التحليل الرياضي

٩ أغسطس ٢٠١٧

المحتويات

١ التوابع ورسومها البيانية:

في هذا الفصل سنشرح معنى المصطلح "تابع" و نستعرض بعض الأمثلة عن التوابع و رسومها البيانية.

سنبدأ بالسؤال: ما هو التابع؟

تعريف ١.١. ليكن $D \subset \mathbb{R}$. نسمي $f : D \to \mathbb{R}$ تابع ، إذا وجد لكل عنصر $x \in D$ تابع واحد فقط $f(x) \in \mathbb{R}$.
نسمي المجموعة D مجموعة التعريف أو المجال .

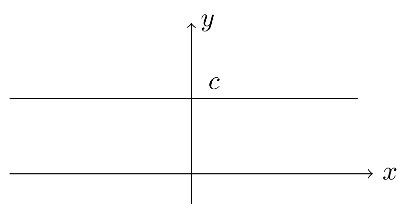
١.١ كثيرات الحدود والتوابع الكسرية:

سنستعرض في هذا الجزء بعض أنواع التوابع.

a) التوابع الثابتة: هي توابع من الشكل

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$$

من أجل القيمة $c \in \mathbb{R}$.

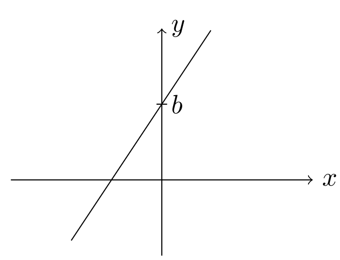


شكل ١: رسم بياني للتابع الثابت.

b) المستقيم: هو تابع من الشكل

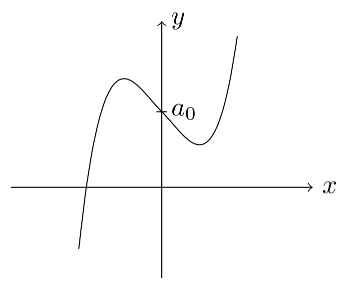
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و الميل هو a.



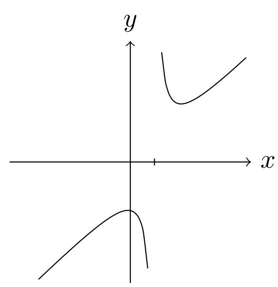
شكل ٢: رسم بياني لمستقيم.

c) كثير الحدود: هو تابع من الشكل $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ حيث $a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$.



شكل ٣: رسم بياني لكثير حدود.

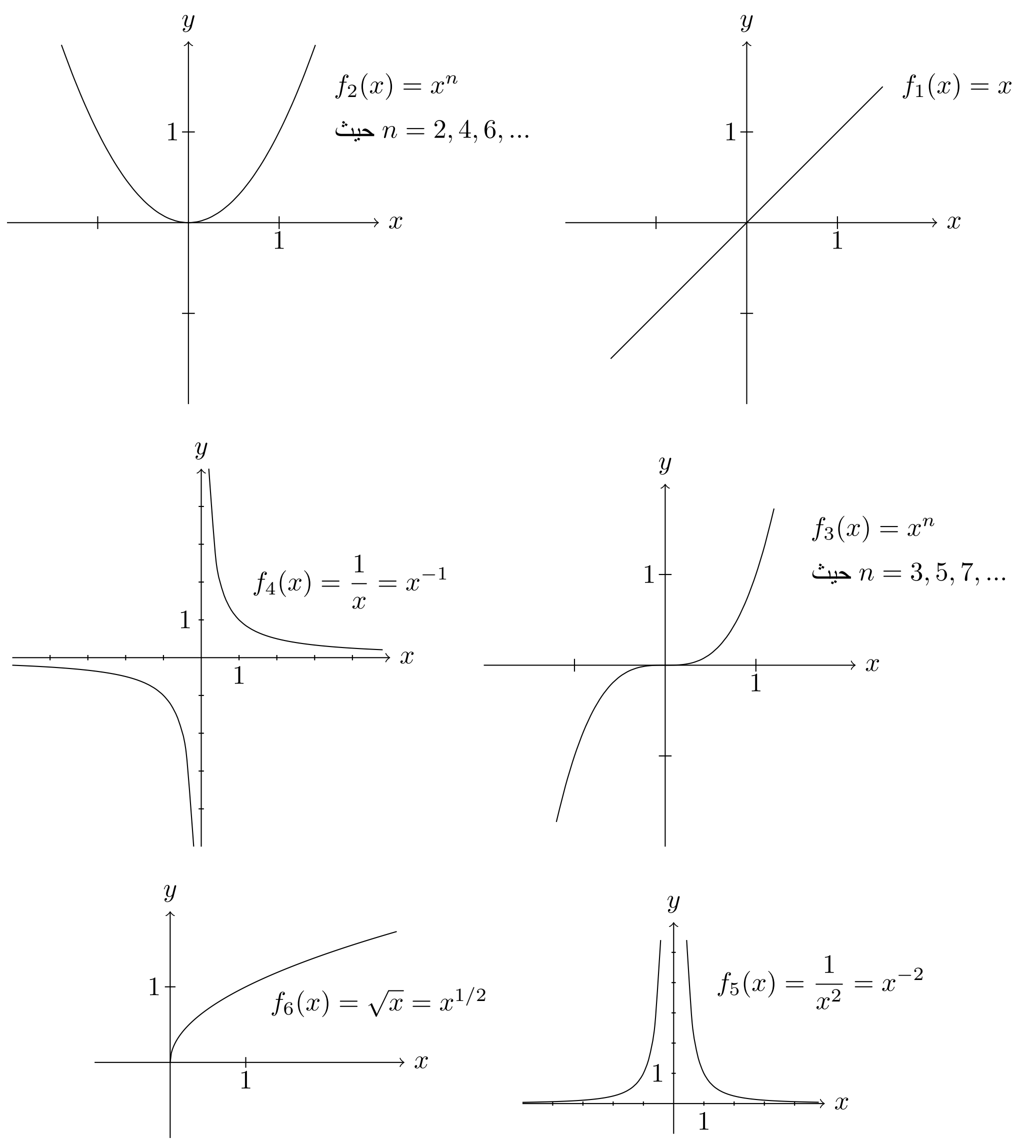
d) التابع الكسري: هو تابع من الشكل: $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$,
حيث أن p و q كثيري حدود و $q(x)\neq 0$ من أجل أي قيمة للمتحول $x\in D$.



شكل ٤: رسم بياني لتابع كسري.

في المثال التالي نرى الرسوم البيانية لبعض التوابع.

