FREIE WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

ROLAND SPEICHER

Vortrag zur Emeritierungsfeier von Prof. Dr. Wilhelm von Waldenfels

In meinem Vortrag möchte ich Ihnen ein wenig über ein neueres und zur Zeit sehr aktives Gebiet der Mathematik erzählen: die von Dan Voiculescu vor etwa 15 Jahren eingeführte sogenannte **freie Wahrscheinlichkeitstheorie**. Diese Theorie steht irgendwo zwischen Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie, besitzt aber viele Verbindungen zu anderen Gebieten – wie Operatoralgebren, Kombinatorik, Zufallsmatrizen oder auch statistische Physik. Ich möchte Ihnen nicht nur eine kleine Idee von dieser freien Wahrscheinlichkeitstheorie vermitteln, sondern insbesondere auch aufzeigen, wie mein Zugang zu diesem Gebiet ganz in der Tradition der von Waldenfelsschen Philosophie über nicht-kommutative zentrale Grenzwertsätze steht.

In der nicht-kommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie oder Quantenstochastik, für welche von Waldenfels ja einer der wesentlichen Pioniere ist, versuchen wir Konzepte aus der Wahrscheinlichkeitstheorie auf einen allgemeineren nicht-kommutativen Rahmen zu verallgemeinern – und zwar nicht (nur) des Verallgemeinerns willens, sondern da wir eine probabilistische Beschreibung von Quantensystemen anstreben. Und diese müssen im allgemeinen Fall durch die Quantenmechanik, also nicht-kommutativ, beschrieben werden. Insbesondere bei von Waldenfels standen meist sehr konkrete physikalische Probleme – wie die Druckverbreiterung von Spektrallinien in Gasen oder der Versuch einer Beschreibung des Lasers – am Anfang seiner Beiträge zur Quantenstochastik. Die Faszination der von Waldenfelsschen Arbeiten lag für mich immer darin, wie er es schaffte, diese konkreten und auch sehr komplexen Probleme auf einen möglichst einfachen mathematischen Kern zu reduzieren. Ein Charakteristikum seiner Arbeiten scheint mir dabei zu sein, daß er die analytische Struktur des Problems nach Möglichkeit zugunsten algebraischer und kombinatorischer Gesichtspunkte vernachlässigte. Ein Standpunkt der auch für meinem Zugang zur freien Wahrscheinlichkeitstheorie sehr fruchtbar war.

Lassen Sie mich daher, bevor ich zur freien Wahrscheinlichkeitstheorie komme, Ihnen ganz kurz das wesentliche Merkmal der von Waldenfelsschen Arbeiten über nicht-kommutative Grenzwertsätze aufzeigen.

Eines der fundamentalen Ergebnisse der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist ja der zentrale Grenzwertsatz, welcher aussagt, daß die Verteilung einer normierten Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (unter gewissen Voraussetzungen) gegen eine Normalverteilung konvergiert:

Seien $X_1, \dots, X_n$ identisch verteilte und unabhängige Zufallsvariable. Sind die X_i zentriert und mit Varianz 1, so konvergiert

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \to N \qquad \text{in Verteilung}$$

für $n \to \infty$; wobei N $\mathcal{N}(0,1)$-Normalverteilung.

Die gängige Methode heutzutage, um solche Fragen zu Summen von unabhängigen Zufallsvariablen (also Faltungen von Maßen) anzugehen, ist die Fouriertransformation – ein analytisch sehr mächtiges Werkzeug, welches sich bezüglich Faltung sehr schön verhält, also obigem Problem bestens angepaßt ist.

Lassen Sie mich kurz an den klassischen Rahmen erinnern: Wir arbeiten auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß P. Unsere Zufallsvariable X sind meßbare Funktionen und unser Maß P liefert uns einen Erwartungswert

$$\mathbf{E}[X] := \int_\Omega X(\omega) dP(\omega).$$

Jede Zufallsvariable X hat bezüglich P eine Verteilung $\mu_X = \text{Vert}(X)$ – ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbf{R}$, welches bestimmt ist durch

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}} h(x) d\mu_X(x)$$

für alle beschränkten Funktionen h auf $\mathbf{R}$. Die Faltung von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mu * \nu,$$

beschreibt die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen, da ja gilt:

$$\text{Vert}(X+Y) = \text{Vert}(X) * \text{Vert}(Y), \qquad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ unabhängig.}$$

