FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

4. Der freie zentrale Grenzwertsatz

4.1. **Definition.** Seien $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $(\mathcal{A}, \varphi)$ Wahrscheinlichkeitsräume und

$$a_n \in \mathcal{A}_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Wir sagen, a_n **konvergiert in Verteilung** gegen a für $n \to \infty$ und schreiben

$$a_n \xrightarrow{\text{Vert}} a,$$

falls gilt:

$$\mu_{a_n} \to \mu_a \qquad \text{punktweise},$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(a_n^k) = \varphi(a^k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

4.2. **Bemerkung.** Seien a_n und a selbstadjungiert und μ_{a_n} und μ_a somit Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Dann bedeutet 'Konvergenz in Verteilung' in der üblichen Wahrscheinlichkeitstheorie, daß

$$\mu_{a_n} \to \mu_a \qquad \text{schwach},$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \int f(t) d\mu_{a_n}(t) = \int f(t) d\mu_a(t) \qquad \text{für alle stetigen } f.$$

Ist a beschränkt, hat also μ_a kompakten Träger (oder ist allgemeiner μ_a durch seine Momente bestimmt), so ist dies äquivalent zu unserer Definition.

4.3. **Erinnerung: der klassische zentrale Grenzwertsatz.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $a_1, a_2, \dots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariable (d.h. $\mu_{a_i} = \mu_{a_j}$ für alle i, j). Außerdem gelte

$$\varphi(a_i) = 0 \qquad (i \in \mathbb{N})$$

und

$$\varphi(a_i^2) = 1 \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Vert}} N,$$

wobei N eine Normalverteilung mit Varianz 1 ist.
Konkret bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\big(\big(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}\big)^k\big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int t^k e^{-t^2/2} dt \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

4.4. **Satz (freier zentraler Grenzwertsatz).** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $a_1, a_2, \dots$ eine Folge freier und identisch verteilter Zufallsvariable. Außerdem gelte

$$\varphi(a_i) = 0 \qquad (i \in \mathbb{N})$$

und

$$\varphi(a_i^2) = 1 \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Vert}} s,$$

wobei s ein Halbkreiselement mit Radius 2 ist.
Konkret bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\big(\big(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}\big)^k\big) = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ C_{k/2}, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis. Es gilt

$$\varphi\big((a_1 + \cdots + a_n)^k\big) = \sum_{1 \le i(1),\dots,i(k) \le n} \varphi(a_{i(1)} \dots a_{i(k)}).$$

Wegen identischer Verteilung und (2.5) gilt nun

$$\varphi(a_{i(1)} \dots a_{i(k)}) = \varphi(a_{j(1)} \dots a_{j(k)})$$

falls

$$i(p) = i(q) \quad \Longleftrightarrow \quad j(p) = j(q) \qquad \forall \quad 1 \le p, q \le k.$$

Beschreibe diese Situation durch Partition

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$$

d.h.

$$\{1, \dots, k\} = \dot\bigcup_{s=1}^r V_s,$$

wobei

$$i(p) = i(q) \quad \Longleftrightarrow \quad p \text{ und } q \text{ sind in der gleichen Menge } V_m$$
$$\text{(wir schreiben dafür } p \sim_\pi q)$$

und setze

$$\varphi(\pi) = \varphi(a_{i(1)} \dots a_{i(k)}) \qquad \text{falls} \qquad (i(1), \dots, i(k)) \hat{=} \pi.$$

Beispiel:

$$\varphi(\{(1,3,4),(2,5),(6)\}) = \varphi(a_1 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3) = \varphi(a_7 a_5 a_7 a_7 a_5 a_3).$$

Dann gilt also

$$\varphi\big((a_1 + \dots + a_n)^k\big) = \sum_{\substack{\pi \text{ Partition} \\ \text{von } \{1,\dots,k\}}} \varphi(\pi) \cdot \#\{(i(1),\dots,i(k)) \hat{=} \pi\}$$

Beachte nun: Gilt

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \qquad \text{mit} \qquad V_m = \{i\}$$

