FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

8. 'Physikalischer' Exkurs: Master-Gleichungen

Sei $(L_t)_{t\geq 0}$ ein **stochastischer Prozeß**, d.h. eine durch die Zeit t indizierte Familie von Zufallsvariablen,

$$L_t \in (\mathcal{A}, \varphi) \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wir betrachten nun folgendes Problem: Gesucht ist die Lösung $U_{t,s}$ der folgenden 'stochastischen Differentialgleichung':

$$\frac{d}{dt} U_{t,s} = L_t U_{t,s} \qquad (s \leq t)$$

mit vorgegebener Anfangsbedingung

$$U_{s,s} = 1.$$

Dabei ist $U_{t,s}$ $(s \leq t)$ z.B. der Zeitentwicklungsoperator (von dem Zeitpunkt s zum Zeitpunkt t) eines physikalischen Systems und L_t der Hamilton-Operator (oder Liouville-Operator) des betrachteten Systems – bei interessanten Fällen ist letzterer durch Wechselwirkung mit anderen Systemen sehr kompliziert und daher nicht genau bekannt. Man setzt ihn dann oft als stochastischen Operator an und bezeichnet ihn auch als Potential.

Die exakte Lösung

$$U_{t,s} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq s} L_{t_1} \dots L_{t_n} dt_1 \dots dt_n$$

obiger Gleichung ist daher normalerweise nicht berechenbar.

Oft ist man nur an der Kenntnis des Mittelwertes $\varphi(U_{t,s})$ interessiert, also an

$$\varphi(U_{t,s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_n \geq s} \varphi(L_{t_1} \dots L_{t_n}) dt_1 \dots dt_n.$$

Da dies ebenfalls normalerweise nicht exakt berechenbar ist, benötigt man sinnvolle Approximationsverfahren, die bei möglichst wenig Information über L_t brauchbare Antworten geben.

Oft ist es (aus physikalischen Gründen!) vernünftig, folgende Clustereigenschaft für L_t anzunehmen:

$$\varphi(L_{t_1} \dots L_{t_n}) \approx \varphi(L_{t_1} \dots L_{t_k}) \cdot \varphi(L_{t_{k+1}} \dots L_{t_n}),$$

falls die Zeitpunkte $t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ in zwei Cluster $t_1, \dots, t_k$ und $t_{k+1}, \dots, t_n$ mit hinreichend großem Zeitabstand zwischen den beiden Clustern zerfallen.

Eine solche Faktorisierung erlaubt aber keine sinnvolle direkte Approximation in obiger Darstellung von $U_{t,s}$. Eine Umschreibung dieser Formel von Momenten auf Kumulanten ist viel nützlicher, da folgendes gilt.

8.1. **Lemma.** Sei $(\mathcal{A}, \varphi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subset \mathcal{A}$ zwei Teilmengen von $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:

i) die gemischten Momente besitzen die Produkt-Eigenschaft bezüglich $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$ und alle $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{X}_1$ und $a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathcal{X}_2$ gilt:

$$\varphi(a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n) = \varphi(a_1 \dots a_k) \cdot \varphi(a_{k+1} \dots a_n).$$

ii) die gemischten Kumulanten besitzen die Cluster-Eigenschaft bezüglich $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$ und alle $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{X}_1$ und $a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathcal{X}_2$ gilt:

$$k_n(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = 0.$$

(Beachte: Obige Eigenschaften sind viel schwächer als die Forderung, daß $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ frei sind.)

Beweis. Übungsaufgabe □

Beispiel: Die Faktorisierung

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$$

ist äquivalent zu

$$k_2(a_1, a_2) = 0.$$

Aufgrund obiger Tatsache versucht man, für $\varphi(U_{t,s})$ eine Gleichung in den Kumulanten von L_t hinzuschreiben. Eine solche Gleichung heißt oft **(verallgemeinerte) Master-Gleichung**

8.2. **Satz.** Sei L_t ein stochastischer Prozess und $U_{t,s}$ Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} U_{t,s} = L_t U_{t,s}.$$

Seien

$$k_n(t_1, \dots, t_n) := k_n(L_{t_1}, \dots, L_{t_n})$$

die freien Kumulanten von L_t. Dann erfüllt $\varphi(U_{t,s})$ folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\varphi(U_{t,s}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underset{t\geq t_1\geq\dots\geq t_n\geq s}{\int\cdots\int} k_{n+1}(t,t_1,\dots,t_n)\cdot\varphi(U_{t,t_1})\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\varphi(U_{t_1,t_2})\cdots\varphi(U_{t_{n-1},t_n})\cdot\varphi(U_{t_n,s})dt_1\dots dt_n \\
&= k_1(t)\varphi(U_{t,s}) + \int_s^t k_2(t,t_1)\cdot\varphi(U_{t,t_1})\cdot\varphi(U_{t_1,s})dt_1 \\
&\qquad + \underset{t\geq t_1\geq t_2\geq s}{\iint} k_3(t,t_1,t_2)\cdot\varphi(U_{t,t_1})\cdot\varphi(U_{t_1,t_2})\cdot\varphi(U_{t_2,s})dt_1dt_2 + \dots
\end{aligned}$$