Jedem Wahrscheinlichkeitsmaß μ ordnen wir nun die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_\mu$ zu gemäß

$$\mu \rightsquigarrow \mathcal{F}_\mu(t) := \int e^{itx} d\mu(x) = \mathbf{E}[e^{itX}],$$

(falls $\mu = \text{Vert}(X)$).
Die Bedeutung dieser Fouriertransformation für die Beschreibung der Faltung von Maßen liegt in der Formel

$$\mathcal{F}_{\mu*\nu}(t) = \mathcal{F}_\mu(t) \cdot \mathcal{F}_\nu(t).$$

Die Fouriertransformation erlaubt aufgrund dieser Eigenschaft einen direkten Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Will man nun aber den zentralen Grenzwertsatz nicht-kommutativ verallgemeinern, so stößt man sogleich auf das Problem, daß eine nicht-kommutative Fouriertransformation nicht oder nur in sehr speziellen Situationen sinnvoll definiert werden kann. Die analytische Beschreibung des klassischen zentralen Grenzwertsatzes widersetzt sich somit direkten Verallgemeinerungsversuchen.

Der Zugang von von Waldenfels ist nun viel direkter und eigentlich auch viel älter. Anstatt die Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch ihre Fouriertransformationen zu beschreiben, kann man sich nämlich die Momente der Verteilungen anschauen und untersuchen, ob und wohin diese konvergieren – in vielen Fällen ist die Konvergenz der Momente äquivalent zur Konvergenz der Verteilungen selbst. Dieser Zugang ist natürlich wohlbekannt, gilt aber im Allgemeinen als etwas altmodisch und nicht so edel wie die Beschreibung mittels Fouriertransformation.

Allerdings ist er viel besser für eine Verallgemeinerung ins Nicht-Kommutative geeignet. Schauen wir uns das daher etwas genauer an: Wir haben unabhängige Zufallsvariable X_i und wollen sehen, wogegen die Momente von

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

für $n \to \infty$ konvergieren. Man sieht leicht, daß die ungeraden Momente von S_n aufgrund der Zentriertheit der Variablen X_i verschwinden, wir müssen uns also nur die geraden Momente $\mathbf{E}[S_n^{2k}]$ von S_n anschauen. Dies ist aber ein rein kombinatorisches Problem. Das Wesentliche sieht man dabei schon im Spezialfall des vierten Momentes $k = 2$. Wir haben

$$\mathbf{E}[S_n S_n S_n S_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k(1),k(2),k(3),k(4)=1}^{n} \mathbf{E}[X_{k(1)} X_{k(2)} X_{k(3)} X_{k(4)}].$$

Da alle X_i identisch verteilt sind, geben in dieser Summe viele Terme den gleichen Wert – der Ausdruck $\mathbf{E}[X_{k(1)} X_{k(2)} X_{k(3)} X_{k(4)}]$ hängt nämlich nur davon ab, welche der vier Indizes $k(1), \dots, k(4)$ übereinstimmen und welche nicht. Wir bekommen so Terme der Gestalt:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{E}[X_iX_jX_kX_l] = 0 & n(n-1)(n-2)(n-3) \sim n^4 \text{ Terme} \\
\mathbf{E}[X_iX_jX_kX_k] = 0 & n(n-1)(n-2) \sim n^3 \text{ Terme} \\
\quad \vdots & \\
\mathbf{E}[X_iX_iX_jX_j] = 1 & n(n-1) \sim n^2 \text{ Terme} \\
\mathbf{E}[X_iX_jX_jX_i] = 1 & n(n-1) \sim n^2 \text{ Terme} \\
\mathbf{E}[X_iX_jX_iX_j] = 1 & n(n-1) \sim n^2 \text{ Terme} \\
\quad \vdots & \\
\mathbf{E}[X_iX_iX_iX_j] = 0 & n(n-1) \sim n^2 \text{ Terme} \\
\mathbf{E}[X_iX_iX_iX_i] & n \text{ Terme}
\end{array}$$

Wir sehen, daß nur die drei Terme mit jeweils zwei übereinstimmenden Indizes von Null verschieden und auch im Limes $n \to \infty$ von der richtigen Größenordnung sind, somit haben wir also für die Momente im Limes $n \to \infty$ die folgende kombinatorische Beschreibung: Das Moment $\mathbf{E}[S_n^{2k}]$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen $1, 2, \dots, 2k$ in k Paare zu zerlegen.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^2] = 1 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^4] = 3 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^6] = 15 =$$

$$\vdots$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die dabei im Limes auftretenden Zahlen nichts anderes sind als die Momente der Gauß-Verteilung $\mathcal{N}(0,1)$.

