FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

6. Freie Faltung und R-Transformation

6.1. **Erinnerung.** Seien $x = x^*$ und $y = y^*$ selbstadjungierte Elemente in einem C^*-Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$. Die Verteilungen μ_x und μ_y sind dann reelle Wahrscheinlichkeitsmaße mit dem kompaktem Träger $\sigma(x)$ bzw. $\sigma(y)$.
Sind x und y unabhängig, so hängt die Verteilung μ_{x+y} der Summe $x + y$ nur von μ_x und μ_y ab und die Zuordnung

$$(\mu_x, \mu_y) \mapsto \mu_{x+y}$$

definiert eine binäre Operation auf den Wahrscheinlichkeitsmaßen mit kompaktem Träger - diese ist nichts anderes als die wohlbekannte **Faltung**, d.h.

$$\mu_{x+y} = \mu_x * \mu_y.$$

6.2. **Beispiel.** Seien x und y klassische Zufallsvariable, die die Werte ± 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ annehmen, d.h.

$$\mu_x = \mu_y = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}).$$

Dann ist

$$\mu_{x+y} = \mu_x * \mu_y = \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_{+2}.$$

In Analogie zur klassischen Faltung definieren wir die freie Faltung durch die Summe von zwei freien Zufallsvariablen.

6.3. **Definition.** Seien μ und ν reelle Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger. Dann ist die **freie Faltung** $\mu \boxplus \nu$ folgendermaßen definiert: Sind x und y selbstadjungierte Zufallsvariable in einem C^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\mu_x = \mu \qquad \text{und} \qquad \mu_y = \nu$$

und

$$x \text{ und } y \text{ frei},$$

so ist

$$\mu \boxplus \nu := \mu_{x+y}.$$

6.4. **Bemerkungen.** 1) Die Operation $\boxplus$ ist wohldefiniert, da die Verteilung μ_{x+y} nur von μ_x und μ_y, nicht aber von der speziellen Wahl von x und y selbst abhängt.
2) Beachte: Jedes μ mit kompaktem Träger kann in der Form $\mu = \mu_x$ für einen selbstadjungierten Operator x in einem C^*-Wahrscheinlichkeitsraum realisiert werden:
Setze

$$\mathcal{A} := C(\operatorname{supp}\mu)$$

und

$$\varphi(f) = \int f(t) d\mu(t) \qquad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Dann ist $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein C^*-Wahrscheinlichkeitsraum und die Funktion $\mathbf{id} = \mathbf{id}^*$ mit

$$\mathbf{id}(t) = t$$

hat Verteilung μ:

$$\varphi(\mathbf{id}^n) = \int t^n d\mu(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_{\mathbf{id}} = \mu.$$

Indizieren wir obige Konstruktion durch μ, also

$$\mathbf{id}_\mu \in (\mathcal{A}_\mu, \varphi_\mu),$$

so finden wir in

$$(\mathcal{A}, \varphi) := (\mathcal{A}_\mu, \varphi_\mu) * (\mathcal{A}_\nu, \varphi_\nu)$$

also immer zwei freie Zufallsvariable

$$x = \mathbf{id}_\mu \qquad \text{und} \qquad y = \mathbf{id}_\nu$$

gemäß Definition 6.3.
3) Durch Betrachten von unbeschränkten Operatoren auf Hilberträumen kann die Operation $\boxplus$ auch auf beliebige reelle Wahrscheinlichkeitsmaße ausgedehnt werden. Wir wollen uns der Einfachheit halber aber auf Maße mit kompaktem Träger beschränken.

6.5. **Beispiele.** 1) Die Operation $\boxplus$ auf den reellen Wahrscheinlichkeitsmaßen (mit kompaktem Träger) ist kommutativ und assoziativ: Es gilt

$$\mu_x \boxplus \mu_y = \mu_{x+y} = \mu_{y+x} = \mu_y \boxplus \mu_x,$$

und für freies x, y, z (beachte: dann ist x frei von $y+z$ und $x+y$ frei von z)

$$\begin{aligned}\mu_x \boxplus (\mu_y \boxplus \mu_z) =& \mu_x \boxplus \mu_{y+z} \\ &= \mu_{x+(y+z)} \\ &= \mu_{(x+y)+z} \\ &= \mu_{x+y} \boxplus \mu_z \\ &= (\mu_x \boxplus \mu_y) \boxplus \mu_z.\end{aligned}$$