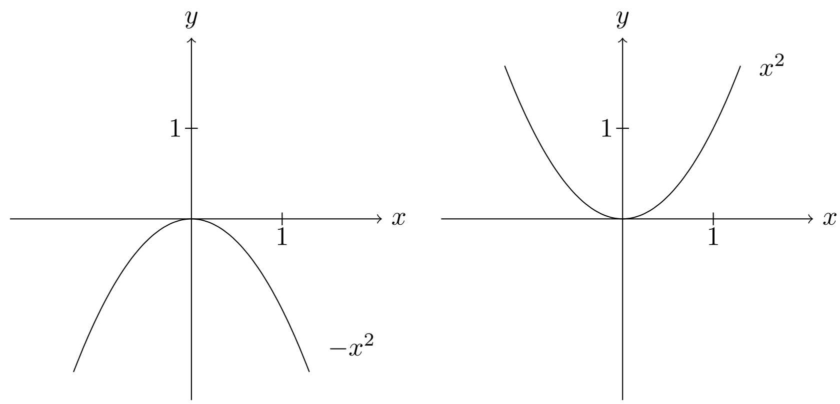
مثال ١.٢. (رسوم بيانية مهمة)



شكل ٥: أمثلة على الرسوم البيانية للتوابع .

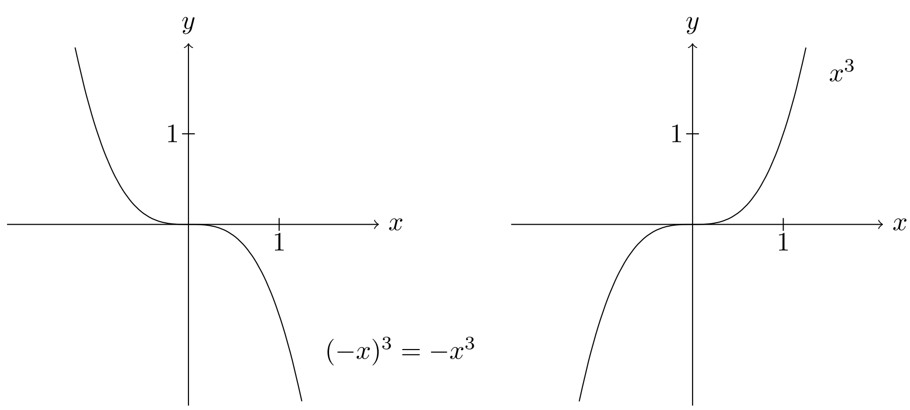
سنبحث الأن في مسألة كيف يمكننا إنطلاقاً من دالة معطاة إيجاد دالة أخرى بحيث أن رسمها البياني هو انعكاس أو انسحاب للدالة الأصلية.

مثال ١.٣. الشكل التالي يبين أن ضرب دالة ب (-1) يكافئ انعكاس لرسمها البياني بالنسبة للمحور x.



شكل ٦: انعكاس الرسم البياني بالنسبة للمحور x.

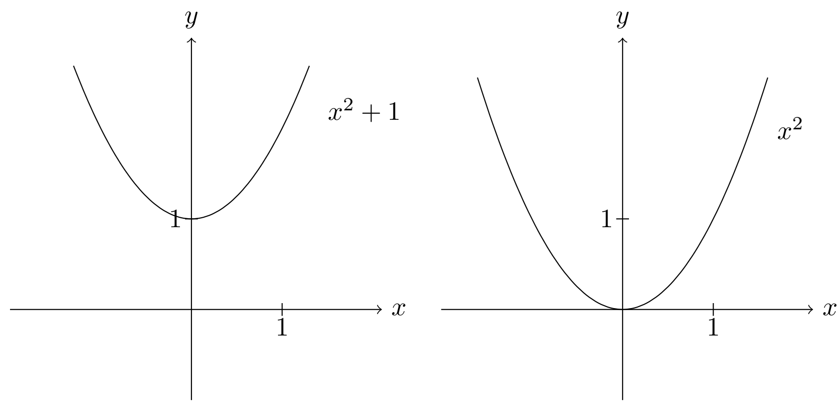
مثال ١.٤. الشكل التالي يبين أن الدالة $f(-x)$ تكافئ انعكاس للدالة المعطاة $f(x)$ بالنسبة للمحور y.



شكل ٧: انعكاس الرسم البياني بالنسبة للمحور y.

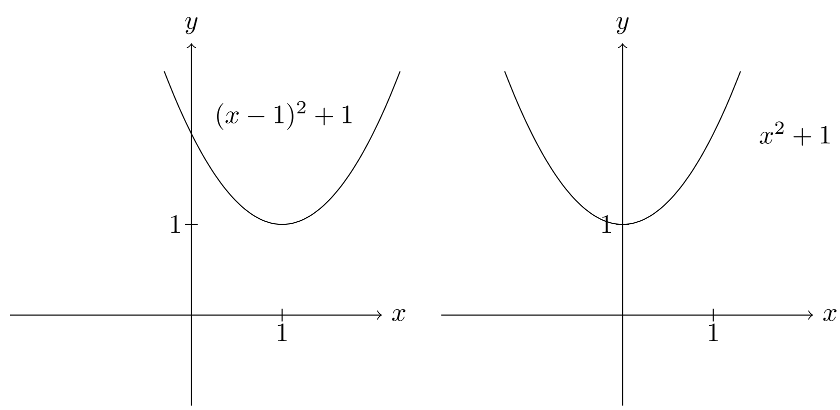
ملاحظة ١.٥ (الانعكاس). لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة ما . عندئذٍ يكون الرسم البياني للدالة $g(x) := -f(x)$ انعكاساً للرسم البياني للتابع f بالنسبة للمحور x ويكون $h(x) := f(-x)$ انعكاساً للرسم البياني للدالة f بالنسبة للمحور y.

مثال ١.٦. الشكل التالي يبين أن إضافة مقدار ثابت $c \in \mathbb{R}$ لدالة ما يكافئ انسحاب بمقدار c على المحور y .



شكل ٨: انسحاب الرسم البياني على المحور y.

مثال ١.٧. الشكل التالي يبين أن التابع $f(x-c)$ يكافئ انسحاباً بمقدار c على المحور x.



شكل ٩: انسحاب الرسم البياني على المحور x.

تنبيه: الشكل أعلاه يبين أن التابع $f(x-1)$ يكافئ انسحاباً للدالة f بمقدار 1 باتجاه اليمين وليس باتجاه اليسار و الذي قد يبدو للوهلة الأولى عكس ذلك.

ملاحظة ١.٨ (الانسحاب). لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة ما وليكن $c \in \mathbb{R}$. عندئذٍ يكون الرسم البياني للدالة $g(x) := f(x) + c$ انسحاباً للرسم البياني للدالة f بمقدار c على المحور y ويكون الرسم البياني للدالة $h(x) := f(x-c)$ انسحاباً للرسم البياني للدالة f بمقدار c على المحور x.

١.٢ الدالة العكسية:

تعريف ١.٩ (الدالة العكسية). ليكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة ما. نسمي الدالة $g : f(D) \to \mathbb{R}$ دالة عكسية للدالة f,
إذا كان $g \circ f : D \to D$
أو كان $f \circ g : f(D) \to f(D)$
و تحقق

$$g(f(x)) = x$$

من أجل أي قيمة ل $x \in D$.
سنرمز للدالة العكسية غالباً بالرمز f^{-1} عوضاً عن g .

