FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

5. Konstruktion von freien Produkten

5.1. **Satz.** Seinen $(\mathcal{A}_1, \varphi_1), \dots, (\mathcal{A}_m, \varphi_m)$ Wahrscheinlichkeitsräume. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ mit

$$\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}, \qquad \varphi|_{\mathcal{A}_i} = \varphi_i$$

und

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \text{ sind frei in } (\mathcal{A}, \varphi).$$

5.2. **Bemerkung.** Genauer ist dies natürlich folgendermaßen zu verstehen: es gibt $(\tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\varphi}_i)$, welche $*$-isomorph zu $(\mathcal{A}_i, \varphi_i)$ sind für $i = 1, \dots, m$, so daß für diese $(\tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ obiges gilt.

Beweis. Nehme als $\mathcal{A}$ das algebraische freie Produkt der $\mathcal{A}_i$ mit Identifizierung der Einsen (analog zum freien Produkt von Gruppen):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} :&= \mathcal{A}_1 * \dots * \mathcal{A}_m \\ &= \frac{\mathcal{A}_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{A}_m}{\text{Relationen der einzelnen } \mathcal{A}_i \text{ und } 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}_i}\ \forall\, i} \end{aligned}$$

Konkret kann dies folgerndermaßen beschrieben werden: Setze

$$\mathcal{A}_i^o := \{a \in \mathcal{A}_i \mid \varphi_i(a) = 0\},$$

so daß gilt

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^o \oplus \mathbb{C}1 \qquad \text{als Vektorraum.}$$

Dann ist als linearer Raum

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}1 \oplus \bigoplus_{j(1)} \mathcal{A}_{j(1)}^o \oplus \bigoplus_{j(1) \neq j(2)} (\mathcal{A}_{j(1)}^o \otimes \mathcal{A}_{j(2)}^o) \oplus \bigoplus_{j(1) \neq j(2) \neq j(3)} (\mathcal{A}_{j(1)}^o \otimes \mathcal{A}_{j(2)}^o \otimes \mathcal{A}_{j(3)}^o) \oplus \dots.$$

Multiplikation wird gegeben durch Hintereinanderschreiben von Elementen und anschließendes Reduzieren auf obige Form.
Beispiel: Sei

$$a_i \in \mathcal{A}_i^o \qquad i = 1, 2.$$

Dann

$$a_1 a_2 \hat{=} a_1 \otimes a_2, \qquad a_2 a_1 \hat{=} a_2 \otimes a_1$$

und

$$\begin{aligned}(a_1 a_2)(a_2 a_1) &= a_1\big((a_2^2)^o + \varphi_2(a_2^2)1\big)a_1 \\ &= a_1(a_2^2)^o a_1 + \varphi_2(a_2^2)a_1 a_1 \\ &= a_1(a_2^2)^o a_1 + \varphi_2(a_2^2)\big((a_1^2)^o + \varphi_1(a_1^2)1\big) \\ &\hat{=} (a_1 \otimes (a_2^2)^o \otimes a_1) \oplus \varphi_2(a_2^2)(a_1^2)^o \oplus \varphi_2(a_2^2)\varphi_1(a_1^2)1\end{aligned}$$

Somit: $\mathcal{A}$ wird linear erzeugt von Elementen der Form

$$a = a_1 \dots a_k \qquad \text{mit} \qquad a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}^o, \quad j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k)$$

für beliebige $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$k = 0 \qquad \hat{=} \qquad a = 1.$$

$\mathcal{A}$ wird zur $*$-Algebra mit der Involution

$$a^* = a_k^* \dots a_1^*$$

für obiges a.
Beachte dabei

$$\varphi_{j(i)}(a_i^*) = \overline{\varphi_{j(i)}(a_i)} = 0,$$

d.h. a^* ist wieder von gewünschter Form.
Definiere nun lineares Funktional

$$\mathcal{A} \to \mathbb{C}$$

für a wie oben durch

$$\varphi(a) := \begin{cases} 0, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

und lineare Fortsetzung.
Nach Definition von φ sind die $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ frei in $(\mathcal{A}, \varphi)$ und es gilt für $b \in \mathcal{A}_i$

$$\varphi(b) = \varphi(b^o + \varphi_i(b)1) = \varphi_i(b)\varphi(1) = \varphi_i(b),$$

d.h.