2) Sei

$$x = \alpha 1 \qquad \text{und} \qquad y = \beta 1,$$

also

$$\mu_x = \delta_\alpha \qquad \text{und} \qquad \mu_y = \delta_\beta.$$

Dann sind x und y frei und

$$x + y = (\alpha + \beta)1;$$

somit

$$\delta_\alpha \boxplus \delta_\beta = \delta_{\alpha+\beta}.$$

Sei allgemeiner $x = \alpha 1$ und $y = y^*$ beliebig. Dann sind x und y frei (vgl. 2.9) und somit

$$\mu_y \boxplus \delta_\alpha = \mu_{y+\alpha 1},$$

d.h.

$$\mu \boxplus \delta_\alpha = \mu_{(\alpha)},$$

wobei $\mu_{(\alpha)}$ das um α verschobene Maß μ bezeichnet.
Insbesondere ist δ_0 neutrales Element der freien Faltung:

$$\mu \boxplus \delta_0 = \mu.$$

3) Seien $l(f)$ $(f \in \mathcal{H})$ die Linksvernichter auf dem vollen Fockraum $(\mathcal{F}(\mathcal{H}), \tau)$. Bezeichnen wir mit γ_r die Halbkreisverteilung mit Radius r, also

$$d\gamma_r(t) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt,$$

so haben wir

$$\mu_{l(f)+l^*(f)} = \gamma_{2\|f\|}.$$

Da für $\langle f, g\rangle = 0$ die Zufallsvariablen $l(f) + l^*(f)$ und $l(g) + l^*(g)$ frei sind und

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

gilt, folgt also

$$\begin{aligned}\gamma_{2\|f\|} \boxplus \gamma_{2\|g\|} &= \mu_{(l(f)+l^*(f))+(l(g)+l^*(g))} \\ &= \mu_{l(f+g)+l^*(f+g)} \\ &= \gamma_{2(\|f\|^2+\|g\|^2)^{1/2}},\end{aligned}$$

d.h. es gilt für beliebiges $r_1, r_2 > 0$

$$\gamma_{r_1} \boxplus \gamma_{r_2} = \gamma_{(r_1^2+r_2^2)^{1/2}}.$$

4) Abgesehen von solchen einfachen Beispielen ist das Resultat der freien Faltung i.a. nicht einfach zu erschließen. Im Gegensatz zum klassischen Fall ist die freie Faltung von Maßen mit Atomen nicht klar, z.B.

$$\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}) \boxplus \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}) = ???$$

Wir benötigen also eine effektive Maschinerie zur Berechnung solcher Fälle.
5) Beachte: Zur Berechnung von $\mu \boxplus \nu$ brauchen wir freie x, y, so daß

$$\mu_x = \mu \qquad \text{und} \qquad \mu_y = \nu.$$

Dabei müssen x und y aber nicht selbstadjungiert sein, μ_{x+y} berechnet sich immer in der gleichen Art und Weise aus μ_x und μ_y, unabhängig von x^* und y^*.
Wir wissen zwar, daß wir selbstadjungierte x und y finden können, für konkrete Rechnungen kann es aber einfacher sein, mit nicht-selbstadjungierten Operatoren zu rechnen – oder noch allgemeiner, mit Elementen in einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum.

6.6. **Notation.** 1) Mit

$$(\Theta(l), \tau)$$

bezeichnen wir folgenden Wahrscheinlichkeitsraum der formalen Potenzreihen im einseitigen Shift:

$$\begin{aligned}\Theta(l) := \{ \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{n,m} l^{*n} l^m \ | \alpha_{n,m} \in \mathbb{C} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \\ \exists N \in \mathbb{N} : \alpha_{n,m} = 0 \text{ falls } n \geq N\},\end{aligned}$$

wobei die Multiplikation zweier solcher Potenzreihen durch formales Multiplizieren und anschließendes Reduzieren auf obige Form mit Hilfe der Relation

