}^{*n} l_{j(i)}^m \in \mathcal{A}_{j(i)} \qquad (i = 1, \dots, k)$$
mit
$$j(1) \neq j(2) \neq \cdots \neq j(k)$$
und
$$\tau(a_i) = \alpha_{0,0}^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, \dots, k).$$
Dann ist
$$\begin{aligned}\tau(a_k \dots a_1) &= \tau\big(\big(\sum_{n_k,m_k\geq 0} \alpha_{n_k,m_k}^{(k)} l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k}\big) \dots \big(\sum_{n_1,m_1\geq 0} \alpha_{n_1,m_1}^{(1)} l_{j(1)}^{*n_1} l_{j(1)}^{m_1}\big)\big) \\ &= \sum_{n_1,m_1,\dots,n_k,m_k\geq 0} \alpha_{n_k,m_k}^{(k)} \dots \alpha_{n_1,m_1}^{(1)} \tau\big(l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k} \dots l_{j(1)}^{*n_1} l_{j(1)}^{m_1}\big).\end{aligned}$$
Nun gilt für alle Terme mit $(n_i, m_i) \neq (0, 0)$ $(i = 1, \dots, k)$
$$\begin{aligned}\tau\big(l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k} \dots l_{j(1)}^{*n_1} l_{j(1)}^{m_1}\big) &= \langle \Omega, l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k} \dots l_{j(1)}^{*n_1} l_{j(1)}^{m_1} \Omega\rangle \\ &= \delta_{m_1 0} \langle \Omega, l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k} \dots l_{j(2)}^{*n_2} l_{j(2)}^{m_2} e_{j(1)}^{\otimes n_1}\rangle \\ &= \delta_{m_1 0}\delta_{m_2 0} \langle \Omega, l_{j(k)}^{*n_k} l_{j(k)}^{m_k} \dots l_{j(3)}^{*n_3} l_{j(3)}^{m_3} e_{j(2)}^{\otimes n_2} \otimes e_{j(1)}^{\otimes n_1}\rangle \\ &= \dots \\ &= \delta_{m_1 0} \dots \delta_{m_k 0} \langle \Omega, e_{j(k)}^{\otimes n_k} \otimes \cdots \otimes e_{j(1)}^{\otimes n_1}\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \qquad \tau(a_k \dots a_1) = 0$
$\Longrightarrow \qquad$ Behauptung. $\square$

3.11. **Definition.** Eine Familie $\{s_1, \dots, s_m\}$ heißt **Halbkreis-Familie**, falls die $s_1, \dots, s_m$ frei sind und jedes s_i $(i = 1, \dots, m)$ ein Halbkreis-Element (vom Radius 2) ist.

3.12. **Bemerkung.** 1) Die $\{l(e_1) + l^*(e_1), \dots, l(e_m) + l^*(e_m)\}$ aus 3.10 bilden also eine Halbkreis-Familie.
2) Beachte: τ ist auf $B(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ natürlich nicht treu, da z.B. mit $l := l(f)$
$$\tau(l^* l) = 0, \qquad \text{obwohl} \qquad l \neq 0.$$
Somit enthält τ keine Information über den selbstadjungierten Operator $l^* l$, es gilt
$$\mu_{l^* l} = \delta_0.$$
3) Auf den Summen von Erzeugern+Vernichtern wird τ allerdings treu.

3.13. **Satz.** Sei $(e_i)_{i=1}^{\dim(\mathcal{H})}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und setze
$$s_i := l(e_i) + l^*(e_i) \qquad (i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H})).$$
Sei $\mathcal{A}$ die C^*-Algebra
$$\mathcal{A} := C^*(s_i \mid i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H})) \subset B(\mathcal{F}(\mathcal{H})).$$
Dann ist die Einschränkung
$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{A} &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto \langle \Omega, a\Omega \rangle \end{aligned}$$
treu.

3.14. **Bemerkung.** 1) Beachte: die Wahl einer Basis ist wichtig, Satz gilt nicht für
$$\tilde{\mathcal{A}} := C^*(l(f) + l^*(f) \mid f \in \mathcal{H}).$$
denn: l^* linear und l anti-linear in seinem Argument, d.h.
$$l^*(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha l^*(f_1) + \beta l^*(f_2)$$
und
$$l(\alpha f_1 + \beta f_2) = \bar{\alpha} l(f_1) + \bar{\beta} l(f_2),$$
und somit
$$(2+2i) l^*(f) = \big(l^*(f+if) + l(f+if)\big) + i\big(l^*(f-if) + l(f-if)\big).$$
Erlaubt sind nur reelle Linearkombinationen von den Basisvektoren!
2) Satz gilt auch für vN-Algebra
$$\mathcal{A} := vN(s_i \mid i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H})) \subset B(\mathcal{F}(\mathcal{H})).$$
Der folgende Beweis ist typisch für von Neumann-Algebren.

