أنظمة المعادلات الخطّية

١٥ أغسطس ٢٠١٧

المحتويات

١ مقدّمة ٢

٢ خوارزمية غاوس ٣

٣ قابلية حل أنظمة المعادلات الخطيّة ٥

١ مقدّمة

لقد اهتممنا حتى الأن بشكل رئيسي بإيجاد النقاط الحرجة لكثيرات الحدود. في كثيرات الحدود كان لدينا متحول واحد فقط مرفوع لقوى مختلفة أسميناه x، في هذا الفصل سنهتم فقط بالحدود الخطيّة، ولكن مع متحولات مختلفة ومعادلات متعددة.

تعريف ١.١
النظام من الشكل

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

حيث $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ والمجهول $x_i \in \mathbb{R}$، يدعى نظام معادلات خطّي مع n مجهول، والأرقام التي تحقّق المعادلات (تحلها) عند تعويضها بدلا من x_i هي حل لهذا النظام.

مثال ١.٢
نظام المعادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 40 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 24 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 27 \end{aligned}$$

له الحل الواضح $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 7$.

دعونا الأن نتعرّف على طريقة حل هذا النوع من الأنظمة. سنقوم بالتركيز على الحالة $m = n = 3$ أي على الأنظمة التي تتكون من ثلاثة معادلات وثلاثة مجاهيل x_1،x_2 و x_3.
لأجله سنتعلّم خوارزمية غاوس (engl. Gauß-Algorithmus) التي تستطيع دائماً أن تقدّم لنا حل أي نظام معادلات خطي (قابل للحل) بصورة مباشرة. سنقوم أولاً بتبسيط طريقة كتابة أنظمة المعادلات الخطيّة، بدلاً من كتابة جميع المجاهيل والرموز كل مرة، سنركز على القيم الموجودة في هذه الأنظمة ونقوم بكتابتها في مصفوفة. المصفوفة في بادئ الأمر هي مجرد طريقة عرض واضحة لأسطر وأعمدة من الأرقام. فيما يلي سنرى طريقة تحويل نظام المعادلات في المثال الأعلى إلى مصفوفة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 40 \\ 1 & 2 & 2 & 24 \\ 1 & 1 & 3 & 27 \end{array}\right)$$

نقوم بكتابة القيم التي تمثلها b_i أبعد قليلاً على الناحية اليمنى للمصفوفة، لنحصل بذلك على هيئة مناسبة يسهل تطبيق التحويلات عليها بسرعة إلى أن نتوصل إلى الحل. لدينا ثلاثة أنواع من التحويلات التي يمكننا إجراؤها دون أن نغيّر ناتج الحل:

- يمكننا التبديل بين أي سطرين أو عامودين، حيث أننا فعلياً عندها نكون نبدل بين معادلتين في النظام وسبب قيامنا بهذا هو جعل المصفوفة أوضح للتوصل للحل بشكل أسرع. نرمز لعملية التحويل بسهم ذو رأسين على الجانب. هنا نقوم بالتبديل بين السطرين الثاني والثالث:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 40 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \\ 1 & 1 & 3 & | & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 40 \\ 1 & 1 & 3 & | & 27 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \end{pmatrix}$$

- يمكننا القيام بضرب أي سطر أو عامود برقم حقيقي $0 \neq$ أو قسمتهم على هذا الرقم، حيث أننا عندها نكون نضرب أو نقسم معادلة من معادلات النظام مع هذا الرقم. نمثّل هذه العملية بكتابة الرقم الذي نريد الضرب فيه إلى يمين المعادلة التي سيضرب فيها. هنا نقوم بضرب السطر الأول بالرقم 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 40 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \\ 1 & 1 & 3 & | & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ | \cdot 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & | & 200 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \\ 1 & 1 & 3 & | & 27 \end{pmatrix}$$

- يمكننا إضافة أو طرح ناتج ضرب أي سطر أو عامود إلى أي سطر أو عامود أخر. نمثّل هذه العملية بكتابة الرقم الذي قمنا أولاً بالضرب فيه كما في الأعلى وسهم على الجانب. هنا نقوم بإضافة ناتج ضرب السطر الأول بالرقم 3 إلى السطر الثالث:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 40 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \\ 1 & 1 & 3 & | & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \\ \longleftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 40 \\ 1 & 2 & 2 & | & 24 \\ 7 & 7 & 15 & | & 147 \end{pmatrix}$$

نطلق على هذه الأنواع الثلاثة من التحويلات اسم ''تحويلات الأسطر والأعمدة الأساسية''. يمكننا تطبيقها تباعاً دون أن نغيّر من ناتج حل أنظمة المعادلات الخطيّة، كما أنها تعد الأساس لخوارزمية غاوس. سنتعرف على هذه النظرية في المقطع التالي.

٢ خوارزمية غاوس

تتألف خوارزمية غاوس من أربع خطوات، والتي سنقوم بعرضها في مثال. لن نتطرّق إلى التطبيق العام لهذه الخوارزمية بالنسبة لأنظمة المعادلات الكبيرة، ولكن بشكل عام تطبّق هذه الخوارزمية بشكل مشابه دائماً.