مثال ١.١٠.

١. الدالة العكسية للدالة $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$ تتمثل في الدالة $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, لأن

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

من أجل كل قيمة ل $x \geq 0$.

٢. الدالة العكسية للدالة $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \frac{1}{x}$ تتمثل في الدالة $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$,
لأن

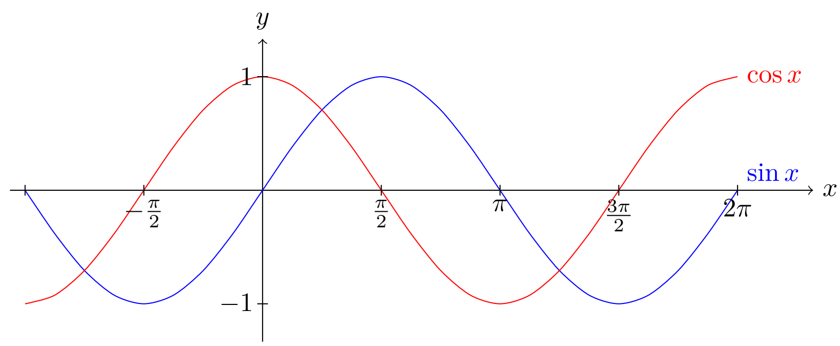
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{1/x} = x$$

من أجل كل قيمة ل $x \neq 0$.

١.٣ التوابع المثلثية

في هذا القسم سنرى التوابع المثلثية وخواصها .

سنبدأ مع الرسوم البيانية للتوابع $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (Sinus) و $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (Kosinus).



شكل ١٠: الرسم البياني لدالة ال sin و ال cos .

ملاحظة ١.١١. لكل من الدالتين sin و cos الخواص التالية:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) & \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x) & \cos(x+2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x) & \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

من أجل كل قيمة ل $x \in \mathbb{R}$. وعلاوة على ذلك:

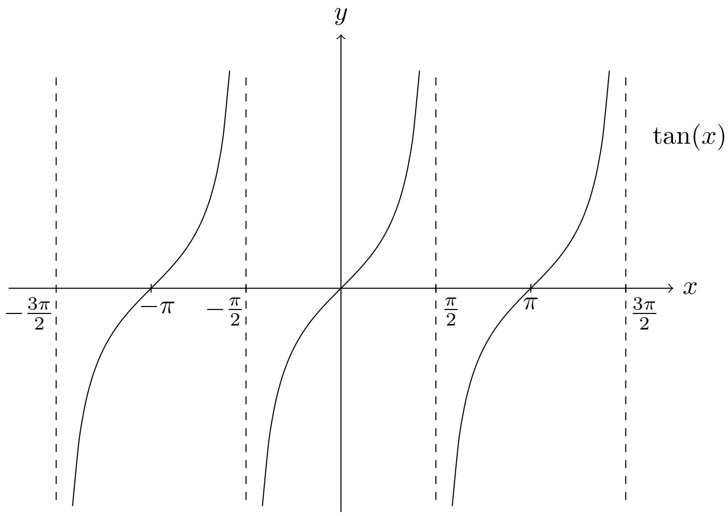
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

من اجل كل قيمة ل $x \in \mathbb{R}$.

وكدالة مثلثية أخرى نعرف $\tan : D \to \mathbb{R}$ (Tangens) بالعلاقة التالية:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

حيث $D = \mathbb{R} \setminus \left\{(k+\frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. و النقاط المستثناة من مجموعة التعريف هي النقاط ذاتها التي ينعدم عندها ال Kosinus.



شكل ١١: الرسم البياني للدالة .Tan

ملاحظة ١.١٢. a) الدالة العكسية ل $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ تعطى بالشكل $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, و هذا يعني أن:

$$\arcsin(\sin x) = x$$

من أجل $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و

$$\sin(\arcsin z) = z$$

من أجل $z \in [-1, 1]$.

b) الدالة العكسية ل $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ تعطى بالشكل $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, و هذا يعني أن:

$$\arccos(\cos x) = x$$

من أجل $x \in [0, \pi]$ و

$$\cos(\arccos z) = z$$

من أجل $z \in [-1, -1]$

c) لدالة العكسية ل $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ تعطى بالشكل $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, هذا يعني أن:

$$\arctan(\tan x) = x$$

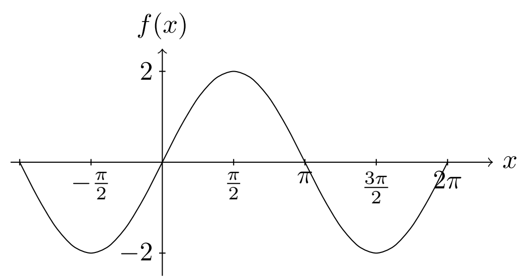
من أجل $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و

$$\tan(\arctan z) = z$$

من أجل $z \in \mathbb{R}$

تعريف ١.١٣. من أجل دالة من الشكل $c \cdot \sin x$ أو $c \cdot \cos x$ حيث $c > 0$ نسمي c السعة.

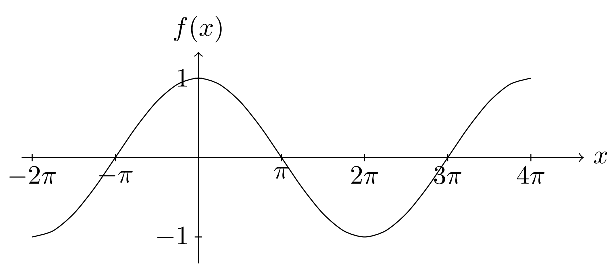
مثال ١.١٤. الشكل التالي يبين الرسم البياني للدالة $f : \mathbb{R} \to [-2, 2]$, $f(x) = 2\sin x$. و هو تمديد للرسم البياني للدالة sin على المحور y.



شكل ١٢: الرسم البياني للتابع $f(x) = 2\sin x$.

تعريف ١.١٥. من أجل دالة من الشكل $\sin cx$ أو $\cos cx$ حيث $c > 0$ نسمي c تواتر.

مثال ١.١٦. في الشكل التالي يمكننا أن نرى الرسم البياني للدالة $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$. التواتر $1/2$ يسبب تمديد للرسم البياني للدالة cos على المحور x.



شكل ١٣: الرسم البياني للدالة $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

١.٤ التابع اللوغاريتمي والأسي:

في هذا القسم سنتعامل مع الدالة الأسية و دالتها العكسية (اللوغاريتم الطبيعي).

سنبدأ بمراجعة قوانين القوى.