$$ll^* = 1$$

gegeben ist.
(Beachte: die Bedingung $\alpha_{n,m}=0$ für hinreichend großes n ist notwendig, damit bei der Reduktion keine unendlichen Summen auftreten.)
Das lineare Funktional τ ist definiert durch

$$\tau(\sum_{m,n\geq 0}\alpha_{n,m}l^{*n}l^m)=\alpha_{0,0}.$$

2) Analog bezeichnen wir mit

$$(\Theta(l_1,l_2),\tau)$$

den Wahrscheinlichkeitsraum der formalen Potenzreihen von zwei freien einseitigen Shifts:

$$\Theta(l_1,l_2):=$$

$$\{\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ i(1),\dots,i(n)\in\{1,2\}\\ j(1),\dots,j(m)\in\{1,2\}}}\alpha_{i(1),\dots,i(n);j(1),\dots j(m)}l^*_{i(1)}\dots l^*_{i(n)}l_{j(1)}\dots l_{j(m)}\mid \alpha_{\dots}\in\mathbb{C}$$

$$\exists N\in\mathbb{N}:\alpha_{\dots}=0\text{ falls }n\geq N\},$$

wobei die Multiplikation zweier solcher Potenzreihen durch formales Multiplizieren und anschließendes Reduzieren auf obige Form mit Hilfe der Relationen

$$l_1l_1^*=1,\qquad l_2l_2^*=1,\qquad l_1l_2^*=0,\qquad l_2l_1^*=0$$

gegeben ist.
Das lineare Funktional τ ist definiert durch

$$\tau(\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ i(1),\dots,i(n)\in\{1,2\}\\ j(1),\dots,j(m)\in\{1,2\}}}\alpha_{i(1),\dots,i(n);j(1),\dots j(m)}l^*_{i(1)}\dots l^*_{i(n)}l_{j(1)}\dots l_{j(m)})=\alpha_{\emptyset,\emptyset}$$

6.7. **Satz.** Betrachte die Zufallsvariablen

$$b_1=l_1^*+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nl_1^n\in(\Theta(l_1,l_2),\tau)$$

und

$$b_2=l_2^*+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_nl_2^n\in(\Theta(l_1,l_2),\tau).$$

Dann gilt

$$\mu_{b_1+b_2}=\mu_b,$$

wobei

$$b=l^*+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)l^n\in\Theta(l)$$

.

Beweis. Wir haben zu zeigen:

$$\tau\big((b_1+b_2)^k\big) \stackrel{!}{=} \tau(b^k) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\tau\Big(\big((l_1^*+l_2^*)+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n l_1^n+\beta_n l_2^n)\big)^k\Big) \stackrel{!}{=} \tau\Big((l^*+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n l^n+\beta_n l^n)^k\Big).$$

Beachte: die linke Seite geht in die rechte über falls wir die folgenden Ersetzungen vornehmen:

$$\begin{aligned} l_1^*+l_2^* &\to l^* \\ l_1 &\to l \\ l_2 &\to l \end{aligned}$$

Somit folgt Behauptung falls wir zeigen

$$\tau\big(p(l_1^*+l_2^*,l_1,l_2)\big) \stackrel{!}{=} \tau\big(\big(p(l^*,l,l)\big)$$

für alle nicht-kommutativen Polynome p in drei Variablen.
Dies folgt aber, da das Tripel $\{l_1^*+l_2^*,l_1,l_2\}$ die gleichen Relationen erfüllt wie $\{l^*,l,l\}$:

$$l_1(l_1^*+l_2^*)=l_1^*l_1=1=ll^*$$

und

$$l_2(l_1^*+l_2^*)=l_2l_2^*=1=ll^*$$

□

6.8. **Lemma.** Sei $(\mathcal{A},\varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $a \in \mathcal{A}$ eine Zufallsvariable. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\alpha_n \in \mathbb{C})$, so daß für

$$b=l^*+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n l^n \in (\Theta(l),\tau)$$

gilt

$$\mu_b=\mu_a.$$

Beweis. Wir müssen die α_n so bestimmen, daß gilt

$$m_k := \varphi(a^k)=\tau(b^k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \tau(b^k) &= \tau\Big((l^*+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n l^n)^k\Big) \\ &= \alpha_{k-1}\tau(l^{k-1}l^*\dots l^*)+p(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-2}) \\ &= \alpha_{k-1}+p(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-2}) \end{aligned}$$