$$\varphi|_{\mathcal{A}_i} = \varphi_i.$$

Bleibt noch zu zeigen: φ ist positiv!
Dazu folgendes

5.2.1. *Lemma.* Seien $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ frei in $(\mathcal{A}, \varphi)$ und a und b alternierende Wörter der Form

$$a = a_1 \dots a_k \qquad a_i \in \mathcal{A}^o_{j(i)},\ j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k)$$

und

$$b = b_1 \dots b_l \qquad b_i \in \mathcal{A}^o_{r(i)},\ r(1) \neq r(2) \neq \dots \neq r(l).$$

Dann gilt:

$$\varphi(ab^*) = \begin{cases} \varphi(a_1 b_1^*) \dots \varphi(a_k b_k^*), & \text{falls } k = l,\ j(1) = r(1),\ \dots\ , j(k) = r(k). \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Iteriere folgende Beobachtung: Entweder gilt $j(k) \neq r(l)$, dann ist

$$\varphi(ab^*) = \varphi(a_1 \dots a_k b_l^* \dots b_1^*) = 0,$$

oder wir haben $j(k) = r(l)$, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(ab^*) &= \varphi(a_1 \dots a_{k-1}((a_k b_l^*)^o + \varphi(a_k b_l^*)1) b_{l-1}^* \dots b_1^*) \\ &= 0 + \varphi(a_k b_l^*) \varphi(a_1 \dots a_{k-1} b_{l-1}^* \dots b_1^*). \end{aligned}$$

□

Sei nun $a \in \mathcal{A}$. Dann können wir es schreiben in der Form

$$a = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k)}} a_{(j(1), \dots, j(k))}$$

wobei

$$a_{(j(1), \dots, j(k))} \in \mathcal{A}^o_{j(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^o_{j(k)}.$$

Nach obigem Lemma gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi(aa^*) &= \sum_{\substack{k,l \\ j(1) \neq \dots \neq j(k) \\ r(1) \neq \dots \neq r(l)}} \varphi(a_{(j(1), \dots, j(k))} a^*_{(r(1), \dots, r(l))}) \\ &= \sum_{\substack{k \\ j(1) \neq \dots \neq j(k)}} \varphi(a_{(j(1), \dots, j(k))} a^*_{(j(1), \dots, j(k))}). \end{aligned}$$

Somit bleibt zu zeigen

$$\varphi(bb^*) \geq 0$$

für alle

$$b = a_{(j(1), \dots, j(k))} \in \mathcal{A}^o_{j(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^o_{j(k)},$$

wobei

$$k \in \mathbb{N},\ j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k).$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $j(1) \neq j(2) \neq \cdots \neq j(k)$ fixiert und ein solches b gegeben. Dieses können wir in der Form

$$b = \sum_{p \in I} a_1^{(p)} \dots a_k^{(p)}$$

mit

$$a_i^{(p)} \in \mathcal{A}_{j(i)}^o \qquad \forall p \in I$$

schreiben (wobei I eine endliche Indexmenge ist).
Somit

$$\begin{aligned} \varphi(bb^*) &= \sum_{p,q} \varphi(a_1^{(p)} \dots a_k^{(p)} a_k^{(q)*} \dots a_1^{(q)*}) \\ &= \sum_{p,q} \varphi(a_1^{(p)} a_1^{(q)*}) \dots \varphi(a_k^{(p)} a_k^{(q)*}). \end{aligned}$$

Um einzusehen, daß dies positiv ist, brauchen wir folgendes Lemma.