Von Waldenfels hat diese Beschreibung des klassischen zentralen Grenzwertsatzes erfolgreich auf nicht-kommutative Situationen verallgemeinert, und ich war entscheidend durch diese kombinatorische Sichtweise geprägt, also ich vor etwa 10 Jahren zum ersten Mal mit der freien Wahrscheinlichkeitstheorie in Berührung kam.

Kommen wir nun nach diesen Vorbereitungen also endlich zu dem Hauptthema meines Vortrags, der freien Wahrscheinlichkeitstheorie.

Voiculescu führte im Zusammenhang mit sehr alten offenen Problemen in der Theorie der Operatoralgebren ein Analogon zu dem Begriff der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen ein, welche er 'freeness' nannte. So wie man 'Unabhängigkeit' als eine Vorschrift zur Berechnung von gemischten Momenten in unabhängigen Zufallsvariablen X und Y auffassen kann –

$$\mathbf{E}[X^{n_1}Y^{m_1}X^{n_2}Y^{m_2}\dots] = \mathbf{E}[X^{n_1+n_2+\cdots}] \cdot \mathbf{E}[Y^{m_1+m_2+\cdots}]$$

falls X und Y unabhängig

– so ist 'freeness' eine analoge Vorschrift, allerdings nun für nicht-kommutierende Variable (z.B. Operatoren), d.h. für Elemente aus einer, i.a. nicht-kommutativen, Algebra.

Um die Analogie zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie hervorzuheben, benutzen wir dabei probabilistische Begriffsbildungen. Ein **nicht-kommutativer Wahrscheinlichkeitsraum** ist einfach eine (i.a. nicht-kommutative) Algebra $\mathcal{A}$, versehen mit einem linearen Funktional (Erwartungswert) $\mathbf{E} : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$. Da dieses Paar $(\mathcal{A}, \mathbf{E})$ unser nicht-kommutativer Ersatz für einen **Wahrscheinlichkeits**raum sein soll, fordern wir noch, daß beide Objekte unital sein sollen, d.h.

$$1 \in \mathcal{A}, \qquad \text{und} \qquad \mathbf{E}[1] = 1.$$

Zufallsvariable sind einfach Elemente in unserer Algebra.

Wir sagen nun, daß zwei Zufallsvariable $X, Y \in \mathcal{A}$ **frei** sind bezüglich $\mathbf{E}$, wenn sich die gemischten Momente in X und Y in einer ganz bestimmten Art und Weise berechnen, nämlich gemäß der folgenden Definition.

Definition 1. X und Y heißen **frei** bezüglich $\mathbf{E}$, falls für zentrierte Polynome $p_1(X), p_2(X), \dots$ in X und zentrierte Polynome $q_1(Y), q_2(Y), \dots$ in Y, d.h.

$$\mathbf{E}[p_i(X)] = 0 = \mathbf{E}[q_j(Y)] \qquad \text{für alle } i, j,$$

auch die alternierenden Ausdrücke in den $p_i(X)$ und $q_j(Y)$ zentriert sind, also gilt:

$$\mathbf{E}[p_1(X)q_1(Y)p_2(X)q_2(Y)\dots] = 0.$$

$$\mathbf{E}[q_1(Y)p_1(X)q_2(Y)p_2(X)\dots] = 0.$$

Dies ist nun allerdings eine viel indirektere Charakterisierung als für unabhängige Zufallsvariable und auf den ersten Blick ist noch nicht mal klar, daß dies wirlich eine Vorschrift zur Berechnung aller gemischten Momente in X und Y ist. Es wird ja nur das Verschwinden von ganz speziellen gemischten Momenten gefordert. Da man allerdings Freiheit in der Wahl der auftretenden Polynome p_i und q_j hat, kann man alles auf diese speziellen alternierenden Momente zurückführen.

Betrachten wir dazu am besten kurz ein Beispiel. Im folgenden sollen X und Y immer frei sein.