(wobei p ein Polynom in $k-1$ Argumenten ist), kann obiges Gleichungssystem sukzessive nach den α_n eindeutig aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_0 & &\Longrightarrow & \alpha_0 &= m_1 \\ m_2 &= \alpha_1 + \alpha_0^2 & &\Longrightarrow & \alpha_1 &= m_2 - m_1^2 \\ m_3 &= \alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_0 + \alpha_0^3 & &\Longrightarrow & \alpha_2 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \\ & & &\text{usw.} & & \end{aligned}$$

(Der Term $3\alpha_1\alpha_0$ für m_3 entspricht dabei ll^*l^0, ll^0l^* und l^0ll^*; der Term α_0^3 entspricht $l^0l^0l^0$.) $\square$

6.9. **Definition.** 1) Für eine Zufallsvariable $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$ sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die eindeutig bestimmte Folge gemäß 6.8. Dann bezeichnen wir die Zufallsvariable

$$b = l^* + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n l^n \in (\Theta(l), \tau)$$

als **kanonische Variable** zu a, die

$$k_n(a) := \alpha_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

als **freie Kumulanten** von a und die formale Potenzreihe

$$R_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(a) z^{n-1}$$

als R-**Transformierte** von a.

2) Sei μ ein reelles Wahrscheinlichkeitsmaß mit kompaktem Träger und $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$ eine Zufallsvariable mit

$$\mu_a = \mu.$$

Dann bezeichnen wir die

$$k_n(\mu) := k_n(a)$$

und

$$R_\mu(z) := R_a(z)$$

als die freien Kumulanten bzw. R-Transformierte von μ.

6.10. **Beispiele.** 1) Sei $a = \alpha 1$, d.h. $\mu_a = \delta_\alpha$. Dann ist

$$b = l^* + \alpha 1$$

kanonische Variable zu a, da ja

$$\tau\big((l^* + \alpha 1)^k\big) = \alpha^k;$$

die freien Kumulanten sind somit

$$k_n(\delta_\alpha) = \begin{cases} \alpha, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

und die R-Transformierte ist gegeben durch

$$R_{\delta_\alpha}(z) = \alpha.$$

2) Sei

$$\gamma_r = \mu_{r/2(l^*+l)}$$

die Halbkreisverteilung mit Radius r, dann ist zugehörige kanonische Variable gegeben durch

$$b = l^* + \frac{r^2}{4} l \qquad (\hat{=} \frac{r}{2}(l^* + l)),$$

die freien Kumulanten haben die Form

$$k_n(\gamma_r) = \begin{cases} \frac{r^2}{4}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

und die R-Transformierte ist

$$R_{\gamma_r}(z) = \frac{r^2}{4} z.$$

Insbesondere ist also

$$R_s(z) = z$$

für das Halbkreiselement $s = l^* + l$ vom Radius 2.

6.11. **Korollar.** Seien μ und ν reelle Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$k_n(\mu \boxplus \nu) = k_n(\mu) + k_n(\nu) \qquad \forall\, n = 1, 2, \dots$$

und

$$R_{\mu \boxplus \nu}(z) = R_\mu(z) + R_\nu(z).$$

Es bleibt, den Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten in handhabbarer Weise zu bestimmen. Wie so oft in der Kombinatorik, lassen sich Relationen zwischen zwei Zahlenfolgen sehr prägnant und effektiv durch eine Relation zwischen den erzeugenden formalen Potenzreihen ausdrücken.