ملاحظة ١.١٧ (قوانين القوى). من أجل $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $m, n \in \mathbb{N}$ يكون:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

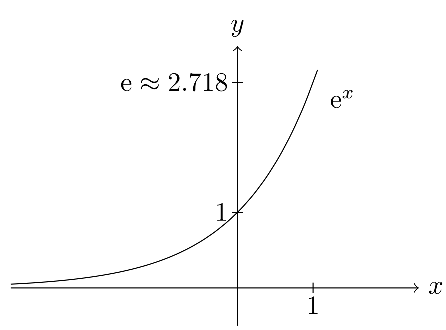
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m} \qquad \sqrt[m]{a} = a^{1/m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$$

الشكل التالي يوضح لنا الرسم البياني للتابع الأسي $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ المعطى بالعلاقة

$$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$$



شكل ١٤: الرسم البياني للتابع الأسي.

الدالة العكسية للتابع الأسي معطاة بالعلاقة $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ حيث

$$f^{-1} = \ln(x)$$

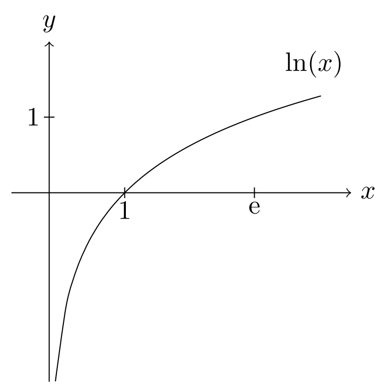
ونسمي هذه الدالة اللوغاريتم الطبيعي.
و بما أن اللوغاريتم الطبيعي هو الدالة العكسية للدالة الأسية إذن:

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x$$

من أجل $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\ln(z)} = z$$

من أجل $z \in \mathbb{R}_{>0}$.



شكل ١٥: الرسم البياني للوغاريتم الطبيعي.

ملاحظة ١.١٨ (قوانين اللوغاريتم). من أجل $a, b > 0$ يكون:

$$\begin{aligned} a^n &= \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^n = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot n}, \\ \ln(a^n) &= n \cdot \ln(a), \\ \ln(a \cdot b) &= \ln(a) + \ln(b) \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b). \end{aligned}$$

كذلك

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1.$$

كما سنرى في المثال التالي يمكننا تبسيط الكثير من الحدود بمساعدة قوانين القوى واللوغاريتم.

مثال ۱.۱۹.

a) $\ln(e^7) = 7$

b) $e^{4\cdot\ln(3)} = e^{\ln(3)\cdot 4} = \left(e^{\ln(3)}\right)^4 = 3^4 = 81$

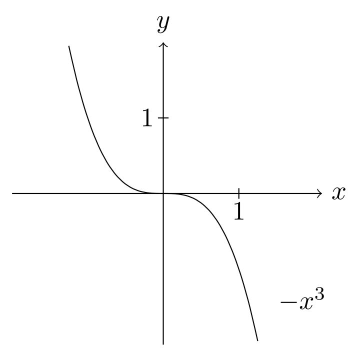
c) $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{e^3}}\right) = \ln\left(\sqrt{e^{-3}}\right) = \ln\left(e^{-3/2}\right) = -\frac{3}{2}$

d) $e^{\ln(5)-5} = \frac{e^{\ln(5)}}{e^5} = \frac{5}{e^5}$

٢ القيم الحدية (النهايات)

في هذا القسم سندرس سلوك التوابع في حالات اللانهاية و في حالات الاقتراب من نقاط عدم التعيين كمثال على ذلك الأقطاب .
لنبدأ بالمثال التالي:

مثال ٢.١. لنعتبر الدالة التالية $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3$. كيف تتغير الدالة f, عندما يسعى x إلى ∞ ؟



شكل ١٦: الرسم البياني للتابع $f(x)=-x^3$.

بواسطة الرسم البياني السابق يمكن أن نرى أنّ قيمة الدالة $f(x)$ تتناقص بازدياد قيمة المتحول x .
وفي هذه الحالة نجد أن التابع f يسعى إلى $-\infty$ عندما $x\to\infty$ أي أنّ:

$$\lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty.$$

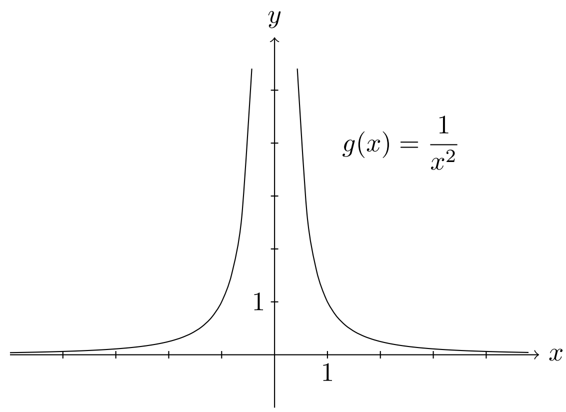
و بالمثل يمكننا أن نكتب:

$$\lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty.$$

يوجد بعض التوابع التي لن نكتفي بدراسة سلوكها عند اللانهاية و إنما سندرس سلوكها بالقرب من قيم محددة من x،

على وجه الخصوص سنهتم بتلك القيم من x التي لا يمكننا تعويضها في التابع لأن التابع يكون غير معرف عندها.

مثال ٢.٢. لنعتبر التابع التالي: $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
هنا لا يمكننا إيجاد قيمة التابع عند النقطة $x=0$ ، وذلك لأن التابع عند هذه النقطة غير معرف.
و لكن كيف سيكون سلوك التابع g عندما تكون قيمة x صغيرة جداً أي عندما تقترب من الصفر؟



شكل ١٧: الرسم البياني للتابع $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

بالنظر للرسم البياني للتابع نلاحظ ان قيم التابع تصبح أكبر كلما اقتربت قيمة x من الصفر، و نقول في هذه الحالة بأن التابع g يسعى إلى ∞ من أجل $x \to 0$ و نكتب:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

بشكل مماثل لما سبق وعلى سبيل المثال يكون:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty.$$

ملاحظة ٢.٣. بشكل عام يكون:

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \text{ أجل من } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{إذا كانت } n \text{ عدد زوجي} \\ -\infty & \text{إذا كانت } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

إذا أردنا إيجاد نهاية كثير حدود عندما $x \to \pm\infty$ فإن الحد ذو الأس الأعلى هو فقط من يحدد النهاية.

مثال ٢.٤.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2+2x-6=\infty$, لأن $\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} x^4+3x^2+6x-10=\infty$, لأن $\lim_{x\to-\infty} x^4=\infty$.

c) $\lim_{x\to\infty} -2x^3-12x+3=-\infty$, لأن $\lim_{x\to\infty} -2x^3=-\infty$.

نحن نعلم الأن كيف يمكننا تحديد نهاية كثير حدود عندما $x\to\pm\infty$
ولكن كيف يمكننا تحديد نهاية دالة كسرية؟

مثال ٢.٥. من أجل الدالة $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ يتحقق:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

في الملاحظة التالية يوجد معايير سنتبعها لتحديد نهاية دالة كسرية.