(für ein m und ein i), so haben wir

$$\begin{aligned}
\varphi(\pi) &= \varphi(a_{i(1)} \dots a_i \dots a_{i(k)}) \\
&= \varphi(a_i) \cdot \varphi(a_{i(1)} \dots \check{a}_i \dots a_{i(k)}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da

$$\{a_{i(1)}, \dots, \check{a}_i, \dots, a_{i(k)}\} \qquad \text{frei von } a_i.$$

Somit geben nur π Beitrag mit

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \qquad \text{wobei} \qquad \#V_m \geq 2 \quad \forall m = 1, \dots, r.$$

Andererseits

$$\#\{(i(1),\dots,i(k)) \hat{=} \pi\} = n(n-1)\dots(n-r+1) \approx n^r$$

falls $\pi = \{V_1, \dots, V_r\}$.
Somit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\big(\frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}}\big)^k\Big) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\pi} \frac{\#\{(i(1),\dots,i(k)) \hat{=} \pi\}}{n^{k/2}} \varphi(\pi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\pi} n^{r-(k/2)} \varphi(\pi) \\
&= \sum_{\substack{\pi = \{V_1,\dots,V_{k/2}\} \\ \text{wobei } \#V_m = 2\, \forall m = 1,\dots,k/2}} \varphi(\pi)
\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\big(\frac{a_1 + \dots + a_n}{\sqrt{n}}\big)^k\Big) = 0 \qquad \text{falls } k \text{ ungerade.}$$

Sei also nun k gerade und

$$\pi = \{V_1, \dots, V_{k/2}\} \qquad \#V_m = 2\, \forall m$$

eine Paar-Partition von $\{1,\dots,k\}$. Dann gibt es folgende zwei Möglichkeiten für ein

$$(i(1),\dots,i(k))\hat{=}\pi.$$

- alle benachbarten Indizes sind verschieden:

  $$i(1)\neq i(2)\neq\cdots\neq i(k).$$

  Da

  $$\varphi(a_{i(m)})=0 \qquad \forall\, m=1,\dots,k$$

  folgt nach Definition von 'frei'

  $$\varphi(\pi)=\varphi(a_{i(1)}\dots a_{i(k)})=0.$$

- zwei benachbarte Indizes stimmen überein, z.B.

  $$i(m)=i(m+1) \qquad \text{für ein } m=1,\dots,k-1.$$

  Dann gilt

  $$\begin{aligned}\varphi(\pi)&=\varphi(a_{i(1)}\dots a_{i(m)}a_{i(m+1)}\dots a_{i(k)})\\&=\varphi(a_{i(1)}\dots a_{i(m-1)}a_{i(m+2)}\dots a_{i(k)})\varphi(a_{i(m)}a_{i(m+1)})\\&=\varphi(a_{i(1)}\dots a_{i(m-1)}a_{i(m+2)}\dots a_{i(k)})\end{aligned}$$

Durch sukzessives Anwenden obiger beiden Möglichkeiten erhalten wir schließlich:

- π hat die Eigenschaft, daß wir sukzessive jeweils zwei benachbarte gleiche Indizes finden können; dann gilt

  $$\varphi(\pi)=1.$$

- π hat nicht diese Eigenschaft, d.h. es gibt

  $$p_1<p_2<q_1<q_2 \qquad \text{mit} \qquad p_1\sim_\pi q_1\not\sim_\pi p_2\sim_\pi q_2.$$

  Solche π nennen wir **kreuzend**. Für diese gilt

  $$\varphi(\pi)=0.$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\varphi\big((\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}})^k\big)=D_k$$

wobei

$$D_k:=\#\{\pi\mid\pi \text{ nicht-kreuzende Paar-Partition von } \{1,\dots,k\}\}.$$

Bleibt zu zeigen

$$D_k=C_{k/2}.$$

Zwei Möglichkeiten dies einzusehen:

