FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vorlesung WS 1997/98

9. Freeness und Zufallsmatrizen

Unsere bisherigen Beispiele für freeness waren freie Gruppenalgebren und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf dem vollen Fockraum – zwei (eng verwandte) Situationen, in denen das Auftreten von freeness nicht sehr überrascht, da freeness ja als Konzept aus solchen Kontexten abstrahiert wurde.

Nun werden wir aber freeness in einem ganz anderen Kontext antreffen, nämlich zur Beschreibung von $n \times n$-Zufallsmatrizen im Limes $n \to \infty$.

9.1. **Definition.** Seien Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) und $(\mathcal{A}, \varphi)$ gegeben. Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ seien Zufallsvariable

$$a_i^{(n)} \in (\mathcal{A}_n, \varphi_n) \qquad \text{und} \qquad a_i \in (\mathcal{A}, \varphi)$$

gegeben.

1) Wir sagen dann, $(a_i^{(n)})_{i\in I}$ **konvergiert in Verteilung** gegen $(a_i)_{i\in I}$,

$$(a_i^{(n)})_{i\in I} \xrightarrow{\text{Vert}} (a_i)_{i\in I},$$

falls jedes gemischte Moment von den $(a_i^{(n)})_{i\in I}$ gegen das entsprechende gemischte Moment von $(a_i)_{i\in I}$ konvergiert, d.h. falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i(1), \dots, i(k) \in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(a_{i(1)}^{(n)} \dots a_{i(k)}^{(n)}) = \varphi(a_{i(1)} \dots a_{i(k)}).$$

2) Sei

$$I = I_1 \cup \dots \cup I_m$$

eine Zerlegung der Indexmenge I in m disjunkte Untermengen. Wir sagen dann, die

$$\{a_i^{(n)} \mid i \in I_1\}, \dots, \{a_i^{(n)} \mid i \in I_m\} \qquad \text{sind } \textbf{asymptotisch frei}$$

(im Limes $n \to \infty$), falls die entsprechenden Grenzwerte frei sind, d.h. falls

$$\{a_i \mid i \in I_1\}, \dots, \{a_i \mid i \in I_m\} \qquad \text{frei sind.}$$

Somit bedeutet $a_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}$ asymptotisch frei also, daß die gemischten Momente (ausgedrückt in den Momenten von $a_1^{(n)}$ und den Momenten von $a_2^{(n)}$) sich approximativ (für $n \to \infty$) so berechnen, wie es sich für freie Zufallsvariable gehört, also z.B.

$$\varphi_n(a_1^{(n)} a_2^{(n)}) \cong \varphi_n(a_1^{(n)}) \cdot \varphi_n(a_2^{(n)}) \qquad (n \to \infty).$$

Unsere Zufallsvariablen, die asymptotisch frei werden sollen, sind nun $n \times n$-Zufallsmatrizen.

9.2. **Notationen.** Sei $(\mathcal{C}, \tau)$ ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum – d.h. τ ist durch Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes gegeben und $\mathcal{C}$ besteht aus Zufallsvariablen, die alle kommutieren – so bauen wir uns aus diesen klassischen Größen nicht-kommutative Zufallsvariable, indem wir Matrizen über $\mathcal{C}$ betrachten. Wir betrachten also Elemente in

$$\mathcal{A}_n = M_n(\mathcal{C}) = M_n \otimes \mathcal{C}$$

der Form

$$X = \big(a(p,q)\big)_{p,q=1}^{n}, \qquad \text{wobei} \qquad a(p,q) \in \mathcal{C} \quad (p,q = 1, \dots, n).$$

$\mathcal{A}_n$ versehen mit den Matrixoperationen – Addition, Multiplikation und Adjungiertes – wird zu einer $*$-Algebra.
Auf $\mathcal{A}_n = M_n \otimes \mathcal{C}$ betrachten wir den kanonischen Zustand

$$\varphi_n := \mathrm{tr}_n \otimes \tau,$$

wobei

$$\mathrm{tr}_n : M_n \to \mathbb{C}$$

die normalisierte Spur auf M_n bedeutet, d.h. $(\alpha(p,q) \in \mathbb{C})$

$$\mathrm{tr}_n\big((\alpha(p,q))_{p,q=1}^n\big) := \frac{1}{n}\big(\alpha(1,1) + \dots + \alpha(n,n)\big).$$

Somit ist φ_n folgendermaßen definiert:

$$\varphi_n\big((a(p,q))_{p,q=1}^n\big) := \frac{1}{n}\big(\tau(a(1,1)) + \dots + \tau(a(n,n))\big).$$

Die Positivität von τ impliziert die Positivität von φ_n (tr_n ist ja auch positiv):

$$\begin{aligned}
\varphi_n(XX^*) &= \varphi_n\big((\sum_{r=1}^n a(p,r)\bar{a}(q,r))_{p,q=1}^n\big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n \tau\big(a(p,r)\bar{a}(p,q)\big) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ ein (nicht-kommutativer) Wahrscheinlichkeitsraum, der **Wahrscheinlichkeitsraum der $n \times n$-Zufallsmatrizen**.
Elemente aus $M_n \cong M_n \otimes 1$ werden dabei als **konstante Matrizen** (=unabhängig von $\mathcal{C}$) angesehen. Wir werden uns insbesondere für **konstante Diagonalmatrizen** interessieren, d.h. für Matrizen

$$D = \big(\beta(p,q)\big)_{p,q=1}^{n} \qquad \text{mit} \quad \beta(p,q) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \beta(p,q) = 0 \text{ für } p \neq q.$$

9.3. **Bemerkungen.** 1) Sei

$$A = \big(\alpha(p,q)\big)_{p,q=1}^{n} \in M_n \qquad \text{mit} \qquad \bar{\alpha}(p,q) = \alpha(q,p)$$

eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Der Zustand tr_n 'mißt' nichts anderes als die Eigenwerte von A: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A, dann ist

$$\mu_A = \frac{1}{n}(\delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_n});$$

denn: Diagonalisiere A in der Form

$$A = UDU^*,$$

wobei D Diagonalmatrix mit

$$D = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_n(A^n) &= \mathrm{tr}_n(UD^nU^*) \\ &= \mathrm{tr}_n(D^n) \\ &= \frac{1}{n}(\lambda_1^n + \cdots + \lambda_n^n) \\ &= \int t^n d\mu_A, \end{aligned}$$

mit μ_A gemäß oben.
Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat A die Eigenwerte -1 und $+1$ und die Verteilung von A (bzgl. tr_2) ist

$$\mu_A = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1}).$$

2) Sei

$$X = \big(a(p,q)\big)_{p,q=1}^{n} \qquad \text{mit} \qquad a(p,q) \in \mathcal{C}$$

eine $n \times n$-Zufallsmatrix. Dann mißt $\varphi_n = \mathrm{tr}_n \otimes \tau$ die bezüglich τ gemittelte Eigenwertverteilung von X.
Beispiel: Betrachte