6.12. **Bemerkungen: formale Potenzreihen.** 1) Sei $C(z)$ eine formale Potenzreihe der Form

$$C(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots.$$

Dann besitzt $C(z)$ im Sinne formaler Potenzreihen bezüglich Komposition ein eindeutig bestimmtes Inverses $B(z)$ der Form:

$$B(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \dots$$

genau dann wenn $\gamma_1 \neq 0$.
$C(z)$ und $B(z)$ bestimmen sich gegenseitig durch

$$C[B(z)] = z$$

oder äquivalent

$$B[C(z)] = z.$$

Die Beziehung zwischen $C(z)$ und $B(z)$ ist nichts weiter als eine Zusammenfassung gewisser Relationen zwischen den Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$.
Beachte dabei: alle Relationen beinhalten nur endlich viele Koeffizienten und können sukzessive aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} z &= C[B(z)] \\ &= \gamma_1 B(z) + \gamma_2 B(z)^2 + \gamma_3 B(z)^3 \dots \\ &= \gamma_1(\beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots) + \gamma_2(\beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots)^2 + \gamma_3(\beta_1 z + \dots)^3 + \dots \end{aligned}$$

bedeutet z.B.

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_1 \beta_1 \\ 0 &= \gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1^2 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Bei Potenzreihen der Form

$$C(z) = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots$$

ergeben sich für das Inverse bzgl. Komposition keine endlichen Relationen, d.h. für solche formalen Potenzreihen macht die Komposition keinen Sinn.
2) Gehen wir in obigem von

$$C(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots \qquad \text{mit} \qquad \gamma_1 \neq 0$$

über zu

$$G(z) := C(\frac{1}{z}) = \gamma_1 \frac{1}{z} + \gamma_2 \frac{1}{z^2} + \dots,$$

so ist das Inverse $K(z)$ von $G(z)$ gegeben durch

$$K(z) = \frac{1}{B(z)};$$

es gilt ja

$$G[K(z)] = C[\frac{1}{K(z)}] = C[B(z)] = z.$$

Die Reihe $K(z)$ ist dabei von der Gestalt

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{1}{B(z)} \\ &= \frac{1}{\beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{\beta_1 + \beta_2 z + \dots} \\ &= \frac{1}{z}(\delta_1 + \delta_2 z + \dots) \\ &= \delta_1 \frac{1}{z} + \delta_2 + \delta_3 z + \dots \end{aligned}$$

wobei die δ_i sich wieder eindeutig aus den β_j bestimmen; insbesondere

$$\delta_1 = \frac{1}{\beta_1} = \gamma_1.$$

Insbesondere: Ist $\gamma_1 = 1$, so hat

$$G(z) = \frac{1}{z} + \gamma_2 \frac{1}{z^2} + \dots$$

ein Inverses der Form

$$K(z) = \frac{1}{z} + \delta_2 + \delta_3 z + \delta_4 z^2 + \dots.$$

6.13. **Satz.** Sei $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$ eine Zufallsvariable. Betrachte die formalen Potenzreihen

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{z^{n+1}} \qquad \hat{=} \qquad \frac{1}{z}\varphi(\frac{1}{1 - a/z}) = \varphi(\frac{1}{z - a})$$

und

$$R(z) := R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1} z^n.$$

Dann gilt im Sinne von formalen Potenzreihen

$$G[R(z) + 1/z] = z.$$

Beweis. Wir realisieren a in der isomorphen Form

$$b = l^* + \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1} l^n \in (\Theta(l), \tau),$$

so daß

$$\mu_a = \mu_b,$$

also

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau(b^n)}{z^{n+1}} \qquad \hat{=} \qquad \tau\big(\frac{1}{z-b}\big).$$

Zu zeigen ist

$$G[R(z) + \frac{1}{z}] = z.$$

Beachte: der Zusammenhang zwischen den $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ und den $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ ergibt sich sukzessive aus Relationen zwischen $(m_n)_{n=1}^{p}$ und $(k_n)_{n=1}^{p}$, d.h. es genügt die Behauptung für endliche Summen in obiger Darstellung von b zu zeigen.
Somit betrachten wir nun für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ den Operator

$$b = l^* + \sum_{n=0}^{p} \alpha_n l^n = l^* + R(l),$$

wobei

$$R(z) = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n z^n.$$

Dann kann b aber als Operator auf dem vollen Fockraum betrachtet werden, für $z > \|b\|$ ist

$$G(z) = \frac{1}{z}\tau\big(\frac{1}{1-b/z}\big) = \tau\big(\frac{1}{z-b}\big),$$

also für z hinreichend klein (somit für $R(z) + \frac{1}{z}$ hinreichend groß)

$$G[R(z) + \frac{1}{z}] = \tau\big((R(z) + \frac{1}{z} - b)^{-1}\big) = \langle \Omega, (R(z) + \frac{1}{z} - b)^{-1}\Omega \rangle.$$