Beweis. Benutze die Rekursionsformel (vgl. Satz 7.7)

$$\begin{aligned}
\varphi(L_tL_{t_1}\dots L_{t_n}) &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{1\leq i(1)\leq\dots\leq i(r)\leq n} k_{r+1}(t,t_{i(1)},\dots,t_{i(r)})\cdot \\
&\quad\cdot\varphi(L_{t_1}\dots L_{t_{i(1)-1}})\cdot\varphi(L_{t_{i(1)+1}}\dots L_{t_{i(2)-1}})\dots\varphi(L_{t_{i(r)+1}}\dots L_{t_n}),
\end{aligned}$$

um die explizite Formel für

$$\frac{d}{dt}\varphi(U_{t,s}) = \varphi(L_tU_{t,s})$$

von den Momenten auf die Kumulanten umzuschreiben. □

8.3. **Bemerkungen.** 1) Liegt nun eine Clustereigenschaft des Potentials L_t vor, so kann dies zu sinnvollen Approximationen in obiger Formel benutzt werden.
2) Insbesondere ist es eine sinnvolle (und berechenbare!) Approximation, nur die beiden ersten Terme für $n=0$ und $n=1$ in obiger Formel beizubehalten, d.h. wir berechnen $U_{t,s}$ gemäß

$$\frac{d}{dt}\varphi(U_{t,s}) = k_1(t)\varphi(U_{t,s}) + \int_s^t k_2(t,t_1)\cdot\varphi(U_{t,t_1})\cdot\varphi(U_{t_1,s})dt_1.$$

Man benutzt als Information von dem wirklichen Potential also nur das erste und zweite Moment.
Diese Näherung ist exakt, falls L_t folgende Eigenschaft besitzt:

$$k_n(t_1,\dots,t_n) = 0 \qquad \text{falls } n>2.$$

Ein solcher Prozeß hat also die Eigenschaft, daß nur die erste und zweite Kumulante von Null verschieden sind, insbesondere ist also jedes L_t ein Halbkreiselement. Dies sind die Analoga zu den klassischen Gaußschen

Prozessen.
Ein wichtiger Spezialfall ist die **freie Brownsche Bewegung** S_t, die charakterisiert ist durch:

$$k_n(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = \begin{cases} \min(t_1, t_2), & n = 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog zum klassischen Fall kann sie auch folgendermaßen charakterisiert werden:

- $S_0 = 0$
- der Zuwachs $S_t - S_s$ ist für alle $0 \le s < t$ ein Halbkreis-Element mit Mittelwert 0 und Varianz $t - s$
- für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}}$ frei

Eine konkrete Realisierung der freien Brownschen Bewegung ergibt sich folgendermaßen. Sei

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Dann betrachten wir auf dem vollen Fockraum

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}_+))$$

die Operatoren

$$S_t = l(\chi_{[0,t)}) + l^*(\chi_{[0,t)}),$$

wobei χ_M die charakteristische Funktion der Menge M bezeichnet.
3) Beachte: obiger Satz ist eine Verallgemeinerung (modulo Laplace-Transformation) von Voiculescus Formel für den Zusammenhang zwischen R-Transformierter und Cauchy-Transformierter.
denn: Sei $L(t)$ konstant, d.h.

$$L(t) = L \qquad \text{für alle } t \ge 0.$$

Dann folgt

$$\varphi(U_{t,s}) = \varphi(U_{t-s}) = \varphi(e^{L(t-s)}) \qquad \hat{=} \qquad \text{Fourier-Transformierte von } L.$$

Unsere Master-Gleichung nimmt dann (für $s = 0$) folgende Form an:

$$\frac{d}{dt}\varphi(U_t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}^L \int \cdots \int \varphi(U_{t-t_1}) \cdot \varphi(U_{t_1-t_2}) \cdots \varphi(U_{t_n}) dt_1 \dots dt_n.$$

Dies ist eine faltungsartige Gleichung für die Fourier-Transformation. Eine solche Gleichung kann durch Übergang zur Laplace-Transformierten vereinfacht werden, d.h. durch den Übergang

$$F(t) \rightsquigarrow f(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt.$$

Beachte: insbesondere haben wir unter der Laplace-Transformation

$$\frac{t^n}{n!} \rightsquigarrow \frac{1}{z^{n+1}},$$

also geht unsere Fourier-Transformation $\varphi(U_t)$ über in

$$\varphi(U_t) = \varphi(e^{Lt}) = \sum_{n=0} \varphi(L^n)\frac{t^n}{n!} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(L^n)\frac{1}{z^{n+1}} = G(z),$$

also in die Cauchy-Transformierte $G(z)$ von L.

Da die Faltung unter der Laplace-Transformation in Multiplikation und die Zeitableitung in Multiplikation mit z übergeht, transformiert sich obige Faltungs-Gleichung für die Fourier-Transformierte also in folgende Gleichung für die Cauchy-Transformierte:

$$zG(z) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}^L G(z)^{n+1} = R[G(z)]G(z),$$

somit

$$z = \frac{1}{G(z)} + R[G(z)],$$

d.h. $K(z) = \frac{1}{z} + R(z)$ ist das Inverse unter Komposition von $G(z)$. Das ist aber genau Voiculescus Beziehung zwischen R-Transformierter und Cauchy-Transformierter.