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die klassische Zufallsvariable a die Verteilung

$$\mu_a = \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)$$

besitzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad \lambda = 0, 0 \\ a = 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \lambda = -1, 1 \\ a = 2 \qquad &\Longrightarrow \qquad \lambda = -2, 2. \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\mu_X = \frac{1}{6}(\delta_{-2} + \delta_{-1} + 2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2).$$

9.4. **Satz.** 1) Sei I eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei eine $\infty \times \infty$-Matrix $\big(a_i(p,q)\big)_{p,q=1}^{\infty}$ von klassischen Zufallsvariablen gegeben, die folgenden Bedingungen genügen:

i) die Matrizen $(a_i(p,q))$ sind symmetrisch:

$$a_i(p,q) = a_i(q,p) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, i \in I,\ p,q \in \mathbb{N}.$$

(ii) für festes i sind die Eingänge der Matrix $(a_i(p,q))$, abgesehen von der Symmetriebedingung, unabhängig voneinander und normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1:

$$\{a_i(p,q)\}_{1 \leq p \leq q \leq \infty} \qquad \text{unabhängige Zufallsvariable}$$

und

$$a_i(p,q) \text{ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1}$$

für alle $i \in I$ und $p,q \in \mathbb{N}$, also insbesondere

$$\tau(a_i(p,q)) = 0$$

$$\tau(a_i(p,q)a_i(p,q)) = \tau(a_i(p,q)a_i(q,p)) = 1$$

(iii) für verschiedenes i und j sind alle Eingänge der Matrix $(a_i(p,q))$ unabhängig von allen Eingängen der Matrix $(a_j(p,q))$: für alle $i,j \in I$ mit $i \neq j$ gilt

$$\{a_i(p,q)\}_{p,q=1}^{\infty} \qquad \text{und} \qquad \{a_j(u,v)\}_{u,v=1}^{\infty} \qquad \text{sind unabhängig.}$$

Betrachte nun für alle $n \in \mathbb{N}$ die symmetrischen $n \times n$-Zufallsmatrizen

$$X_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(a_i(p,q)\big)_{p,q=1}^{n}.$$

Dann gilt: Im Limes $n \to \infty$ werden die

$$(\{X_i^{(n)}\})_{i\in I} \qquad \text{asymptotisch frei}$$

und für jedes $i \in I$ konvergiert $X_i^{(n)}$ gegen ein Halbkreiselement vom Radius 2; anders ausgedrückt:

$$(X_i^{(n)})_{i\in I} \xrightarrow{\text{Vert}} (s_i)_{i\in I},$$

wobei $\{s_i\}_{i\in I}$ eine Halbkreis-Familie vom Radius 2 ist.

2) Seien zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $j \in J$ (J beliebige Indexmenge) konstante Diagonalmatrizen

$$D_j^{(n)} = (\beta_i^{(n)}(p,q))_{p,q=1}^{n} \qquad \text{mit } \beta_i^{(n)}(p,q) = 0 \text{ für } p \neq q$$

gegeben, so daß gilt:

(i) die Verteilungen der $(D_j^{(n)})_{j\in J}$ existieren für $n \to \infty$ – d.h. es gibt Zufallsvariable $(D_j)_{j\in J}$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum, so daß

$$(D_j^{(n)})_{j\in J} \xrightarrow{\text{Vert}} (D_j)_{j\in J}$$

(ii) die Normen der $D_j^{(n)}$ bleiben in n beschränkt für jedes j:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|D_j^{(n)}\| < \infty \qquad \forall\, j \in J.$$

Dann gilt: Im Limes $n \to \infty$ werden die

$$(\{X_i^{(n)}\})_{i\in I}, \{D_j^{(n)} \mid j \in J\}$$

asymptotisch frei; anders ausgedrückt

$$(X_i^{(n)})_{i\in I} \cup (D_j^{(n)})_{j\in J} \xrightarrow{\text{Vert}} (s_i)_{i\in I} \cup (D_j)_{j\in J},$$

wobei $\{s_i\}_{i\in I}$ eine Halbkreis-Familie bildet, welche frei von $\{D_j \mid j \in J\}$ ist.

9.5. **Bemerkungen.** 1) Die Bedingungen an die $a_i(p,q)$ im ersten Teil des Satzes bedeuten für die X_i folgendes:

i) Die Matrizen $X_i^{(n)}$ sind symmetrisch.

(ii) Für festes i und n sind die Eingänge der Matrix $X_i^{(n)}$, abgesehen von der Symmetriebedingung, unabhängig voneinander und normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $1/n$.

(iii) Für verschiedenes i und j sind alle Eingänge der Matrix $X_i^{(n)}$ unabhängig von allen Eingängen der Matrix $X_j^{(n)}$.

2) Obiger Satz besteht im wesentlichen aus drei Behauptungen, welche wir der Reihe nach beweisen werden:

(a) Die gemittelte Eigenwert-Verteilung einer symmetrischen Zufallsmatrix X mit unabhängigen und zentrierten normal-verteilten Eingängen konvergiert gegen die Halbkreis-Verteilung.
Dieses berühmte klassische Theorem geht auf **Wigner** (1955) zurück. Daher heißt die Halbkreis-Verteilung auch Wignerscher Halbkreis.
Die Tatsache, daß die Halbkreis-Verteilung sowohl bei Zufallsmatrizen als auch beim freien zentralen Grenzwertsatz auftritt, war das erste Indiz für einen Zusammenhang zwischen freeness und Zufallsmatrizen.