ملاحظة ٢.٦ (نهايات التوابع الكسرية). لتحديد نهاية دالة كسرية f عندما $x\to\pm\infty$.
ينبغي علينا التمييز بين ثلاث حالات مختلفة.

١. الحالة الأولى: درجة كثير الحدود في البسط أكبر منها في المقام، هذا يعني:

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0},$$

عندما $n>m$, و $a_n,...,a_0,b_m,...,b_0\in\mathbb{R}$. عندئذٍ يتحقق:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \quad \text{عندما } a_n/b_m>0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty, \quad \text{عندما } a_n/b_m<0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty, \quad \text{عندما } \frac{a_n}{b_m}\cdot(-1)^{(n-m)}>0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \quad \text{عندما } \frac{a_n}{b_m}\cdot(-1)^{(n-m)}<0.$$

٢. الحالة الثانية: درجة كثير الحدود في البسط أصغر منها في المقام ، هذا يعني :

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0},$$

عندما $n < m$ ، و $a_n, ..., a_0, b_m, ..., b_0 \in \mathbb{R}$. عندئذٍ يتحقق:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

٣. الحالة الثالثة: إذا تطابقت درجة كثيري الحدود في البسط والمقام، هذا يعني:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0},$$

عندما $a_n, ..., a_0, b_n, ..., b_0 \in \mathbb{R}$. عندئذٍ يتحقق:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}.$$

مثال ٢.٧.

a) الحالة الأولى:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{18x^6 - 2x^2 - 7}{6x^5 - 2x^2 + 8} = \infty,$$

لأن درجة كثير الحدود في البسط أكبر منها في المقام.

b) الحالة الثانية:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{17x^3 + 6x - 12}{13x^4 - 18} = 0,$$

لأن درجة كثير الحدود في البسط أصغر منها في المقام.

c) الحالة الثالثة:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 6x^3 - 12} = \frac{6}{3} = 2,$$

لأن درجة كثير الحدود في البسط تساوي درجة كثير الحدود في المقام.

ملاحظة ٢.٨ (القيم الحدية للدالة الأسية واللوغاريتمية). من أجل الدالة الأسية واللوغاريتم الطبيعي تتحقق العلاقات التالية:

a) $\lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

b) $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

c) $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$.

d) $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

الأن يبقى لدينا السؤال التالي:
كيف يمكننا تحديد نهاية دالة مؤلفة من كثير حدود و تابع أسي أو كثير حدود ولوغاريتم طبيعي.

مثال ٢.٩. لنطرح السؤال التالي : ما هي نهاية التابع التالي عند $x \to \infty$

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^4 + x^2 - 6}$$

للوهلة الأولى يبدوا انه لا يمكن الإجابة على هذا السؤال ببساطة لأن الحد

$$\frac{1}{x^4 + x^2 - 6}$$

ينتهي إلى 0 عندما $x \to \infty$, في حين ينتهي e^x إلى ∞ .
في هذه الحالة يتفوق التابع الأسي على التابع الكسري
وهذا يعني أن النهاية من أجل $x \to \infty$ تتعلق فقط بالدالة الأسية أي أن :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^4 + x^2 - 6} = \infty.$$

بشكل عام يصح القول بأن التابع الأسي أقوى من الأسس فيما يتعلق بحساب النهايات.
وبناءً على ذلك يتحقق:

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 + x^2 - 6) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

بالنسبة للوغاريتم الطبيعي فإن الأمر مختلف قليلاً عن ما سبق. لنعتبرالتابع التالي: $f(x) = x \cdot \ln(x)$
من أجل $x \to 0$ لا يمكننا من الوهلة الأولى تحديد نهاية التابع لأن الحد x يسعى إلى 0 عندما $x \to 0$ ، بينما يسعى الحد $\ln(x)$ إلى $-\infty$ عندما $x \to 0$.
وفي هذه الحالة يتفوق الحد x على اللوغاريتم الطبيعي و يتحقق:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(x) = 0.$$

بشكل عام يمكن القول بأن الأسس أقوى من اللوغاريتم فيما يتعلق بحساب النهايات. بناءً على ما سبق يتحقق:

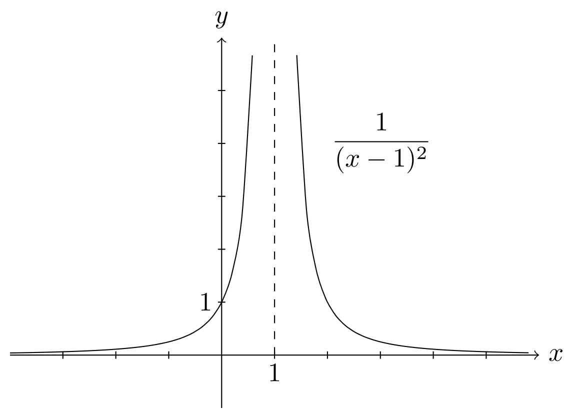
$$\lim_{x\to\infty} 2 + \frac{\ln(x)}{x^3} = 2.$$

٢.١ نقاط عدم التعيين:

في هذا القسم سندرس سلوك التوابع حول نقاط عدم التعيين كما سنقسم نقاط عدم التعيين إلى نوعين مختلفين.

سنبدأ الأن بالمثال التالي:

مثال ٢.١٠. سنقوم بدراسة التابع $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.



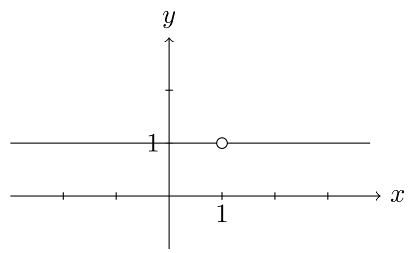
شكل ١٨: مثال لرسم بياني يحوي على قطب.

التابع غير معرف عندما x تساوي ال 1 لذلك سندرس سلوك التابع حول نقطة عدم التعيين هذه.
بالنظر إلى الرسم البياني السابق نلاحظ أن قيمة الدالة على كلتا الجهتين اليمنى واليسرى
لنقطة عدم التعيين تزداد كلما اقتربنا من نقطة عدم التعيين.
و تسمى نقطة عدم التعيين من هذا النوع قطب ونكتب في هذه الحالة: $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

ليس من الضروري أن تكون كل نقطة عدم تعيين قطباً كما سنرى في المثال التالي.

مثال ٢.١١. لنعتبر التابع $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)}{(x-1)}$.
سريعاً ما نلاحظ بأنه يمكننا اختصار جميع القيم التي تنتمي إلى مجموعة التعريف ولذلك فإن التابع ثابت وهو 1 .
وفي هذه الحالة فإن نقطة عدم التعيين هي عبارة عن انقطاع فقط في الرسم البياني وليست قطباً، والرسم البياني حول نقطة عدم التعيين ثابت 1, لذلك يتحقق أن: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

اعتماداً على الرسم البياني يمكننا معرفة فيما إذا كانت نقطة عدم التعيين قطباً أو انقطاعاً فقط . بينما صيغة التابع لا تتيح لنا دوماً معرفة ذلك كما في المثال التالي:



شكل ١٩: مثال على رسم بياني يحوي على انقطاع.