Wir können nun folgendermaßen rechnen:
Wir setzen für z hinreichend klein

$$\begin{aligned} \eta_z &:= (1 - zl^*)^{-1}\Omega \\ &= (1 + \sum_{n=1}^{\infty} (zl^*)^n)\Omega \\ &= \Omega + \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$l\eta_z = \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{\otimes(n-1)} = z\eta_z,$$

also auch

$$R(l)\eta_z = R(z)\eta_z.$$

Außerdem haben wir

$$l^*\eta_z = e + \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{\otimes(n+1)} = \frac{1}{z}(\eta_z - \Omega).$$

Somit ergibt sich also

$$\begin{aligned} b\eta_z &= (l^* + R(l))\eta_z \\ &= \frac{1}{z}(\eta_z - \Omega) + R(z)\eta_z, \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{1}{z}\Omega = (R(z) + \frac{1}{z} - b)\eta_z,$$

oder

$$(R(z) + \frac{1}{z} - b)^{-1}\Omega = z\eta_z.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G[R(z) + 1/z] &= \tau\big((R(z) + 1/z - b)^{-1}\big) \\ &= \langle \Omega, (R(z) + 1/z - b)^{-1}\Omega\rangle \\ &= \langle \Omega, z\eta_z\rangle \\ &= z. \end{aligned}$$

Obige Rechnung gilt für z hinreichend klein, also auch im Sinne formaler Potenzreihen. □

6.14. **Erinnerung.** Für ein reelles Wahrscheinlichkeitsmaß μ (bzw. für einen selbstadjungierten beschränkten Operator x mit $\mu_x = \mu$) ist

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \varphi(\frac{1}{z-x})$$

nicht nur eine formale Potenzreihe, sondern eine analytische Funktion der komplexen oberen auf die untere Halbebene

$$\begin{aligned} G_\mu : \mathbb{C}^+ &\to \mathbb{C}^- \\ z &\mapsto \int \frac{1}{z-t} d\mu(t). \end{aligned}$$

Sie enthält überdies die wesentliche Information über μ in leicht zugänglicher Form, insbesondere gilt:
i) Besitzt μ eine stetige Dichte h bezüglich des Lebesgue-Maßes, also

$$d\mu(t) = h(t)dt,$$

so können wir diese aus G_μ gewinnen gemäß

$$h(t) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\Im G_\mu(t+i\varepsilon).$$

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} G_\mu(t+i\varepsilon) &= \int \frac{1}{t+i\varepsilon-s}d\mu(s) \\ &= \int \frac{t-s-i\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}d\mu(s). \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{1}{\pi}\Im G_\mu(t+i\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}d\mu(s)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}h(s)ds,$$

falls $d\mu(s) = h(s)ds$.
Die Funktionenfolge

$$f_\varepsilon(s) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}$$

konvergiert (im Distributionen-Sinne) für $\varepsilon \to 0$ gegen die Delta-Funktion δ_t
(oder anders ausgedrückt: die Folge der Cauchy-Verteilungen

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}ds$$

konvergiert für $\varepsilon \to 0$ schwach gegen die Delta-Verteilung δ_t),
d.h. falls h stetig gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{\pi}\Im G_\mu(t+i\varepsilon)) &= \int h(s)d\delta_t(s) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

ii) $t_0 \in \mathbb{R}$ ist isolierter Punkt im Träger $\operatorname{supp}\mu$ genau dann, wenn $z = t_0$ einfacher Pol von $G_\mu(z)$ ist.
Dann gilt

$$\mu(\{t_0\}) = \operatorname{res}_{t_0} G_\mu(z).$$

denn: Sei

$$\mu = \alpha\delta_{t_0} + (1-\alpha)\tilde{\mu}.$$

$$\Longrightarrow \qquad G_\mu(z) = \alpha \frac{1}{z-t_0} + (1-\alpha)\int \frac{1}{z-t} d\tilde{\mu}(t)$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad \operatorname{res}_{t_0} G_\mu(z) &= \lim_{z\to t_0}(z-t_0)G_\mu(z) \\
&= \alpha + \lim_{z\to t_0}(1-\alpha)\int \frac{z-t_0}{z-t} d\tilde{\mu}(t) \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

falls $|t_0 - t| \geq \varepsilon$ für $t \in \operatorname{supp} \tilde{\mu}$.