(b) Sind mehrere Zufallsmatrizen X_i gegeben, so übersetzt sich die Unabhängigkeit zwischen den Eingängen von X_i und X_j in freeness zwischen X_i und X_j (betrachtet als Matrizen)

(c) In obiger Aussage über asymptotische freeness zwischen Zufallsmatrizen können auch noch konstante Matrizen eingeschlossen werden.
Dieser Teil (2) ist die wesentlichste Aussage des Satzes; beachte: mit Hilfe von Teil (1) können im Limes $n \to \infty$ nur Halbkreis-Verteilungen realisiert werden, Teil (2) erlaubt mit Hilfe konstanter diagonaler Matrizen zusätlich noch eine weitere beliebige freie Verteilung im Limes.
Dieser Teil des Satzes wurde inzwischen von Voiculescu auf beliebige konstante Matrizen verallgemeinert .

3) Rechnungen mit allen Arten von $n \times n$-Zufallsmatrizen im Limes $n \to \infty$ sind in der Physik (und auch gewissen Gebieten der Mathematik, z.B. Statistik) wohlbekannt; die Bedeutung obigen Satzes liegt nicht in Berechnung von Momenten im Limes $n \to \infty$, sondern in der Erkenntnis, daß in diesem Limes eine mathematische Struktur – nämlich freeness – überlebt.

Beweis. Gemäß obiger Bemerkung werden wir den Beweis in drei Schritten durchführen

(a) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$X^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(a(p,q)\big)_{p,q=1}^{n}$$

eine symmetrische Zufallsmatrix mit normalverteilten und unabhängigen Eingängen $a(p,q)$, also insbesondere

$$\tau\big(a(p,q)\big) = 0$$

und
$$\tau\big(a(p,q)a(p,q)\big) = \tau\big(a(p,q)a(q,p)\big) = 1.$$
Wir berechnen nun die Momente von $X^{(n)}$ im Limes $n \to \infty$ und wollen sehen, daß dies die Momente der Halbkreis-Verteilung ergibt.
Für $k \in \mathbb{N}$ gilt
$$\begin{aligned}\varphi_n\big((X^{(n)})^k\big) &= \mathrm{tr}_n \otimes \tau\Big(\sum_{p_2,\dots,p_k=1}^{n} \frac{1}{n^{k/2}} a(p,p_2)a(p_2,p_3)\dots a(p_k,q)\Big)_{p,q=1}^{n} \\ &= \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{p_1,\dots,p_k=1}^{n} \tau\big(a(p_1,p_2)a(p_2,p_3)\dots a(p_k,p_1)\big).\end{aligned}$$
Wiederum (wie beim Beweis vom freien zentralen Grenzwertsatz) geben viele Tupel $(p_1,\dots,p_k)$ den gleichen Beitrag; es kommt nur darauf an, daß die Indizes an den jeweils gleichen Stellen übereinstimmen, der Wert der Indizes an diesen Stellen spielt keine Rolle. Das Übereinstimmen der Indizes können wir wieder durch Partitionen kodieren, die Blöcke geben dabei die Stellen an, an denen die Indizes geweils übereinstimmen. Sei also π eine Partition von $\{1,\dots,k\}$, so sagen wir
$$(p_1,\dots,p_k) \hat{=} \pi \qquad \text{falls} \qquad p_i = p_j \Leftrightarrow i \sim_\pi j.$$
Besitzt π nun $\#\pi = r$ Blöcke, so gibt es für die zugehörigen Indextupel $(p_1,\dots,p_k)$ genau
$$n(n-1)\dots(n-r+1) \cong n^r$$
Möglichkeiten. Somit verschwinden im Limes $n \to \infty$ also die Beiträge aller Partitionen mit
$$\#\pi < \frac{k}{2} + 1.$$
Im folgenden brauchen wir also nur π mit
$$\#\pi \geq \frac{k}{2} + 1$$
zu betrachten.
Da die $a(p,q)$ (abgesehen von Symmetrie) unabhängig voneinander sind, ergibt ein Tupel $(p_1,\dots,p_k)$ nur dann einen Beitrag, wenn jeder Matrix-Index (p_i,p_{i+1}) in dieser oder in symmetrischer Form mindestens noch einmal als Matrix-Index erscheint, falls also gilt: Für jedes $i = 1,\dots,k$ gibt es ein $j \neq i$, so daß
$$(p_i,p_{i+1}) = (p_j,p_{j+1}) \qquad \text{oder} \qquad (p_i,p_{i+1}) = (p_{j+1},p_j),$$
d.h.
$$\{p_i,p_{i+1}\} = \{p_j,p_{j+1}\}.$$

Dabei zählen wir natürlich mod k, d.h.

$$p_{k+1} = p_1.$$

Damit dieses eintritt, dürfen aber höchstens $k/2+1$ verschiedene Elemente in der Menge $\{p_1, \dots, p_k\}$ liegen, d.h. mit der zu $(p_1, \dots, p_k)$ gehörigen Partition π muß gelten:

$$\#\pi \leq \frac{k}{2} + 1.$$

Beweis mit Induktion nach k:
$k=1$: (p_1) kann Bedingung nicht erfüllen ($\hat{=}$ Verschwinden des ersten Momentes), somit Behauptung trivialerweise erfüllt
$k=2$: Bedingung wird nur erfüllt durch $(p_1, p_2) = (i, j)$ mit $i \neq j$, d.h. für $\pi = \{(1), (2)\}$. Für dieses π gilt aber $\#\pi = 2 = \frac{2}{2} + 1$.
$k-2 \to k$: Sei also $(p_1, \dots, p_k) \hat{=} \pi$ ein Tupel mit der Eigenschaft, daß alle $\{p_i, p_{i+1}\}$ mindestens zweimal auftreten. Nehmen wir außerdem an, daß $\#\pi \geq \frac{k}{2} + 1$ (ansonsten ist die Behauptung ja klar). Dann muß es mindestens einen Index j geben, so daß p_j nur einmal auftritt. Da das Paar $\{p_{j-1}, p_j\}$ aber zweimal auftreten soll, kann dies nur in der Form $\{p_j, p_{j+1}\}$ sein und es muß gelten

$$p_{j-1} = p_{j+1}.$$

Entfernen wir nun p_j und p_{j+1} aus $(p_1, \dots, p_k)$, so genügt der Rest

$$(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+2}, \dots, p_k) \hat{=} \pi'$$

weiterhin der Bedingung, daß jedes Index-Paar mindestens zweimal auftritt; allerdings haben wir nun die Länge von k auf $k-2$ vermindert, nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\#\pi = \#\pi' + 1 \leq \frac{k-2}{2} + 1 + 1 = \frac{k}{2} + 1.$$