5.2.2. *Lemma.* Sei $\mathcal{A}$ eine $*$-Algebra und

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$$

ein lineares Funktional. Dann sind äquivalent

i) φ ist Zustand
ii) für alle n und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ ist die Matrix

$$\big(\varphi(a_i a_j^*)\big)_{i,j=1}^n \in M_n$$

positiv, d.h. alle Eigenwerte sind ≥ 0.
iii) für alle n und alle $a_1, \dots, a_n$ gibt es $\alpha_i^{(r)} \in \mathbb{C}$ $(i, r = 1, \dots, n)$, so daß

$$\varphi(a_i a_j^*) = \sum_{r=1}^n \alpha_i^{(r)} \bar{\alpha}_j^{(r)} \qquad \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

Beweis. i) $\Longrightarrow$ ii): Sei φ Zustand und $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ fest. Dann gilt für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq \varphi\big((\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j)^*\big) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(a_i a_j^*);$$

dies bedeutet aber gerade, daß die Matrix $\big(\varphi(a_i a_j^*)\big)$ positiv ist.
ii) $\Longrightarrow$ iii): Sei $A = \big(\varphi(a_i a_j^*)\big)$ positiv. Da A symmetrisch, kann es diagonalisiert werden in der Form

$$A = UDU^*$$

mit

$$U = (u_{ij}) \quad \text{unitär} \qquad \text{und} \qquad D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{Diagonalmatrix.}$$

Somit

$$\varphi(a_i a_j^*) = \sum_{r=1}^{n} u_{ir}\lambda_r u_{rj}^* = \sum_{r=1}^{n} u_{ir}\lambda_r \bar{u}_{jr}.$$

Da A positiv, sind alle $\lambda_i \geq 0$. Setze

$$\alpha_i^{(r)} := u_{ir}\sqrt{\lambda_r}.$$

$\Longrightarrow$ Behauptung
iii) $\Longrightarrow$ i): klar, da für $n = 1$

$$\varphi(a_1 a_1^*) = \alpha_1^{(1)}\bar{\alpha}_1^{(1)} \geq 0.$$

$\square$

Somit gibt es nun für jedes $i = 1, \ldots, k$ und $p \in I$ Zahlen $\alpha_{i,p}^{(r)}$ $(r \in I)$, so daß gilt

$$\varphi(a_i^{(p)} a_i^{(q)*}) = \sum_{r\in I} \alpha_{i,p}^{(r)}\bar{\alpha}_{i,q}^{(r)}.$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\varphi(bb^*) &= \sum_{p,q}\sum_{r_1,\ldots,r_k} \alpha_{1,p}^{(r_1)}\bar{\alpha}_{1,q}^{(r_1)}\ldots\alpha_{k,p}^{(r_k)}\bar{\alpha}_{k,q}^{(r_k)} \\
&= \sum_{r_1,\ldots,r_k}\Big(\sum_p \alpha_{1,p}^{(r_1)}\ldots\alpha_{k,p}^{(r_k)}\Big)\Big(\sum_q \bar{\alpha}_{1,q}^{(r_1)}\ldots\bar{\alpha}_{k,q}^{(r_k)}\Big) \\
&= \sum_{r_1,\ldots,r_k}\Big|\sum_p \alpha_{1,p}^{(r_1)}\ldots\alpha_{k,p}^{(r_k)}\Big|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\square$

5.3. **Bemerkung.** Der letzte Teil des Beweises bestand darin zu zeigen, daß das punktweise (sogenannte Schur-) Produkt von positiven Matrizen wieder positiv ist. Diese Tatsache entspricht der Aussage, daß das Tensorprodukt von Zuständen wieder ein Zustand ist.

5.4. **Notation.** Den in Satz 5.1 konstruierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ bezeichnen wir als das **freie Produkt** der Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathcal{A}_i, \varphi_i)$ und schreiben:

$$(\mathcal{A}, \varphi) = (\mathcal{A}_1, \varphi_1) * \ldots * (\mathcal{A}_m, \varphi_m).$$

5.5. **Beispiel.** Seien $G_1, \ldots, G_m$ Gruppen und

$$G = G_1 * \ldots * G_m$$

ihr freies Produkt. Dann gilt

$$(\mathbb{C}G, \tau_G) = (\mathbb{C}G_1, \tau_{G_1}) * \ldots * (\mathbb{C}G_m, \tau_{G_m}).$$

Im Rahmen von C^*-Wahrscheinlichkeitsräumen sollte das entsprechende freie Produkt auch wieder ein C^*-Wahrscheinlichkeitsraum sein, also durch Operatoren auf Hilberträumen realisiert werden. Gemäß GNS-Konstruktion reduziert sich der allgemeine C^*-Fall auf folgenden Satz.