Sind X und Y zentriert, so fordert unsere Definition, daß

$$\mathbf{E}[XY] = 0, \qquad \text{falls } \mathbf{E}[X] = 0 = \mathbf{E}[Y].$$

Wie berechnet sich aber $\mathbf{E}[XY]$ im allgemeinen Fall. Dazu wählen wir nun die zentrierten Polynome

$$p(X) := X - \mathbf{E}[X] \cdot 1 \qquad \text{und} \qquad q(Y) := Y - \mathbf{E}[Y] \cdot 1,$$

und unsere Definition sagt uns dann

$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X] \cdot 1)(Y - \mathbf{E}[Y] \cdot 1)] = 0.$$

Das Argument von $\mathbf{E}$ können wir aber natürlich auch linear ausmultiplizieren und wir erhalten – unter Beachtung von $\mathbf{E}[1] = 1$ – somit

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y] \qquad \text{für allgemeines freies } X \text{ und } Y.$$

Wir sehen, daß unsere Definition inbesondere auch eine Vorschrift zur Berechnung des gemischten Momentes $\mathbf{E}[XY]$ beinhaltet. Das Ergebnis in diesem speziellen Fall stimmt allerdings mit dem entsprechenden Resultat für unabhängige Zufallsvariable überein. Schauen wir uns daher noch ein etwas komplizierteres Beispiel an, nämlich das gemischte Moment $\mathbf{E}[XYXY]$. Wiederum führen wir dies durch Zentrieren auf einen Ausdruck zurück, der gemäß unserer Definition verschwindet,

$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X] \cdot 1)(Y - \mathbf{E}[Y]1)(X - \mathbf{E}[X]1)(Y - \mathbf{E}[Y]1)] = 0,$$

und durch Ausmultiplizieren (und Induktion über kleinere gemischte Momente) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XYXY] = \mathbf{E}[XX] \cdot \mathbf{E}[Y] \cdot \mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[YY] \cdot \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[X]& \\ - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y] \cdot \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].&\end{aligned}$$

Man sieht, 'freeness' ist zwar wie 'Unabhängigkeit' eine Vorschrift zur Berechnung gemischter Momente – aber eine ganz andere und, wie das letzte Beispiel zeigt, auch kompliziertere Vorschrift.

Da man sich vermutlich viele verschiedene Vorschriften zur Berechnung gemischter Momente ausdenken kann, ist die Relevanz obiger Definition auf den ersten Blick nicht klar. Voiculescu hat sich diese Regel natürlich nicht einfach so ausgedacht, sondern freie Variable treten bei dem von ihm betrachteten Problem über Operatoralgebren – genauer bei der Frage nach der Struktur der von Neumann Algebra der freien Gruppe – in ganz kanonischer Weise auf. Es war nun aber die Idee von

Voiculescu, das Konzept 'freeness' von diesem konkreten Problem zu lösen und als Struktur an sich zu untersuchen. Insbesondere betonte er die Analogie zwischen freeness und Unabhängigkeit.

Diese Betrachtungsweise war in der Tat sehr erfolgreich. Es stellte sich im Laufe der Zeit nämlich heraus, daß die oben angedeutete Analogie zur Theorie unabhängier Zufallsvariable sehr weitgehend ist: Zu vielen Ergebnissen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es eine freie Entsprechung.

Ein fundamentales Beispiel dafür ist die freie Entsprechung zur Faltung und zur Fouriertransformation. Wir definieren in Analogie zur klassischen Faltung, welche ja charakterisiert ist durch

$$\mathrm{Vert}(X+Y) = \mathrm{Vert}(X) * \mathrm{Vert}(Y), \qquad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ unabhängig},$$

die **freie Faltung** gemäß

$$\mathrm{Vert}(X+Y) = \mathrm{Vert}(X) \boxplus \mathrm{Vert}(Y), \qquad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ frei}.$$

Letztere Gleichung ist als Definition der binären Operation $\boxplus$ auf reellen Wahrscheinlichkeitsmaßen zu sehen.

Voiculescu hat nun einen analytischen Apparat zur Behandlung dieser freien Faltung entwickelt – die sogenannte R-Transformation. Er ordnet jedem Wahrscheinlichkeitsmaß μ eine sogenannte R-Transformierte $R_\mu(z)$ zu,

$$\mu \rightsquigarrow R_\mu(z),$$

so daß sich diese R-Transformierte sehr schön – nämlich additiv – bezüglich der freien Faltung verhält,

$$R_{\mu \boxplus \nu}(z) = R_\mu(z) + R_\nu(z).$$

Die R-Transformierte ist also als Analogon zum Logarithmus der Fouriertransformierten zu sehen – die Fouriertransformierte ist ja multiplikativ bezüglich klassischer Faltung, ihr Logarithmus ist somit additiv.