6.15. **Beispiel.** 1) Wir berechnen die Halbkreisverteilung aus der Rekursionsbeziehung zwischen den Momenten.
In 1.11 haben wir gezeigt, daß für die Momente

$$m_{2n} = C_n$$

der Halbkreisverteilung die Rekursion gilt:

$$m_{2k} = \sum_{i=1}^{k} m_{2(i-1)} m_{2(k-i)}.$$

Dies drückt sich in der erzeugenden formalen Potenzreihe

$$A(z) := \sum_{k=0}^{\infty} m_{2k} z^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_{2k} z^{2k}$$

folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_{2k} z^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \big(z^2 (m_{2(i-1)} z^{2(i-1)})(m_{2(k-i)} z^{2(k-i)})\big) \\
&= 1 + z^2 (1 + \sum_{p=1}^{\infty} m_{2p} z^{2p})(1 + \sum_{q=1}^{\infty} m_{2q} z^{2q}) \\
&= 1 + z^2 A(z) A(z).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z^2}}{2z^2}.$$

(Beachte: die Lösung $(1 + \sqrt{1-4z^2})/(2z^2)$ kommt nicht in Frage, da ja $A(0) = 1$ gelten muß.)

Dann haben wir aber

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{A(1/z)}{z} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4/z^2}}{2/z} \\ &= \frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}, \end{aligned}$$

und somit für die zugehörige Dichte

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \Im \frac{t+i\varepsilon - \sqrt{(t+i\varepsilon)^2-4}}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Im \sqrt{t^2-4} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}, & |t| \le 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Sei

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}).$$

Dann ist

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z^2-1},$$

und wir können μ aus G_μ wiedergewinnen gemäß: G_μ hat Pole bei $z = \pm 1$ und

$$\operatorname{res}_{\pm 1} \frac{z}{z^2-1} = \lim_{z \to \pm 1} (z \mp 1) \frac{z}{z^2-1} = \lim_{z \to \pm 1} \frac{z}{z \pm 1} = \frac{1}{2}.$$

6.16. **Bemerkung.** 1) All dies zusammengenommen ergibt uns die gesuchte effektive Maschinerie zur Berechnung der freien Faltung: Seien μ, ν reelle Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger, so berechnen wir $\mu \boxplus \nu$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mu &\rightsquigarrow G_\mu \rightsquigarrow R_\mu \\ \nu &\rightsquigarrow G_\nu \rightsquigarrow R_\nu \end{aligned}$$

und

$$R_\mu, R_\nu \rightsquigarrow R_\mu + R_\nu = R_{\mu \boxplus \nu} \rightsquigarrow G_{\mu \boxplus \nu} \rightsquigarrow \mu \boxplus \nu.$$

2) Die R-Transformation ist somit als freies Analogon zum Logarithmus der Fourier-Transformation anzusehen. Für ein Maß μ ist die Fourier-Transformation definiert durch

$$\mathcal{F}_\mu(t) = \int e^{its} d\mu(s),$$

und es gilt bezüglich der klassischen Faltung $*$

$$\mathcal{F}_{\mu*\nu}(t) = \mathcal{F}_\mu(t)\mathcal{F}_\nu(t).$$

Nehmen wir den Logarithmus von der Fourier-Transformation, so verhält sich dieser also additiv bezüglich der klassischen Faltung

$$\log \mathcal{F}_{\mu*\nu}(t) = \log \mathcal{F}_\mu(t) + \log \mathcal{F}_\nu(t).$$

6.17. **Beispiel.** Sei

$$\mu = \nu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}).$$

Dann ist

$$G_\mu(z) = \int \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\Big) = \frac{z}{z^2-1}.$$