- Rekursionsbeziehung für Catalan-Zahlen: Sei

  $$\pi = \{V_1, \dots, V_{k/2}\} \qquad \text{nicht-kreuzende Paar-Partition,}$$

  wobei

  $$V_1 = (1, m).$$

  Dann muß für jedes V_j $(j \neq 1)$ gelten

  $$\text{entweder} \qquad 1 < V_j < m \qquad \text{oder} \qquad 1 < m < V_j,$$

  (insbesondere also m gerade)
  d.h.

  $$\pi|_{\{2,\dots,m-1\}} \quad \text{nicht-kreuzende Paar-Partition von } \{2, \dots, m-1\}$$

  und

  $$\pi|_{\{m+1,\dots,k\}} \quad \text{nicht-kreuzende Paar-Partition von } \{m+1, \dots, k\}.$$

  Von ersteren gibt es D_{m-2}, von letzteren D_{k-m}. Beide Möglichkeiten sind unabhängig voneinander, und m kann alle geraden Zahlen von 2 bis k annehmen, also

  $$D_k = \sum_{m=2,4,\dots,k-2,k} D_{m-2} D_{k-m}.$$

  Da $D_2 = 1$ liefert dies

  $$D_k = C_{k/2} \qquad \text{(falls } k \text{ gerade).}$$

- direkte Bijektion auf Catalan-Pfade:

  $$\pi \mapsto (i_1, \dots, i_k)$$

  gemäß

  $$\begin{aligned} i_m &= +1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \text{ ist erstes Element in einem } V_j \in \pi \\ i_m &= -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \text{ ist zweites Element in einem } V_j \in \pi \end{aligned}$$

  Beispiel:

  $$\pi = \{(1,4), (2,3), (5,6)\} \qquad \hat{=} \qquad (+1, +1, -1, -1, +1, -1)$$

  und

  $$\varphi(\pi) = \tau(ll^*lll^*l^*).$$

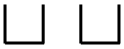
$\square$

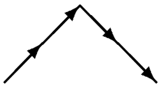
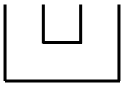
4.5. **Beispiele.** Betrachte folgende Beispiele für die Bijektion zwischen nicht-kreuzenden Paar-Partitionen und Catalan-Pfaden.

- $k = 2$

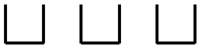
 $\hat{=}$ 

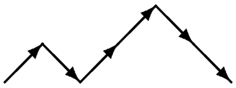
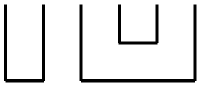
- $k = 4$

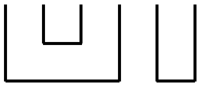
 $\hat{=}$ 

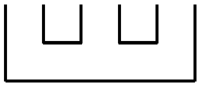
 $\hat{=}$ 

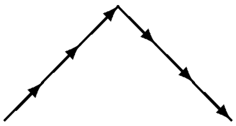
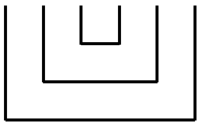
- $k = 6$

 $\hat{=}$ 

 $\hat{=}$ 

 $\hat{=}$ 

 $\hat{=}$ 

 $\hat{=}$ 

4.6. **Bemerkungen.** 1) Die Halbkreis-Verteilung ist somit als das freie Analogon der Gauß-Verteilung anzusehen.
2) Wie im klassischen Fall können die Voraussetzungen an die Verteilungen im zentralen GWS abgeschwächt werden. Man sieht leicht, daß obiger Beweis auch ohne Voraussetzung 'identisch verteilt' funktioniert, falls man fordert

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\varphi(a_i^k)| < \infty \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Voraussetzung an das zweite Moment kann verallgemeinert werden zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i^2) = 1.$$

3) Ersetzt man

$$\varphi(a_i^2) = 1 \qquad \text{durch} \qquad \varphi(a_i^2) = \sigma^2\,(>0),$$

so erfolgt Konvergenz gegen Halbkreiselement vom Radius $r = 2\sigma$.

$$\text{Radius } r = 2 \qquad \hat{=} \qquad \text{Varianz } \sigma^2 = 1$$