5.6. **Satz.** Seien $(\mathcal{A}_1, \varphi_1), \ldots, (\mathcal{A}_m, \varphi_m)$ C^*-Wahrscheinlichkeitsräume der Form $(i = 1, \ldots, m)$

$$\mathcal{A}_i \subset B(\mathcal{H}_i) \qquad \text{wobei } \mathcal{H}_i \text{ Hilbertraum}$$

und

$$\varphi_i(a) = \langle \eta_i, a\eta_i \rangle \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}_i,$$

wobei

$$\eta_i \in \mathcal{H}_i \qquad \text{Einheitsvektor.}$$

Dann gibt es einen C^*-Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ der Form

$$\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$$

und

$$\varphi(a) = \langle \eta, a\eta \rangle \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}$$

– wobei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $\eta \in \mathcal{H}$ Einheitsvektor – so daß

$$\mathcal{A}_i \underset{\sim}{\subset} \mathcal{A}, \qquad \varphi|_{\mathcal{A}_i} = \varphi_i,$$

$$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m \text{ sind frei in } (\mathcal{A}, \varphi).$$

und

$$\mathcal{A} = C^*(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m).$$

Beweis. Idee: Wir konstruieren, analog zum freien Produkt für Gruppen oder Algebren, den Hilbertraum $\mathcal{H}$ als freies Produkt der Hilberträume $\mathcal{H}_i$ und lassen die $\mathcal{A}_i$ durch Linkswirkung auf diesem $\mathcal{H}$ wirken. Wir setzen

$$\mathcal{H}_i^o := (\mathbb{C}\eta_i)^\perp,$$

somit also

$$\mathcal{H}_i = \mathbb{C}\eta_i \oplus \mathcal{H}_i^o.$$

Definiere nun

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}\eta \oplus \bigoplus_{j(1)} \mathcal{H}^o_{j(1)} \oplus \bigoplus_{j(1)\neq j(2)} (\mathcal{H}^o_{j(1)} \otimes \mathcal{H}^o_{j(2)}) \oplus \bigoplus_{j(1)\neq j(2)\neq j(3)} (\mathcal{H}^o_{j(1)} \otimes \mathcal{H}^o_{j(2)} \otimes \mathcal{H}^o_{j(3)}) \oplus \dots,$$

wobei

$$\eta \hat{=} \text{Identifikation aller } \eta_i$$

ein formaler Einheitsvektor in $\mathcal{H}$ ist.
Wir lassen die $\mathcal{A}_i$ nun folgendermaßen durch eine Darstellung

$$\pi_i : \mathcal{A}_i \to B(\mathcal{H})$$

auf diesen Raum wirken: $\pi_i(a)$ (für $a \in \mathcal{A}_i$) wirkt von links; ist die erste Komponente in $\mathcal{H}^o_i$, so wirkt $\pi_i(a)$ dort wie a, ansonsten denken wir uns noch ein η vornedran und darauf wirkt $\pi_i(a)$ wie a auf η_i, also: Sei

$$a\eta_i = \lambda\eta_i + \xi^o \qquad \text{mit} \qquad \xi^o \in \mathcal{H}^o_i.$$

Dann ist

$$\pi_i(a)\eta = \lambda\eta + \xi^o \subset \mathcal{H}$$

und für $\xi_i \in \mathcal{H}^o_{j(i)}$ mit $i \neq j(1) \neq j(2) \neq \dots$

$$\begin{aligned}
\pi_i(a)\xi_1 \otimes \xi_2 \dots &\hat{=} \pi_i(a)\eta \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \\
&= (a\eta_i) \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \\
&= \lambda\eta \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots + \xi^o \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \\
&= \lambda\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots + \xi^o \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \\
&\subset \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