مثال ٢.١٢.

a) إن للدالة

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

انقطاعاً في الرسم البياني عند 3 لأن

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+2) = 3 + 2 = 5.$$

b) إن للدالة

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

انقطاعاً في الرسم البياني عند -1 لأن

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x-2) = -1 - 2 = -3.$$

c) إن للدالة

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}$$

قطباً عند النقطة 1 لأن

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 2x + 1 = 4$$

و ايضاً

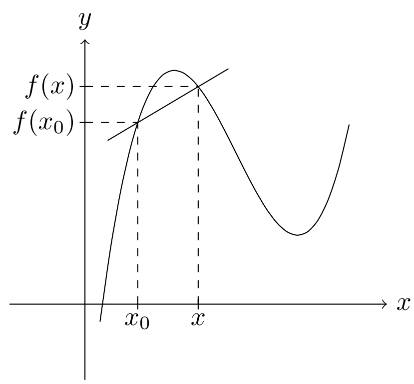
$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty,$$

لذلك فإن قيمة التابع h تزداد كلما اقتربت x من ال 1 ويكون:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = \infty.$$

٣ حساب التفاضل:

التفاضل يتعامل مع ميل التوابع في نقطة محددة و لتبسيط مصطلح (التفاضل) سنبتدأ بالمثال التالي: ليكن لدينا التابع $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.



شكل ٢٠: متوسط ميل منحني بين نقطتين.

يوصف ميل التابع f بين x_0 و x من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

لنجعل x_0 ثابت وندع x تسعى إلى ال x_0 وهكذا نحصل على ميل التابع f عند النقطة x_0.
إذا وجدت النهاية التالية:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

عندها نقول أن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ هو مشتقه.

ملاحظة ٣.١.

a) ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ تابع ثابت عندئذٍ يتحقق:

$$f'(x) = 0$$

من أجل كل قيم x حيث $x \in \mathbb{R}$.

b) ليكن $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = m \cdot x + b$ مستقيماً عندئذٍ يتحقق :

$$g'(x) = m$$

من أجل كل قيم x حيث $x \in \mathbb{R}$.

c) ليكن $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. عندئذٍ يتحقق:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

من أجل كل قيم x و n حيث $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{R}$.

مثال ٣.٢.

a) ليكن $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. عندها يكون:

$$g'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

b) ليكن $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. عندها يكون:

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

نحن نعلم الأن قواعد لحساب المشتق للتوابع التي يمكن كتابتها على شكل قوى ولكن كيف يمكننا حساب المشتق للتوابع التي لا يمكننا كتابتها على شكل قوى؟

ملاحظة ٣.٣. بشكل عام تتحقق كل من العبارات التالية:

a) $\sin'(x) = \cos(x)$

b) $\cos'(x) = -\sin(x)$

c) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

d) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

كيف يمكننا الأن حساب المشتق بالنسبة لتوابع مؤلفة من جمع و ضرب و قسمة العديد من التوابع الأخرى؟ في القسم التالي سنتعرف على بعض الصيغ التي ستساعدنا في إيجاد مشتق توابع كهذه.

٣.١ قواعد الاشتقاق:

ملاحظة ٣.٤. (الخطية) ليكن التابعان $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلين للاشتقاق عندها يتحقق:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

من أجل جميع قيم $x \in (a, b)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

مثال ٣.٥. ليكن التابع: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = 2x^2 + 6x$$

يمكننا كتابته على الشكل التالي:

$$h(x) = 2 \cdot f(x) + 6 \cdot g(x),$$

حيث أن $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$. و بإتباع القاعدة السابقة يمكننا حساب مشتق التابع h كما يلي:

$$h'(x) = 2 \cdot f'(x) + 6 \cdot g'(x) = 2 \cdot (2x) + 6 \cdot 1 = 4x + 6.$$

ملاحظة ٣.٦. (قاعدة الضرب) ليكن التابعان $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلين للاشتقاق عندها يتحقق:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

من أجل $x \in (a, b)$.

مثال ٣.٧. ليكن التابع: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

يمكننا كتابته على الشكل التالي:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

حيث أن $f(x) = \sin(x)$ و $g(x) = \cos(x)$ و بإتباع قاعدة الضرب يمكننا حساب مشتق التابع h كما يلي:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

ملاحظة ٣.٨. (قاعدة القسمة) ليكن التابعان $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ قابلين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ من أجل $x \in (a, b)$ عندها يتحقق:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

مثال ٣.٩. ليكن التابع $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

يمكننا كتابته على الشكل التالي:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث أن $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 1$ وبإتباع قاعدة القسمة يمكننا حساب مشتق التابع h كما يلي:

$$h'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

ملاحظة ٣.١٠. (قاعدة السلسلة) ليكن التابعان $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ و $g : (a, b) \to (c, d)$ قابلين للاشتقاق عندها يتحقق:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

من أجل $x \in (a, b)$ ، حيث أن

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

مثال ٣.١١. ليكن التابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \exp(x^3 - 1)$$

يمكننا كتابته على الشكل التالي:

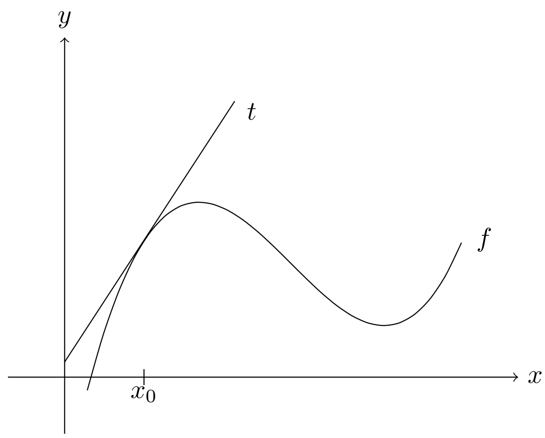
$$h(x) = f(g(x))$$

حيث أن $f(x) = \exp(x)$ و $g(x) = x^3 - 1$ و بإتباع قاعدة السلسلة يمكننا حساب مشتق التابع h كما يلي:

$$h'(x) = \exp(x^3 - 1) \cdot 3x^2$$

٣.٢ تحديد مماس رسم بياني:

في هذا القسم سنقوم بإيجاد المماس عند نقطة محددة لدالة قابلة للاشتقاق.



شكل ٢١: المماس للرسم البياني عند النقطة x_0.