(Beachte, daß π' genau einen Block weniger hat als π, der Block der $j-1$ und $j+1$ enthält ist ja immer noch vorhanden.)
Somit tragen für das k-te Moment von $X^{(n)}$ im Limes $n \to \infty$ also nur $\pi \in \mathcal{P}(k)$ mit

$$\#\pi = \frac{k}{2} + 1$$

bei.
Da diese Bedingung für ungerades k nicht erfüllbar ist, folgt insbesondere, daß die ungeraden Momente von $X^{(n)}$ im Limes verschwinden.
Im folgenden betrachten wir $k = 2l$ gerade.
Ein π mit

$$\#\pi = \frac{k}{2} + 1 = l + 1$$

liefert im Limes $n \to \infty$ den Beitrag

$$\tau(\pi) := \tau\big(a(p_1, p_2)a(p_2, p_3) \dots a(p_k, p_1)\big),$$

wobei

$$(p_1, \dots, p_k) \hat{=} \pi.$$

π muß nun von spezieller Struktur sein, damit dieses $\tau(\pi)$ von Null verschieden ist.
Wir schauen uns den Induktionsschritt in obiger Argumentation noch einmal genauer an. Sei p_j ein Index, der nur einmal vorkommt und

$$\pi' := \pi \backslash \{j, j+1\} \in \mathcal{P}(1, \dots, j-1, j+2, \dots, 2l\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tau(\pi) &= \tau\big(a(p_1, p_2) \dots a(p_{j-1}, p_j)a(p_j, p_{j-1}) \dots a(p_k, p_1)\big) \\ &= \tau\big(a(p_1, p_2) \dots a(p_{j-2}, p_{j-1})a(p_{j-1}, p_{j+2}) \dots a(p_k, p_1)\big) \cdot \tau\big(a(p_{j-1}, p_j)^2\big) \\ &= \tau(\pi'), \end{aligned}$$

und

$$\#\pi' = l = \frac{k-2}{2} + 1,$$

d.h. wir haben das Problem von $\pi \in \mathcal{P}(k)$ reduziert auf $\pi' \in \mathcal{P}(k-2)$. Damit π also einen Beitrag zum Limes liefert (und zwar $\tau(\pi) = 1$), muß obiger Schritt rekursiv immer wieder durchführbar sein – d.h. es muß immer einen Block $(j) \in \pi$ geben mit $j - 1 \sim_\pi j + 1$ – bis wir für $k = 2$ auf die Partition $\pi'' = \{(1), (2)\}$ stoßen. Es ist klar, daß eine solche zulässige Partition π insbesondere nicht-kreuzend sein muß.
Das gesuchte $2k$-te Moment ist also die Anzahl dieser zulässigen Partitionen in $NC(2k)$. Andererseits wollen wir sehen, daß dies gleich dem entsprechenden Moment vom Halbkreis ist, also gleich der Anzahl der nicht-kreuzenden Paarungen von $2k$ Elementen. Obige π sind nun zwar keine Paarungen, wir können sie aber in eine eindeutige Bijektion dazu setzen.
Wir ordnen einer zulässigen Partitionen π folgendermaßen eine nicht-kreuzende Paarung σ zu: Im obigen rekursiven Schritt nehmen wir $j-1$ und j als Block von σ. Dadurch bauen wir uns rekursiv eine nicht-kreuzende Paarung auf, und andererseits gehört jede nicht-kreuzende Paarung genau zu einer zulässigen Partition der Index-Tupel. Es gilt

$$\sigma = K(\pi)$$

da π und σ folgendermaßen verknüpft sind: Stelle π als nicht-kreuzende Partition der Zahlen $1, \dots, k$ und σ als nicht-kreuzende Paarung der

Zahlen $\bar{1},\ldots,\bar{k}$ dar, wobei wir die normalen und die gestrichenen Zahlen alternierend angeordnet denken, also

$$1\bar{1}2\bar{2}\ldots k\bar{k}.$$

Stellen wir die Partition π nun graphisch dar durch Verbinden der entsprechenden Blöcke in $1,\ldots,k$, so ergibt sich σ als die maximale nicht-kreuzende Partition von $\bar{1},\ldots,\bar{k}$, so daß $\pi\cup\sigma$ nicht-kreuzend als Partition von $1,\bar{1},\ldots,k,\bar{k}$ ist (vgl. 7.18).
Beispiele: Für $k=2,4$ haben wir die folgenden Korrespondenzen

- $k=2$

$$(i,j) \quad \hat{=} \quad \pi=\{(1),(2)\} \quad \hat{=} \quad \sigma=\{(\bar{1},\bar{2})\}$$

- $k=4$

$$(i,j,i,k) \quad \hat{=} \quad \pi=\{(1,3),(2),(4)\} \quad \hat{=} \quad \sigma=\{(\bar{1},\bar{2}),(\bar{3},\bar{4})\}$$

$$(i,j,k,j) \quad \hat{=} \quad \pi=\{(1),(2,4),(3)\} \quad \hat{=} \quad \sigma=\{(\bar{1},\bar{4}),(\bar{2},\bar{3})\}$$

Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\big((X^{(n)})^k\big)=\begin{cases}0, & k \text{ ungerade}\\ \#NCP(k), & k \text{ gerade}\end{cases}$$

Damit konvergiert die Verteilung von $X^{(n)}$ aber gegen die Halbkreis-Verteilung.
(b) Nehmen wir nun an, wir haben für jedes $i\in I$ eine Zufallsmatrix $X_i^{(n)}$ gemäß (a), so daß (für jedes $n\in\mathbb{N}$) die Eingänge von $X_i^{(n)}$ und $X_j^{(n)}$ für $i\neq j$ unabhängig voneinander sind.
Dann berechnen wir für $k\in\mathbb{N}$ und $i(1),\ldots,i(k)\in I$ das gemischte Moment

$$\varphi_n(X_{i(1)}^{(n)}\ldots X_{i(k)}^{(n)}) \\ =\frac{1}{n^{k/2+1}}\sum_{p_1,\ldots,p_k}^{n}\tau\big(a_{i(1)}(p_1,p_2)a_{i(2)}(p_2,p_3)\ldots a_{i(k)}(p_k,p_1)\big)$$

im Limes $n\to\infty$.
Die Argumentation ist genau wie bei (a), im Limes $n\to\infty$ geben nur solche Index-Tupel $(p_1,\ldots,p_k)$ einen Beitrag, bei denen jeder Matrix-Index genau zweimal auftritt, allerdings muß nun an den entsprechenden Stellen auch der Index $i(.)$ übereinstimmen.
Sei nämlich $(p_1,\ldots,p_k)\hat{=}\pi$ ein beitragendes Tupel. Die Bedingung, daß jeder Matrix-Index zweimal auftreten muß, liefert wie in (a) die Bedingung, daß $\sigma=K(\pi)$ eine nicht-kreuzende Paarung sein muß. Allerdings muß nun mehr gelten. Betrachte die rekursive Konstruktion von σ aus