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$ mit
$$0 = \tau(a^*a) = \langle \Omega, a^*a\Omega \rangle = \langle a\Omega, a\Omega \rangle = 0,$$
d.h.
$$a\Omega = 0.$$
Zu zeigen ist:
$$a = 0 \qquad !$$
Wir müssen also zeigen: Die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \mathcal{F}(\mathcal{H}) \\ a &\mapsto a\Omega \end{aligned}$$
ist injektiv.
Sei $a \in \mathcal{A}$ mit $a\Omega = 0$ gegeben.
Idee: Zu zeigen ist
$$a\eta = 0 \qquad \forall \eta \in \mathcal{F}(\mathcal{H});$$

reicht aus, dies für η der Form

$$\eta = e_{j(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j(k)}$$

für

$$k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad 1 \leq j(1), \dots, j(k) \leq \dim(\mathcal{H})$$

zu zeigen, da Linearkombinationen davon eine dichte Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ erzeugen.
Nun versuche, solches η zu schreiben als

$$\eta = b\Omega \qquad \text{mit einem } b \in B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \text{ so daß} \qquad ab = ba;$$

dann gilt ja

$$a\eta = ab\Omega = ba\Omega = 0.$$

Wir müssen also zeigen: Die Kommutante

$$\mathcal{A}' := \{b \in B(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \mid ab = ba \quad \forall a \in \mathcal{A}\}$$

ist hinreichend groß.
Wir können solche b aber explizit konstruieren mit Hilfe der **Rechtserzeuger** $r^*(g)$ und **Rechtsvernichter** $r(g)$:

$$r^*(g)\Omega = g$$
$$r^*(g)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \otimes g$$

und

$$r(g)\Omega = 0$$
$$r(g)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = \langle g, h_n\rangle h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n-1}.$$

($r(g)$ und $r^*(g)$ sind wiederum Adjungierte.)
Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\big(l(f) + l^*(f)\big)\big(r(g) + r^*(g)\big) &= l(f)r(g) + l^*(f)r^*(g) + \big(l(f)r^*(g) + l^*(f)r(g)\big) \\
&\overset{(*)}{=} r(g)l(f) + r^*(g)l^*(f) + \big(r^*(g)l(f) + r(g)l^*(f)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } \langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle \\
&= \big(r(g) + r^*(g)\big)\big(l(f) + l^*(f)\big).
\end{aligned}$$

$(*)$ gilt, da es Probleme nur bei Wirkung auf Vakuum geben kann und dort gilt:

$$\big(l(f)r^*(g) + l^*(f)r(g)\big)\Omega = l(f)g + 0 = \langle f, g\rangle\Omega$$

und

$$\big(r^*(g)l(f) + r(g)l^*(f)\big)\Omega = 0 + r(g)f = \langle g, f\rangle\Omega.$$

Setze nun

$$d_i := r(e_i) + r^*(e_i) \qquad (i = 1 \dots, \dim(\mathcal{H})).$$

Dann gilt insbesondere:

$$s_i d_j = d_j s_i \qquad \forall i, j.$$

Dies überträgt sich auf Polynome in den s und den d und durch Stetigkeit auf die davon erzeugte C^*-Algebra (und sogar auf die vN-Algebra). Also mit

$$\mathcal{B} := C^*(d_i \mid i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}))$$

gilt

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'.$$

Weiterhin gilt: Sei

$$\eta = e_{j(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j(k)}.$$

Dann gibt es ein

$$b \in \mathcal{B} \qquad \text{mit} \qquad b\Omega = \eta.$$

Beweis mit Induktion nach k.

- $k = 0$
$$1\Omega = \Omega$$
- $k = 1$
$$d_i \Omega = (r(e_i) + r^*(e_i))\Omega = e_i$$
- $k - 1 \to k$: Es gilt
$$\begin{aligned} d_{j(k)} \dots d_{j(1)} \Omega &= \big(r(e_{j(k)}) + r^*(e_{j(k)})\big) \dots \big(r(e_{j(1)}) + r^*(e_{j(1)})\big)\Omega \\ &= e_{j(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j(k)} + \eta', \end{aligned}$$
wobei
$$\eta' \in \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathcal{H}^{\otimes j}$$
nach Induktionsvoraussetzung von der Gestalt
$$\eta' = b'\Omega \qquad \text{mit} \qquad b' \in \mathcal{B}.$$

Somit folgt Behauptung. □

3.15. **Bemerkung.** 1) Beispiele für die Darstellung $b\Omega = \eta$ im letzten Beweisschritt: Sei $d := d_i$ und $e := e_i$, dann gilt

$$d^2\Omega = r^* r^* \Omega + r r^* \Omega = e \otimes e + \Omega,$$

also

$$(d^2 - 1)\Omega = e \otimes e.$$

Oder

$$d^4 \Omega = e^{\otimes 4} + 3e^{\otimes 2} + 2\Omega,$$

also

$$(d^4 - 3d^2 + 2)\Omega = e^{\otimes 4}.$$

2) Auf dem Niveau von vN-Algebren fallen die beiden betrachteten Beispiele zusammen:

$$L(\mathbb{F}_n) \cong vN(s_i \mid i = 1, \dots, n).$$