ليكن التابع $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ قابل للاشتقاق و $x_0 \in (a,b)$ المماس هو مستقيم و لذلك له الصيغة : $t(x) = m \cdot x + b$

نريد الأن اختيار قيم m و b بحيث يكون المستقيم t مماس للتابع f عند النقطة x_0 . المماس الذي نبحث عنه يحقق الشرط التالي:

$$m = f'(x_0)$$

وذلك لأن للمماس و التابع الميل نفسه عند النقطة x_0 وأيضاً يكون:

$$t(x_0) = f(x_0)$$

لأن المماس والتابع يلتقيان عند النقطة x_0 و بالتالي

$$m \cdot x_0 + b = f(x_0)$$

و بالتعويض ينتج:

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

بناء على ما سبق يعطى المماس للتابع f عند النقطة x_0 بالعلاقة التالية:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + \big(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0\big)$$

مثال ٣.١٢. لنوجد مماس التابع $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ عند النقطة $x_p = \frac{2}{3}$.
مشتق التابع f معطى بالعلاقة:

$$f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$$

لذلك فإن

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

كذلك

$$f\left(\frac{2}{3}\right) - f'\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}.$$

و بذلك يعطى مماس التابع f عند النقطة x_p بالعلاقة التالية:

$$t(x) = \frac{7}{3}x - \frac{8}{9}$$

٣.٣ تحديد القيم الصغرى و القيم العظمى للتوابع:

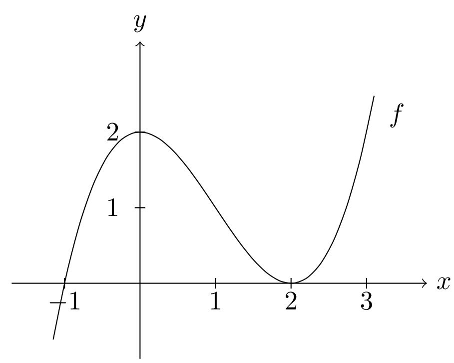
في هذا القسم سنتعامل مع القيم الحدية للتوابع ، ما هي القيم الحدية لتابع وكيف يمكن إيجادها؟ للإجابة على السؤال السابق سنبدأ بالمثال التالي :

مثال ٣.١٣. لنعتبر الرسم البياني للدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2.$$

بالنظر إلى الرسم البياني نجد أن للتابع عند النقطة $x = 0$ قيمة محلية عظمى و أن قيمته هي 2. هذا يعني أن قيمة التابع 2 في جوار النقطة $x = 0$ هي القيمة الأكبر للتابع f.

بالإضافة لذلك يمكننا رؤية أنه للتابع عند النقطة $x = 2$ قيمة محلية صغرى وأن قيمته هي 0. هذا يعني أن قيمة التابع 0 في جوار النقطة $x = 2$ هي القيمة الأصغر للتابع f.



شكل ٢٢: الرسم البياني للتابع f.

القيم الحدية هي إذاً القيم الصغرى أو القيم العظمى للتوابع. ولكن كيف يمكننا إيجاد هذه القيم لتابع معطى؟

لندرس النظرية التالية:

نظرية ٣.١٤. ليكن $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق مرتين و $x_0 \in (a, b)$ نقطة لها الخاصية التالية:

$$f'(x_0) = 0$$

في حال:

$$f''(x_0) > 0$$

يكون للتابع f عند النقطة x_0 قيمة محلية صغرى$f(x_0)$.

و في حال كان:

$$f''(x_0) < 0$$

يكون للتابع f عند النقطة x_0 قيمة محلية عظمى $f(x_0)$.

أما اذا كان:

$$f''(x_0) = 0$$

لا يمكننا تأكيد وجود قيم محلية.

لدينا الأن طريقة لتحديد القيم المحلية الصغرى والعظمى لتابع f قابل للاشتقاق وذلك من خلال إيجاد النقطة x_0 والتي تحقق $f(x_0) = 0$. ومن ثم نحسب المشتق الثاني f'' و نعوض قيمة x_0 فيه لمعرفة فيما إذا كان $f(x_0)$ قيمة محلية صغرى أو عظمى.

ملاحظة ٣.١٥. أحياناً تكون عملية حساب المشتق الثاني معقدة لذلك نستعيض عن ذلك بدراسة سلوك المشتق الأول بالقرب من نقاط الجذر (النقاط التي ينعدم عندها التابع)

في حال غير المشتق الأول f' إشارته عند النقطة x_0 من '$+$' إلى '$-$' ، عندها تكون x_0 قيمة عظمى محلياً.

أما إذا تغيرت إشارة f' من '$-$' إلى '$+$' ، عندها تكون x_0 قيمة صغرى محلياً.

مثال ٣.١٦. لنوجد القيمة المحلية الصغرى للتابع $f : (0, 5) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x.$$

لإيجاد القيم المحلية علينا أولاً حساب المشتق الأول للتابع f.

$$f'(x) = 12x^2 - 30x + 12.$$

والأن نبحث عن $x_0 \in (0,5)$ التي تحقق العلاقة $f'(x_0)=0$

$$\begin{aligned}
& 12x_0^2 - 30x_0 + 12 = 0 && \mid :12 \\
\Leftrightarrow \quad & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 + 1 = 0 && \mid -1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 = -1 && \mid + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 && \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x_0 - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} && \mid \sqrt{\ } \\
\Rightarrow \quad & x_0 - \frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4} && \\
\Rightarrow \quad & x_0 = 2 \quad \vee \quad x_0 = \frac{1}{2}. &&
\end{aligned}$$

علينا الأن حساب المشتق الثاني لنتأكد فيما إذا كانت النقاط السابقة قيم محلية صغرى.

$$f''(x) = 24x - 30$$

و الأن نعوض كلتا النقطتين 2 و $\frac{1}{2}$ في المشتق الثاني .

$$f''(2) = 18 > 0$$

بناءً على ذلك فإن 2 قيمة محلية صغرى .

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -18 < 0$$

إذاً $\frac{1}{2}$ قيمة محلية عظمى، وبذلك يكون للتابع f قيمة محلية صغرى واحدة عند النقطة $x=\frac{1}{2}$ معطاة بالعلاقة: $f(2)=-4$.

٤ حساب التكامل :

يستخدم التكامل لحساب المساحات المحصورة بين الرسوم البيانية، و في هذه الوحدة سنتعرف على الإجرائيات التي ستساعدنا على قياس المساحة المحصورة بين رسمين بيانيين، لنبدأ بتعريف التابع الأصلي.

تعريف ٤.١. من أجل دالة معطاة $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ نسمي التابع $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ الذي يحقق العلاقة:

$$F'(x) = f(x)$$

من أجل كل قيم $x \in (a, b)$ تابع أصلي للتابع f. و نكتب أيضاً:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

مثال ٤.٢.

a) تتحقق العلاقة:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

من أجل $n \neq -1$, حيث أن $c \in \mathbb{R}$ ثابت عشوائي.

b) تتحقق العلاقة:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c$$

حيث أن $c \in \mathbb{R}$ ثابت عشوائي.

c) تتحقق العلاقة:

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$

حيث أن $c \in \mathbb{R}$ ثابت عشوائي.