π. Dabei sei j der Index, so daß $p_{j-1} = p_{j+1}$, also $(j-1, j)$ ein Block von σ. Dann haben wir aber

$$\begin{aligned}
\tau(\pi) &= \tau\big(a_{i(1)}(p_1,p_2)\dots a_{i(j-1)}(p_{j-1},p_j)a_{i(j)}(p_j,p_{j-1})\dots a_{j(k)}(p_k,p_1)\big)\\
&= \tau\big(a_{i(1)}(p_1,p_2)\dots a_{i(j-2)}(p_{j-2},p_{j-1})a_{i(j+1)}(p_{j-1},p_{j+2})\dots a_{i(k)}(p_k,p_1)\big)\\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \tau\big(a_{i(j-1)}(p_{j-1},p_j)a_{i(j)}(p_j,p_{j-1})\big)\\
&= \tau(\pi')\cdot \delta_{i(j-1),i(j)},
\end{aligned}$$

d.h. damit wir einen Beitrag erhalten, muß nun zusätzlich noch gelten: $i(j-1) = i(j)$. Da dies bei jedem rekursiven Schritt gelten muß, geben also nur die π einen Beitrag, für die mit $\sigma = K(\pi) \in NCP(k)$ gilt

$$i(r) = i(s) \text{ für } r \sim_\sigma s.$$

Wir erhalten somit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(X^{(n)}_{i(1)} \dots X^{(n)}_{i(k)}) = \#\{\sigma \in NCP(k) \mid i(r) = i(s) \text{ für } r \sim_\sigma s\},$$

falls k gerade, und 0 sonst.
Dies beschreibt aber gerade die gemischten Verteilungen einer Halbkreis-Familie (vgl. 7.15).
(c) Seien also nun wie in (b) für jedes $i \in I$ eine Zufallsmatrix

$$X^{(n)}_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(a_i(p,q)\big)^n_{p,q=1}$$

und zusätzlich für jedes $j \in J$ eine konstante Diagonalmatrix

$$D^{(n)}_j = \big(\beta^{(n)}_i(p,q)\big)^n_{p,q=1}$$

gegeben. Wir müssen nun die gemischten Momente in den $X^{(n)}_i$ und $D^{(n)}_j$ im Limes $n \to \infty$ berechnen. Der konkreteren Schreibweise wegen nehmen wir dabei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, daß für ein $j \in J$ die Matrix

$$D^{(n)}_j = 1^{(n)}$$

jeweils der Einheitsmatrix entspricht (falls nicht, nehmen wir die einfach hinzu; 1 ist ja sowieso frei von allem, dies ändert an unserer Aussage also nichts), und daß für alle $j_1, j_2 \in J$ es auch ein $j \in J$ gibt, mit

$$D^{(n)}_{j_1} D^{(n)}_{j_2} = D^{(n)}_j$$

(dies kann durch Vergrößern von J auch immer erreicht werden). Dann reicht es, in X und D alternierende gemischte Momente der Form

$$\varphi_n\big(D^{(n)}_{j(1)} X^{(n)}_{i(1)} D^{(n)}_{j(2)} X^{(n)}_{i(2)} \dots D^{(n)}_{j(k)} X^{(n)}_{i(k)}\big)$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $i(1), \dots, i(k) \in I$, $j(1), \dots, j(k) \in J$ zu betrachten.
Beispiel: Im Prinzip müßten wir auch ein Moment der Form

$$\varphi_n\big(X_1^{(n)} X_2^{(n)} D_5^{(n)} D_3^{(n)} X_4^{(n)} D_8^{(n)}\big)$$

betrachten, aber dieses können wir ja auch in der alternierenden Form

$$\varphi_n\big(D_8^{(n)} X_1^{(n)} 1^{(n)} X_2^{(n)} (D_5^{(n)} D_3^{(n)}) X_4^{(n)} 1^{(n)}\big)$$

sehen, wobei $1^{(n)}$ und $D_5 D_3$ auch konstante Diagonalmatrixen sind (beachte die Zyklizität der Spur).
Sei also nun $k \in \mathbb{N}$ und $i(1), \dots, i(k) \in I$, $j(1), \dots, j(k) \in J$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\varphi_n\big(D_{j(1)}^{(n)} X_{i(1)}^{(n)} \dots D_{j(k)}^{(n)} X_{i(k)}^{(n)}\big) \\
&= \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{p_1,\dots,p_k}^{n} \tau\big(\beta_{j(1)}^{(n)}(p_1,p_1) a_{i(1)}(p_1,p_2) \beta_{j(2)}^{(n)}(p_2,p_2) a_{i(2)}(p_2,p_3) \\
&\qquad\qquad \dots \beta_{j(k)}^{(n)}(p_k,p_k) a_{i(k)}(p_k,p_1)\big) \\
&= \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{p_1,\dots,p_k}^{n} \tau\big(a_{i(1)}(p_1,p_2) a_{i(2)}(p_2,p_3) \dots a_{i(k)}(p_k,p_1)\big) \\
&\qquad\qquad \beta_{j(1)}^{(n)}(p_1,p_1) \beta_{j(2)}^{(n)}(p_2,p_2) \dots \beta_{j(k)}^{(n)}(p_k,p_k).
\end{aligned}$$