(Die Definition von den π_i kann man exakt machen, durch einen unitären Operator, der Elemente aus $\mathcal{H}$ in eine erste Komponente aus $\mathcal{H}_i$ und den Rest zerlegt; dazu siehe Literatur)
Die π_i sind treue Darstellungen von $\mathcal{A}_i$

$$\Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_i \cong \pi_i(\mathcal{A}_i) \subset B(\mathcal{H}).$$

Wir setzen nun natürlich

$$\mathcal{A} := C^*(\pi_1(\mathcal{A}_1), \dots, \pi_m(\mathcal{A}_m))$$

und

$$\varphi(a) := \langle \eta, a\eta \rangle \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}.$$

Sei $a \in \mathcal{A}_i$, dann gilt:

$$\varphi(\pi_i(a)) = \langle \eta, \pi_i(a)\eta \rangle = \langle \eta, (\lambda\eta + \xi^o) \rangle = \lambda = \langle \eta_i, a\eta_i \rangle = \varphi_i(a),$$

also

$$\varphi|_{\pi_i(\mathcal{A}_i)} = \varphi_i.$$

Bleibt noch zu zeigen: $\pi_1(\mathcal{A}_1), \dots, \pi_m(\mathcal{A}_m)$ sind frei in $(\mathcal{A}, \varphi)$. Betrachte dazu

$$\pi(a_1)\dots\pi(a_k) \qquad \text{mit} \quad a_i \in \mathcal{A}^o_{j(i)},\ j(1) \neq j(2) \neq \dots \neq j(k).$$

Beachte:

$$\varphi_{j(i)}(a_i) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_i\eta_{j(i)} =: \xi_i \in \mathcal{H}^o_{j(i)}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\varphi(\pi(a_1)\dots\pi(a_k)) &= \langle \eta, \pi(a_1)\dots\pi(a_k)\eta\rangle \\ &= \langle \eta, \pi(a_1)\dots\pi(a_{k-1})\xi_k\rangle \\ &= \langle \eta, \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung □

5.7. **Bemerkung.** Wir bezeichnen $(\mathcal{A}, \varphi)$ wiederum als das freie Produkt

$$(\mathcal{A}, \varphi) = (\mathcal{A}_1, \varphi_1) * \dots * (\mathcal{A}_m, \varphi_m).$$

Beachte: Anders als im algebraischen Fall hängt $\mathcal{A}$ (via $\mathcal{H}$) nun nicht nur von den $\mathcal{A}_i$, sondern auch von den Zuständen φ_i ab. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ im allgemeinen nicht gleich dem sogenannten universellen freien Produkt der C^*-Algebren $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$.

5.8. **Beispiel.** 1) Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei

$$(\mathcal{A}(\mathcal{H}), \tau_{\mathcal{H}})$$

der C^*-Wahrscheinlichkeitsraum der Linksvernichter auf dem zughörigen Fockraum, d.h.

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) := C^*(l(f) \mid f \in \mathcal{H}) \subset B(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$$

und

$$\tau_{\mathcal{H}}(a) := \langle \Omega, a\Omega\rangle \qquad (a \in \mathcal{A}(\mathcal{H})).$$

Sind nun

$$\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m \qquad \text{Hilberträume,}$$

so gilt folgende Beziehung:

$$(\mathcal{A}(\mathcal{H}_1), \tau_{\mathcal{H}_1}) * \dots * (\mathcal{A}(\mathcal{H}_m), \tau_{\mathcal{H}_m}) = (\mathcal{A}(\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_m), \tau_{\mathcal{H}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{H}_m}).$$

2) Insbesondere haben wir also mit $l_i := l(e_i)$ für eine Basis (e_i):

$$(C^*(l_1, l_2), \tau) = (C^*(l_1), \tau) * (C^*(l_2), \tau).$$

In $C^*(l_1)$ und $C^*(l_2)$ gelten nur die Relationen

$$l_1 l_1^* = 1, \qquad l_1^* l_1 < 1$$

und

$$l_2 l_2^* = 1, \qquad l_2^* l_2 < 1.$$

In $C^*(l_1, l_2)$ haben wir zusätzlich noch

$$l_1 l_2^* = 0;$$

diese Relation kommt von der speziellen Form des Zustandes τ.