ملاحظة ٤.٣. (قواعد لحساب التابع الأصلي) للتوابع القابلة للتكامل.

ليكن التابعان $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ عندئذ تتحقّق الخواص الآتية:

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

لحساب مساحة السطوح المحصورة بين الرسوم البيانية للتوابع نحتاج للنظرية الأساسية التالية لحساب التفاضل والتكامل.

نظرية ٤.٤. (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)
ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابع مستمر و $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعه الأصلي عندها يتحقق:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

مثال ٤.٥. لإيجاد التكامل التالي:

$$\int_{-2}^3 (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$$

نلاحظ أولاً أن التابع

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x$$

هو التابع الأصلي للتابع

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 2$$

وبتطبيق النظرية الأساسية السابقة يمكننا حساب التكامل السابق فنحصل على:

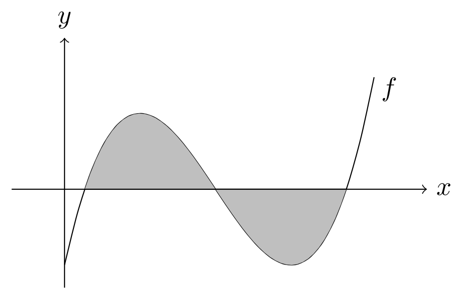
$$\int_{-2}^3 (6x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(-2) = 42 - (-28) = 70.$$

ملاحظة ٤.٦. من أجل تابع مستمر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ و $c \in (a, b)$ يتحقق:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

٤.١ حساب المساحات:

فيما يلي سنتعلم كيفية حساب مساحة السطح المحصور بين الرسم البياني للتابع f ومحور الإحداثيات x.



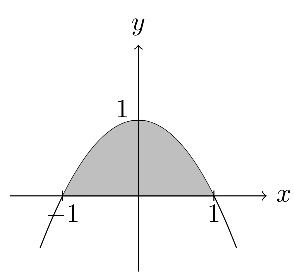
شكل ٢٣: السطح أو السطوح المحصورة بين رسم بياني و المحور x.

هذه المساحة يمكن إيجادها بحساب التكامل كما سنرى في المثال التالي.

مثال ٤.٧. نريد الأن حساب مساحة السطح المحصور بين الرسم البياني للتابع

$$f(x) = -x^2 + 1$$

و محور الإحداثيات x



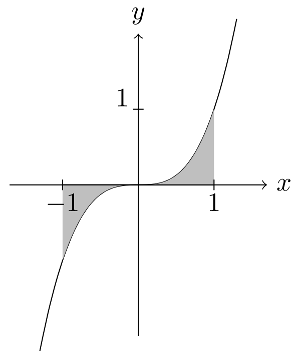
شكل ٢٤: مساحة السطح المحصور بين التابع f و محور الإحداثيات x.

من الواضح أن الرسم البياني للتابع f يحصر سطحاً مع المحور x في المجال $[-1,1]$
و يمكننا حساب مساحة هذا السطح من خلال العلاقة التالية:

$$\left|\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}.$$

جدير بالذكر أن هذه الطريقة لا تمكننا دائماً من حساب مساحة السطح المحصور بين رسم بياني والمحور x كما سنرى في المثال التالي:

مثال ٤.٨. نريد حساب مساحة السطح المحصور بين الرسم البياني للتابع $f(x) = x^3$ و محور الإحداثيات x على المجال $[-1, 1]$.



شكل ٢٥: المساحة المحصورة بين الرسم البياني للتابع f و محور الإحداثيات x.

لنحاول الأن حساب المساحة بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق عندئذٍ نحصل على:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

على الرغم من وجود مساحة محصورة بين الرسم البياني للتابع و المحور x ولكن بحساب التكامل نحصل على 0.
المشكلة هنا هي أن جزء من السطح المحصور يقع فوق محور الإحداثيات x والجزء الثاني تحته.
يمكننا تفادي هذه المشكلة وذلك من خلال استخدام طريقة الحل السابقة ولكن لحساب مساحة كل من الاسطح المترابطة على حدا وبعد ذلك نقوم بجمع النتائج الجزئية التي حصلنا عليها وذلك على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{0} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}$$
$$\int_{0}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

وبذلك نجد أن المساحة المحصورة بين الرسم البياني للتابع و المحور x على المجال $[-1, 1]$ هي:

$$A = \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

ملاحظة ٤.٩. إذا أردنا حساب مساحة السطح المحصور بين تابع معين f و محور الإحداثيات x على المجال $[a, b]$ نقوم بداية بتحديد جذور التابع f (النقاط التي تعدمه) في المجال $[a, b]$. بعد ذلك نكامل التابع f على كل من مجالات التعريف الجزئية التي يفصل بينها جذور التابع. عندئذٍ تعطى مساحة السطح الكلي بجمع قيم التكاملات المحسوبة.

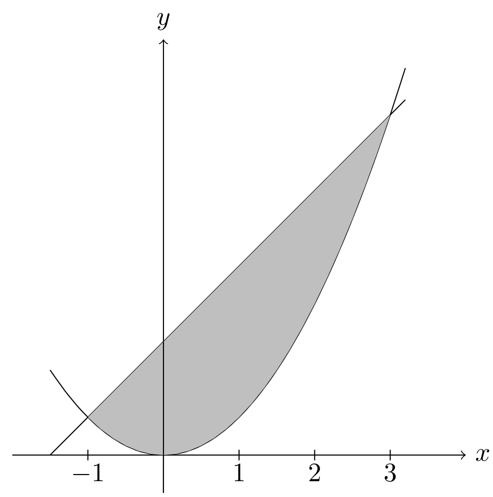
نعلم الأن كيفية حساب مساحة سطح محصور بين الرسم البياني لتابع و محور الإحداثيات x

والأن سنتعلم كيفية حساب مساحة سطح محصور بين الرسوم البيانية لتابعين.

مثال ٤.١٠. نريد حساب مساحة السطح المحصور بين الرسمين البيانيين للتابعين التاليين:

$$f(x) := x^2,$$
$$g(x) := 2x + 3$$

حيث أن $f(-1) = g(-1)$ و $f(3) = g(3)$.



شكل ٢٦: السطح المحصور بين التابعين f و g.

لحساب هذه المساحة نعرف دالة الفرق h حيث:

$$h(x) := f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

هذا التابع يعطينا تماماً عند كل نقطة x البعد بين الرسمين البيانيين للتابعين f و g بالإتجاه الموجب للمحور y.
و مساحة السطح المحصور بين الرسمين البيانيين هي مقدار تكامل التابع h على المجال $[-1, 3]$ والمعطى بالعلاقة:

$$\left|\int_{-1}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}.$$

ملاحظة ٤.١١. يمكننا دائماً حساب مساحة السطح المحصورة بين تابعين و ذلك بالإعتماد على دالة الفرق. وهنا أيضاً نكامل تابع الفرق "من نقطة جذر إلى نقطة الجذر التالية".