Genauso wie in (b) liefert der Faktor

$$\tau\big(a_{i(1)}(p_1,p_2) a_{i(2)}(p_2,p_3) \dots a_{i(k)}(p_k,p_1)\big)$$

im Limes $n \to \infty$ nur einen Beitrag für Tupel $(p_1, \dots, p_k)$, die zulässigen Partitionen π entsprechen, welche außerdem noch der Bedingung genügen, daß sie jeweils nur gleiche $i(.)$-Indizes miteinander koppeln. (Beachte hierbei, daß wir den Beitrag der $B's$ in nicht-zulässigen Partitionen aufgrund unserer Voraussetzung (ii) durch eine von n unabhängige Konstante beschränken können – eigentlich müßte doch die Bedingung an die Existenz der Momente im Limes genügen ???)
Also muß insbesondere $k = 2l$ wieder gerade sein, um einen nichtverschwindenden Limes zu erhalten. Sei π eine zulässige Partition mit Komplement

$$\sigma = K(\pi) = \{(v_1, w_1), \dots, (v_l, w_1)\} \in NCP(2l),$$

so daß gilt

$$i(v_m) = i(w_m) \qquad \forall\, m = 1, \dots, l.$$

Es bleibt, den zugehörigen Beitrag

$$\frac{1}{n^{l+1}} \sum_{(p_1,\dots,p_k) \hat{=} \pi} \beta_{j(1)}^{(n)}(p_1,p_1) \beta_{j(2)}^{(n)}(p_2,p_2) \dots \beta_{j(k)}^{(n)}(p_k,p_k)$$

im Limes $n \to \infty$ zu identifizieren. Mit

$$\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \qquad \text{wobei} \qquad r = l+1$$

gilt:

$$\frac{1}{n^{l+1}} \sum_{(p_1,\dots,p_k)\hat{=}\pi} \beta^{(n)}_{j(1)}(p_1,p_1)\beta^{(n)}_{j(2)}(p_2,p_2)\dots\beta^{(n)}_{j(k)}(p_k,p_k)$$
$$= \sum_{\substack{q_V=1,\dots,n\,(V\in\pi)\\ q_V\neq q_{V'}\,(V\neq V')}} \prod_{V=(v_1,\dots,v_s)\in\pi} \frac{1}{n}\beta^{(n)}_{j(v_1)}(q_V,q_V)\dots\beta^{(n)}_{j(v_s)}(q_V,q_V).$$

Da im Limes $n \to \infty$ die Summationsbedingung $q_V \neq q_{V'}$ vernachlässigbar wird, können wir die Summationen über die einzelnen Blöcke von π unabhängig voneinander durchführen, und wir erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{l+1}} \sum_{(p_1,\dots,p_k)\hat{=}\pi} \beta^{(n)}_{j(1)}(p_1,p_1)\beta^{(n)}_{j(2)}(p_2,p_2)\dots\beta^{(n)}_{j(k)}(p_k,p_k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{V=(v_1,\dots,v_s)\in\pi} \Big(\frac{1}{n}\sum_{q_V=1}^{n} \beta^{(n)}_{j(v_1)}(q_V,q_V)\dots\beta^{(n)}_{j(v_s)}(q_V,q_V)\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{V=(v_1,\dots,v_s)\in\pi} \mathrm{tr}_n(D^{(n)}_{j(v_1)}\dots D^{(n)}_{j(v_s)})$$
$$= \prod_{V=(v_1,\dots,v_s)\in\pi} \varphi(D_{j(v_1)}\dots D_{j(v_s)})$$
$$= \varphi_\pi[D_{j(1)},\dots,D_{j(k)}].$$

Insgesamt haben wir in diesem Fall also das Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n\big(D^{(n)}_{j(1)}X^{(n)}_{i(1)}\dots D^{(n)}_{j(k)}X^{(n)}_{i(k)}\big)$$
$$= \sum_{\substack{\sigma\in NCP(k)\,\text{mit}\\ i(r)=i(s)\ \text{für}\ r\sim_\sigma s}} \varphi_{K^{-1}(\sigma)}[D_{j(1)},\dots,D_{j(k)}]$$

(welches natürlich nur für gerades k von 0 verschieden ist).
Mit einer Halbkreis-Familie $\{s_i\}_{i\in I}$ können wir die Summationsbedingung auch folgendermaßen ausdrücken

$$\dots = \sum_{\sigma\in NC(k)} k_\sigma[s_{i(1)},\dots,s_{i(k)}]\varphi_{K^{-1}(\sigma)}[D_{j(1)},\dots,D_{j(k)}],$$

welches (vgl. 7.19) genau die Berechnungsvorschrift für gemischte Momente in freien $\{s_i\}_{i\in I}$ und $\{D_j\}_{j\in J}$ darstellt. □

9.6. **Beispiel.** Betrachte folgendes Problem: $D^{(n)}$ seien konstante Diagonalmatrizen mit

$$\mu_{D^{(n)}} \xrightarrow{\text{Vert}} \mu$$

(für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ) und $X^{(n)}$ seien symmetrische Gaußsche $n \times n$-Zufallsmatrizen. Berechne im Limes $n \to \infty$ die Verteilung von $D^{(n)} + X^{(n)}$.
(Solche und ähnliche Fragestellungen wurden in den letzten Jahrzehnten von Pastur und Girko ausführlich untersucht; physikalische 'Motivation': $D \hat{=}$ deterministischer Hamiltonoperator, $X \hat{=}$ probabilistischer Zufalls-Hamiltonoperator)
Solche Probleme können in unserem Rahmen systematisch und effektiv behandelt werden: Nach Satz 9.4 werden $D^{(n)}$ und $X^{(n)}$ asymptotisch frei, und die Verteilung von $X^{(n)}$ geht gegen die Halbkreisverteilung γ_r (mit Radius r gemäß Varianz der Eingänge von $X^{(n)}$), also

$$\begin{aligned} \lim \mu_{D^{(n)}+X^{(n)}} &= \lim \mu_{D^{(n)}} \boxplus \lim \mu_{X^{(n)}} && (1) \\ &= \mu \boxplus \gamma_r. && (2) \end{aligned}$$

Gewünscht ist allerdings eine mehr analytische Beschreibung, d.h. man will die Cauchy-Transformierte G_{D+X} von $\mu \boxplus \gamma_r$ durch die Cauchy-Transformierte G_D von μ ausdrücken. Unsere R-Transformations-Theorie liefert aber direkt das Gewünschte aufgrund folgenden allgemeinen Lemmas.