Voiculescu hat auch eine explizite Vorschrift zur Berechnung dieser R-Transformierten angegeben, allerdings ist dies um einiges komplizierter als die entsprechende Berechnung der Fouriertransformierten: Wir berechnen die R-Transformierte von μ nämlich aus der Cauchy-Transformierten G_μ,

$$\mu \rightsquigarrow G_\mu(z) := \int \frac{1}{z-x} d\mu(x) = \mathbf{E}[\frac{1}{z-X}],$$

gemäß

$$G_\mu[R_\mu(z) + 1/z] = z.$$

Mit Hilfe dieser R-Transformation konnte Voiculescu recht einfach das freie Gegenstück zum zentralen Grenzwertsatz beweisen:

Seien $X_1, X_2, \dots$ identisch verteilte und freie Zufallsvariable. Sind die X_i zentriert und mit Varianz 1, so konvergiert

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \to S \qquad \text{in Verteilung für } n \to \infty,$$

wobei S nun eine Variable ist, die nach dem sogenannten Wignerschen Halbkreis verteilt ist, d.h. die Verteilung $\mu_S = \mathrm{Vert}(S)$ von S ist stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes und die Dichte lebt auf dem Intervall $[-2, 2]$ und ist dort gegeben durch

$$d\mu_S(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - t^2}dx.$$

Als ich versuchte, diese Arbeiten von Voiculescu zu verstehen, war der Beweis des freien zentralen Grenzwertsatzes zwar analytisch ohne weiteres nachvollziehbar, aber da die analytische Form der Fouriertransformierten und der R-Transformierten doch sehr verschieden sind, hatte ich eigentlich keine rechte Idee von dem, was da eigentlich vorging.

Ich versuchte daher, diesen freien zentralen Grenzwertsatz auf der kombinatorischen Ebene gemäß des von Waldenfelsschen Zuganges zu nicht-kommutativen Grenzwertsätzen zu verstehen. D.h. ich schaute mir die Momente von

$$S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

an und versuchte eine kombinatorische Struktur im Limes $n \to \infty$ zu entdecken. Betrachten wir wiederum als illustratives Beispiel das vierte Moment, also

$$\mathbf{E}[S_n S_n S_n S_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k(1),k(2),k(3),k(4)=1}^{n} \mathbf{E}[X_{k(1)} X_{k(2)} X_{k(3)} X_{k(4)}].$$

Wie im klassischen Fall fallen wegen der identischen Verteilung der X_i viele Terme zusammen – wesentlich ist wieder nur, welche der vier Indizes $k(1), \dots, k(4)$ übereinstimmen und welche nicht. Die Argumentation ist genau wie im klassischen Fall, etliche Terme sind wegen der Zentrierung Null, andere kommen mit zu niedriger Ordnung in n vor, fallen also im Limes $n \to \infty$ auch weg. Somit verbleiben in diesem Limes wieder nur die drei Möglichkeiten

$$\mathbf{E}[X_i X_i X_j X_j], \qquad \mathbf{E}[X_i X_j X_j X_i], \qquad \mathbf{E}[X_i X_j X_i X_j].$$

Nun kommt aber der entscheidende Unterschied: Während im klassischen Fall all diese Möglichkeiten einen Beitrag – nämlich jeweils 1 – geben, so fällt im freien Fall eine der drei Möglichkeiten weg. Da die X_k zentriert sind und $X_i X_j X_i X_j$ ein alternierender Ausdruck in zentrierten Variablen ist, sagt uns unsere Definition von freeness ja gerade, daß

$$\mathbf{E}[X_i X_j X_i X_j] = 0.$$

Die beiden anderen Möglichkeiten ergeben den gleichen Beitrag wie im klassischen Fall,

$$\mathbf{E}[X_i X_i X_j X_j] = \mathbf{E}[X_i X_i] \cdot \mathbf{E}[X_j X_j] = 1$$

$$\mathbf{E}[X_i X_j X_j X_i] = \mathbf{E}[X_i X_i] \cdot \mathbf{E}[X_j X_j] = 1.$$

Wenn man die jeweils betrachteten Paarungen wie oben angedeutet graphisch veranschaulicht, dann sieht man auch einen wesentlichen qualitativen Unterschied zwischen den beiden beitragenden und dem wegfallenden Term: letzterer kann nämlich nur so gemalt werden, daß die beiden Paare sich kreuzen, d.h. er stellt eine sogenannte kreuzende Paarung dar. Die beiden beitragenden Terme hingegen gehören zu nicht-kreuzenden Paarungen.