Die R-Transformierte berechnet sich mit

$$K_\mu(z) = \frac{1}{z} + R_\mu(z)$$

aus

$$z \overset{!}{=} G_\mu[K_\mu(z)] = \frac{K_\mu(z)}{K_\mu(z)^2 - 1}$$

folgendermaßen:

$$\Longrightarrow \qquad K_\mu(z) = z\big(K_\mu(z)^2 - 1\big)$$

$$\Longrightarrow \qquad K_\mu(z)^2 - \frac{K_\mu(z)}{z} = 1$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad K_\mu(z) &= \frac{1}{2z} \pm \frac{\sqrt{4z^2+1}}{2z} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4z^2}}{2z} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad R_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1+4z^2} - 1}{2z}$$

(beachte: $R_\mu(0) = k_1(\mu) = m_1(\mu) = 0$). Somit ergibt sich

$$R_{\mu\boxplus\mu}(z) = 2R_\mu(z) = \frac{\sqrt{1+4z^2} - 1}{z},$$

also

$$K(z) := K_{\mu\boxplus\mu}(z) = R_{\mu\boxplus\mu}(z) + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1+4z^2}}{z}.$$

Daraus bestimmen wir $G := G_{\mu\boxplus\mu}$:

$$z = K[G(z)] = \frac{\sqrt{1+4G(z)^2}}{G(z)}$$

$$\implies \qquad z^2G(z)^2 = 1 + 4G(z)^2$$

$$\implies \qquad G(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-4}}$$

und daraus die Dichte

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mu \boxplus \mu)(t)}{dt} &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\Im\frac{1}{\sqrt{(t+i\varepsilon)^2-4}} \\
&= -\frac{1}{\pi}\Im\frac{1}{\sqrt{t^2-4}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{4-t^2}}, & |t| \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

6.18. **Bemerkungen.** 1) Die Verteilung

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-t^2}}dt$$

spielt auch in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle. Sie heißt **arc-sinus-Verteilung**.
2) Die freie Faltung hat also die ungewohnte Eigenschaft, daß die Faltung rein atomarer Maße ein absolut stetiges Maß ergeben kann.
(Vom funktionalanalytischen Standpunkt aus ist dies natürlich nicht sehr überraschend: Es ist z.B. ein wohlbekanntes Phänomen, daß das Spektrum der Summe von zwei Operatoren so gut wie nichts mit den Spektren der einzelnen Operatoren gemein haben muß.)

3) Insbesondere sehen wir auch: $\boxplus$ ist nicht distributiv, da ja das obige Beispiel zeigt:

$$\frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_{+1}) \boxplus \mu \neq \frac{1}{2}(\delta_{-1} \boxplus \mu) + \frac{1}{2}(\delta_{+1} \boxplus \mu) = \frac{1}{2}\mu_{(-1)} + \frac{1}{2}\mu_{(+1)}.$$

6.19. **Beispiel: zentraler Grenzwertsatz.** Mit Hilfe der R-Transformation können wir den freien zentralen Grenzwertsatz auch folgendermaßen beweisen: Da die freien Kumulanten Polynome in den Momenten sind (und umgekehrt) ist

$$\text{Konvergenz der Momente} \iff \text{Konvergenz der Kumulanten.}$$

Somit müssen wir zeigen, daß

$$R_{(a_1+\cdots+a_n)/\sqrt{n}}(z) \to R_s(z) = z \qquad \text{koeffizientenweise.}$$

Es ist einfach zu sehen, daß

$$R_{\lambda a}(z) = \lambda R_a(\lambda z).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} R_{(a_1+\cdots+a_n)/\sqrt{n}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{n}} R_{a_1+\cdots+a_n}(\frac{z}{\sqrt{n}}) \\ &= n \frac{1}{\sqrt{n}} R_{a_i}(\frac{z}{\sqrt{n}}) \\ &= \sqrt{n} R_{a_i}(\frac{z}{\sqrt{n}}) \\ &= \sqrt{n}(k_1 + k_2 \frac{z}{\sqrt{n}} + k_3 \frac{z^2}{n} + \dots) \\ &= \sqrt{n}(1 \frac{z}{\sqrt{n}} + k_3 \frac{z^2}{n} + \dots) \\ &\to z, \end{aligned}$$

da $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$.