9.7. **Lemma.** Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger. Dann gilt im Sinne von formalen Potenzreihen für

$$G(z) := G_{\mu \boxplus \nu}(z)$$

folgende implizite Gleichung

$$G(z) = G_\mu\big[z - R_\nu[G(z)]\big]$$

– und aus Symmetriegründen natürlich genauso

$$G(z) = G_\nu\big[z - R_\mu[G(z)]\big].$$

Beweis. Es gilt allgemein

$$G[K(z)] = K[G(z)] = z$$

mit

$$K(z) = R(z) + \frac{1}{z},$$

also

$$R[G(z)] + \frac{1}{G(z)} = z$$

oder

$$z - R[G(z)] = \frac{1}{G(z)}.$$

Sei nun y definiert durch

$$G_\mu(y) = G(z).$$

(Zumindest in einer Umgebung von $z = \infty$ ist G_μ invertierbar, deshalb ist diese Gleichung auch im Sinne von formalen Potenzreihen auflösbar nach y.)
Somit gilt

$$\begin{aligned} y - R_\mu[G(z)] &= y - R_\mu[G_\mu(y)] \\ &= \frac{1}{G_\mu(y)} \\ &= \frac{1}{G(z)} \\ &= z - R[G(z)] \\ &= z - R_\mu[G(z)] - R_\nu[G(z)], \end{aligned}$$

woraus folgt

$$y = z - R_\nu[G(z)].$$

Dies ergibt aber die Behauptung:

$$G(z) = G_\mu(y) = G_\mu\big[z - R_\nu[G(z)]\big].$$

□

Spezialisiert auf unser obiges Problem,

$$R_\mu(z) = R_{\gamma_r}(z) = \frac{r^2}{4} z$$

ergibt das Lemma somit für $G = G_{D+X}$ folgende implizite Gleichung:

$$G(z) = G_D\big[z - \frac{r^2}{4} G(z)\big]$$

Diese Gleichung wurde von Pastur (1973) unter dem Namen 'deformierter Halbkreis' abgeleitet.

9.8. **Notation.** 1) Bezeichne $\mathcal{U}(n)$ die unitären $n \times n$-Matrizen:

$$\mathcal{U}(n) := \{U = (u(p,q))_{p,q=1}^n \mid UU^* = U^*U = 1\} \subset M_n.$$

Dann ist $\mathcal{U}(n)$ eine kompakte Gruppe; somit gibt es ein eindeutig bestimmtes **Haar-Maß** h auf $\mathcal{U}(n)$, d.h.

- $h\big(\mathcal{U}(n)\big) = 1$
- h ist invariant unter Links- und Rechtswirkung von $\mathcal{U}(n)$ auf sich selbst

2) Sei $(\mathcal{C},\tau)\hat{=}(\Omega,P)$ ein klassischer Wahrscheinlichkeitsraum mit Zufallsvariablen

$$u(p,q):\Omega\to\mathbb{C}\qquad(p,q=1,\dots,n).$$

Die Zufallsvariable

$$U=\big(u(p,q)\big)_{p,q=1}^{n}\in\mathcal{U}(n)\otimes\mathcal{C}\subset M_n\otimes\mathcal{C}$$

heißt **unitäre $n\times n$-Zufallsmatrix**, falls die matrix-wertige Zufallsvariable

$$U:\Omega\to\mathcal{U}(n)$$

das Haar-Maß h auf $\mathcal{U}(n)$ als Verteilung besitzt.

9.9. **Bemerkungen und Beispiele.** 1) Beispiel $n=1$:

$$\mathcal{U}(1)\hat{=}S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}\qquad\text{Torus.}$$

Haar-Maß $h\,\hat{=}$ Gleichverteilung (Lebesgue-Maß) auf S^1.
Eine unitäre 1×1-Zufallsmatrix ist nichts anderes als eine klassische Zufallsvariable, die Haar unitär ist.
2) Sei $U=\big(u(p,q)\big)_{p,q=1}^{n}$ eine unitäre $n\times n$-Zufallsmatrix. Dann ist die gemeinsame Verteilung aller $u(p,q)$ $(p,q=1\dots,n)$ eindeutig bestimmt durch folgende Bedingungen:

- U ist Haar unitäres Element, d.h.

  $$UU^*=U^*U=1$$

  und

  $$\varphi(U^k)=\varphi(U^{*k})=0\qquad\forall\,k\neq 0$$

- die gemeinsame Verteilung ist invariant unter der Transformation

  $$U\mapsto VUW$$

  für alle $V,W\in\mathcal{U}(n)$

9.10. **Satz.** Für $n\in\mathbb{N}$ seien gegeben

- unitäre $n\times n$-Zufallsmatrizen U_i $(i\in I)$, so daß für $i\neq i'$ $(i,i'\in I)$ alle Eingänge von U_i unabhängig von allen Eingängen von $U_{i'}$
- konstante $n\times n$-Diagonalmatrizen D_j $(j\in J)$ mit gemeinsamer Verteilung im Limes $n\to\infty$

Dann gilt im Limes $n\to\infty$:

$$\big(\{U_i,U_i^*\}\big)_{i\in I}\cup\{D_j\mid j\in J\}$$

werden asymptotisch frei und die U_i $(i\in I)$ konvergieren gegen Haar unitäre Elemente.

9.11. **Korollar.** Seien $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ konstante $n \times n$-Diagonalmatrizen mit Verteilung μ_A bzw. μ_B im Limes $n \to \infty$. Dann werden

$$A^{(n)} \qquad \text{und} \qquad U^{(n)}B^{(n)}U^{(n)*} \qquad (U^{(n)} \text{ unitäre } n \times n\text{-Zufallsmatrix})$$

asymptotisch frei.
Insbesondere gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{A^{(n)}+U^{(n)}B^{(n)}U^{(n)*}} = \mu_A \boxplus \mu_B.$$

9.12. **Bemerkung.** Somit hat freenes bei selbstadjungierten $n \times n$-Matrizen A, B (im Limes $n \to \infty$) folgende 'konkrete' Bedeutung:

$$\begin{aligned} A, B \text{ frei} \quad &\hat{=} \quad \text{Eigenwertbasis von } A \text{ 'zufällig' gegen} \\ &\qquad\quad \text{Eigenwertbasis von } B \text{ verdreht} \\ &\hat{=} \quad A \text{ und } B \text{ in 'generischer' Position} \end{aligned}$$