Dies ist nun auch schon die allgemeine Charakterisierung des Geschehens im Limes $n \to \infty$. Man sieht recht einfach, daß die Tatsache 'X_i frei' dazu führt, daß nur genau die nicht-kreuzenden Paarungen im Limes einen Beitrag (und zwar jeweils den gleichen Beitrag gleich 1) liefern; alle kreuzenden Paarungen liefern keinen Beitrag.

Also: Unsere Momente $\mathbf{E}[S_n^{2k}]$ konvergieren im Limes $n \to \infty$ gegen die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen $1, 2, \dots, 2k$ in $2k$ **nicht-kreuzende** Paare zu zerlegen.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^2] = 1 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^4] = 2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n^6] = 5 =$$

$$\vdots$$

(Die im Limes auftretenden Zahlen sind dann natürlich die Momente der Halbkreisverteilung.)

Auf dieser kombinatorischen Ebene ist die Analogie zwischen klassischem und freiem zentralen Grenzwertsatz also viel direkter zu sehen als auf analytischen Niveau: Man muß nämlich alle Paarungen einfach durch alle nicht-kreuzenden Paarungen ersetzen, ansonsten ist alles genau gleich.

Diese sehr schöne Entsprechung zwischen klassischer und freier Theorie ist sogar viel weitergehender. Man kann nicht nur den zentralen Grenzwertsatz, sondern die Faltung allgemein durch kombinatorische Objekte beschreiben, man muß nur Paarungen allgemeiner durch Partitionen (von Mengen) ersetzen. Wiederum gilt dabei die obige Entsprechung: In genau der gleichen Art und Weise, wie man die klassische Faltung durch alle Partitionen beschreibt, beschreibt man die freie Faltung durch die nicht-kreuzenden Partitionen.

Seit den Anfängen meiner Beschäftigung mit der freien Wahrscheinlichkeitstheorie, wo sich dieser allgemeine Zusammenhang in oben beschriebener Art und Weise vage angedeutet hat [1], wurde dies in einer Reihe von Arbeiten sehr weit fortentwickelt und dieser Zugang hat zu einer Reihe von bemerkenswerten Resultaten geführt. Ich möchte betonen, daß dieser Zusammenhang zwischen freier Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik in zwei Richtungen ausgenutzt werden kann. Einerseits kann die kombinatorische Beschreibung benutzt werden, um Ergebnisse über freeness abzuleiten, andererseits kann man die kombinatorische Struktur der nicht-kreuzenden Partitionen für sich betrachten und – inspiriert durch Ergebnisse über freeness – interessante kombinatorische Resultate erhalten.

Ein Beispiel für den ersten Fall ist die Behandlung des freien Kommutators in [5]. Voiculescu hatte mit analytischen Methoden das Problem der freien Summe $X + Y$ und auch des freien Produktes XY gelöst. Eine Beschreibung des freien Kommutators $XY - YX$ stellte aber ein offenes Problem dar, welches wir mit dem oben angedeuteten kombinatorischen Zugang lösen konnten.

Ein Beispiel für den zweiten Fall ist die Arbeit [3], in der wir zeigen, daß die Multiplikation freier Zufallsvariable einer kanonischen kombinatorischen Faltung auf dem Verband aller nicht-kreuzenden Partitionen entspricht und daß diese Operation kombinatorisch sehr schön beschrieben werden kann. Entsprechende Untersuchungen für den Verband aller Partitionen gehen auf Doubilet, Rota und Stanley zurück.

Lassen Sie mich zusammenfassen: Die freie Wahrscheinlichkeitstheorie von Voiculescu ist eine sehr facettenreiche Theorie und eine dieser Facetten stellt die Kombinatorik von nicht-kreuzenden Paarungen oder allgemeiner nicht-kreuzenden Partitionen dar. Dieser Zugang zur freien Wahrscheinlichkeitstheorie war entscheidend durch die Arbeiten von

von Waldenfels über nicht-kommutative zentrale Grenzwertsätze mitgeprägt.

Literatur

[1] R. Speicher: A new example of 'independence' and 'white noise'. Prob. Th. Rel. Fields 84 (1990), 141-159

[2] R. Speicher: Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution. Math. Ann. 298 (1994), 611-628

[3] A. Nica, R. Speicher: A 'Fourier transform' for multiplicative functions on non-crossing partitions. J. Algebraic Combinatorics 6 (1997), 141-160

[4] A. Nica, R. Speicher: On the multiplication of free n-tuples of non-commuting random variables. Amer. J. Math. 118 (1996), 799-837

[5] A. Nica, R. Speicher: Commutators of free random variables. Erscheint in Duke Math. J.