Beweis. [9.11] Dies folgt aus 9.10 mit folgender Bemerkung: Sind $\{U, U^*\}$, $\{A, B\}$ frei und U Haar unitär, so sind auch A und UBU^* frei.
Diese Bemerkung folgt folgendermaßen direkt aus der Definition von freeness: Betrachte

$$X := p_1(A)q_1(UBU^*)p_2(A)q_2(UBU^*)\dots$$

mit

$$\varphi\big(p_i(A)\big) = 0, \qquad \varphi\big(q_i(UBU^*)\big) = 0.$$

Wegen

$$q(UBU^*) = Uq(B)U^*$$

bedeutet die Voraussetzung an die $q_i(UBU^*)$ also auch (beachte: φ Spur)

$$0 = \varphi\big(Uq_i(B)U^*\big) = \varphi\big(q_i(B)\big).$$

Somit haben wir also

$$\varphi\big(p_i(A)\big) = 0, \qquad \varphi\big(q_i(B)\big) = 0$$

und

$$X = p_1(A)Uq_1(B)U^*p_2(A)Uq_2(B)U^*\dots$$

Da außerdem

$$\varphi(U) = \varphi(U^*) = 0 \qquad (\text{da } U \text{ Haar unitär}),$$

folgt also

$$\varphi(X) = 0.$$

□

Beweis. [9.10] Wir skizzieren zwei verschiedene Beweise, den ursprünglichen von Voiculescu und einen neueren, konzeptionell direkteren, von F. Xu. In beiden Fällen ist die Grundidee recht einfach, die konkrete Ausführung allerdings recht technisch.
1. Beweis (Voiculescu, 1991): Transformiere Gaußsche Zufallsmatrizen X_i in unitäre Zufallsmatrizen U_i,

$$(D_j, X_i) \rightsquigarrow (D_j, U_i),$$

auf folgendeWeise: Sei X_i eine Gaußsche Zufallmatrix (d.h. unabhängige und Gauß-verteilte Eingänge, ohne Symmetriebedingung). Dann ist die Phase U_i in der Polarzerlegung

$$X_i = U_i|X_i| = U_i(X_i^* X_i)^{1/2}$$

eine unitäre Zufallsmatrix. Außerdem ist $X_i^* X_i$ fast sicher invertierbar, d.h. wir erhalten U_i durch

$$U_i = X_i(X_i^* X_i)^{-1/2}.$$

Nach Satz 9.4 werden die X_i (und somit auch Polynome in den X_i) frei.
Dehne dies nun auch auf Funktionen der Form $X_i(X_i^* X_i)^{-1/2}$ aus (worin das wesentliche Problem darin besteht, die Abschätzungen gleichmäßig in n zu machen).
2. Beweis (F. Xu, 1997): Berechne direkt die gemischten Momente, z.B.

$$\begin{aligned}\varphi_n(D_1^{(n)} U^{(n)} D_2^{(n)} U^{(n)*}) &= \frac{1}{n} \sum_{p_1,p_2=1}^{n} \tau\big(\beta_1(p_1,p_1) u(p_1,p_2) \beta(p_2,p_2) u^*(p_2,p_1)\big) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p_1,p_2=1}^{n} \beta_1(p_1,p_1)\beta_2(p_2,p_2) \tau\big(u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1)\big).\end{aligned}$$

Wir brauchen dazu also die gemischten Momente in den Eingängen von U. Gemäß 9.9 sind diese eindeutig bestimmt, das Problem ist aber nun die genaue Form, insbesondere die Abhängigkeit von n.
Wir betrachten nur ein einfaches Beispiel um zu sehen, wie man diese im Prinzip berechnen kann. Wir betrachten

$$\tau\big(u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1)\big) = ?$$

Zunächst bemerken wir, daß der gesuchte Wert unabhängig von p_1, p_2 ist, denn: Die gemeinsame Verteilung der Eingänge von U soll ja unter Transformationen $U \mapsto WUV$ invariant bleiben. Für W und V nehmen wir nun Permutationsmatrizen, welche die i-te mit der j-ten

Spalte/Zeile bzw. die k-te mit der l-ten Spalte/Zeile vertauschen. (Permutationsmatrizen sind insbesondere unitär.) Unter dieser Transformation erhalten wir aber die Ersetzungen

$$\begin{aligned} u(i,k) &\rightsquigarrow u(j,l) \\ u^*(k,i) &\rightsquigarrow u^*(l,j). \end{aligned}$$

Somit muß aber gelten

$$\tau\big(u(i,k)u^*(k,i)\big) = \tau\big(u(j,l)u^*(l,j)\big) \qquad \forall\, i,k,j,l,$$

also wie behauptet

$$\tau\big(u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1)\big) = \alpha \qquad \text{unabhängig von } p_1, p_2.$$

Den Wert von α können wir folgendermaßen mit Hilfe der Relation $UU^* = 1$ bestimmen:

$$\sum_{p_2=1}^{n} u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1) = 1$$

für alle p_1, also auch

$$1 = \tau(1) = \sum_{p_2=1}^{n} \tau\big(u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1)\big) = n \cdot \alpha,$$

somit $\alpha = 1/n$ und

$$\tau\big(u(p_1,p_2)u^*(p_2,p_1)\big) = \frac{1}{n}.$$

Für die Berechung des entsprechenden gemischten Momentes ergibt dies

$$\begin{aligned} \varphi_n(D_1^{(n)}U^{(n)}D_2^{(n)}U^{(n)*}) &= \frac{1}{n}\sum_{p_1,p_2=1}^{n} \beta_1(p_1,p_1)\beta_2(p_2,p_2)\frac{1}{n} \\ &= \Big(\frac{1}{n}\sum_{p_1}\beta_1(p_1,p_1)\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{p_2}\beta_2(p_2,p_2)\Big) \\ &= \varphi(D_1)\varphi(D_2), \end{aligned}$$

welches genau das behauptete Ergebnis für freie Zufallsvariable ist.
Die Berechnung höherer Momente ist im Prinzip analog, aber konkret viel aufwendiger, da man leicht den Überblick über all die verschiedenen Terme verliert. Der Beweis von Xu (der im Kern auf Weingarten (1978) zurückgeht) benutzt daher gruppentheoretische Argumente in den symmetrischen Gruppen S_n. □