- الخطوة الأولى: نقوم باستخدام عملية تبديل الأسطر للحصول على رقم $0 \neq$ في أعلى يسار المصفوفة. هذه الخطوة لا حاجة لها في مثالنا لأنه لدينا مسبقا -1 في هذه الزاوية.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$

- الخطوة الثانية: نقوم بضرب السطر الأول بمقلوب العدد الذي في الزاوية اليسرى، هذه العملية تهدف إلى جعل هذا العدد 1. في مثالنا نقوم بضرب السطر الأول بالرقم -1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \mid \cdot -1 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$

- الخطوة الثالثة: نقوم للحصول على 0 في باقي قيم العامود اليساري بإضافة السطر الأول مضروباً بالقيمة المناسبة إلى باقي الأسطر. يحاكي هذا في مثالنا طرح السطر الأول من السطر الثاني وطرح 5 أضعاف السطر نفسه من السطر الثالث.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & 5 \\ 5 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-5) \\ + \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 6 & 9 & | & 3 \end{pmatrix}$$

- الخطوة الرابعة: نقوم بتكرار الخطوات السابقة من أجل العامود التالي متجاهلين خلال ذلك السطر والعامود الأولين. إذن سنقوم في مثالنا بضرب السطر الثاني بالرقم $-\frac{1}{2}$ للحصول على 1 ونقوم بعدها بطرح 6 أضعاف هذا السطر من السطر الثالث.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 6 & 9 & | & 3 \end{pmatrix} \mid \cdot -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 6 & 9 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \\ + \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 6 & | & 18 \end{pmatrix}$$

- نهايةً نقوم بضرب السطر الأخير بالرقم $\frac{1}{6}$ للحصول أيضا على 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 6 & | & 18 \end{pmatrix} \mid \cdot \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

السطر الأخير يطابق المعادلة $x_3 = 3$. لتحديد المتحولات الباقية يجب علينا الأن كتابتها مجدداً على شكل معادلات، يمكننا تحقيق ذلك إما عن طريق كتابتها على شكل نظام معادلات خطيّة أو بإبقائها في المصفوفة وإضافة الأسطر السفلى مضروبة بالقيم المناسبة إلى الأسطر الأعلى، كما في التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -\frac{1}{2} \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

الأن نكون قد حللنا نظام المعادلات بشكل كامل، أسطر المصفوفة تمثل معادلات هذا النظام تماماً.

$$x_1 = -1, x_2 = -4, x_3 = 3$$

و هذا هو الحل الواضح لنظام المعادلات.

ملاحظة ٢.١

قد يوجد في كثير من الأحيان طرق أسرع من خوارزمية غاوس لحل نظام معادلات خطيّة ما، غير أن هذه الخوارزمية تضمن وصولنا دائما إلى الحل الصحيح (إن وجد).

٣ قابلية حل أنظمة المعادلات الخطيّة

ليس كل نظام معادلات قابل للحل، حيث نجد أنه ليس لنظام المعادلات الممثّل بالمصفوفة التالية

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

أي حل واضح. السطرين الأول والثاني يعطيان للمتحول x_1 قيمتين مختلفتين $(x_1 = 3, x_1 = 4)$ والسطر الأخير يمثّل المعادلة $0 = 7$، التي لا حل لها مهما كانت x_i. من الناحية الأُخرى يوجد أيضا أنظمة معادلات قابلة للحل ولكن حلّها ليس واضح. المصفوفة

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

قابلة للحل وسطريها الأول والثاني يمثّلان المعادلتين $x_1 + x_3 = 4$ و $x_2 + x_3 = 7$، ولكن المتحول الثالث x_3 يمكن اختياره بشكل عشوائي، بحيث يكون هنالك عدد لا نهائي من الحلول لنظام المعادلات هذا. مثلاً لأجل $x_3 = 0$ تكون $x_1 = 4$ و $x_2 = 7$، لأجل $x_3 = 1$ تكون $x_1 = 3$ و $x_2 = 6$. إلا أنه يوجد إمكانية لمعرفة إذا ما كان لنظام معادلات خطيّة ما حل واضح أو لا.

نظرية ٣.١

يكون لنظام المعادلات الخطيّة الممثّل بالمصفوفة

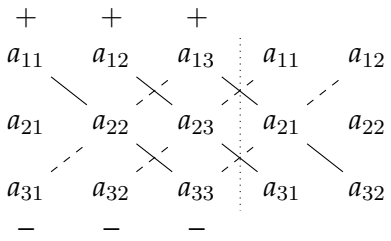
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

حلاً وحيداً واضحاً عندما يعطي المحدد (engl. Determinant)

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

قيمة غير ال 0.

يمكن فهم طريقة حساب محدد المصفوفات المكونة من ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة عن طريق تطبيق قاعدة ساروس (engl. Rule of Sarrus): نقوم بكتابة أول عامودين مرة ثانية إلى جانب المصفوفة (بدون عامود ال b_i) ثم نقوم برسم خطوط قطرية على الأعمدة، نضرب العناصر المحددة بالقطر الواحد مع بعضها البعض ثم نجمع الأقطار البادئة من أعلى اليسار إلى أسفل اليمن ونطرح الأقطار البادئة من أسفل اليسار.



بهذه الطريقة يمكننا قبل تطبيق خوارزمية غاوس التحقّق إذا ما كان لنظام المعادلات حل واضح أو لا. من الجدير بالملاحظة أن المحدد لا يتعلق بال b_i، أي أنه حتى عند تغير ال b_i يبقى نظام المعادلات واضح الحل. أما إذا كان المحدد يساوي الصفر، يتعلق عندها الحل بال b_i المختارة ويكون حينها في جميع الأحوال غير واضح. مجمل القول:

١. $D \neq 0 \Rightarrow$ يوجد حل واضح.

٢. $D = 0 \Rightarrow$ لا يوجد أي حل أو يوجد عدد لا نهائي من الحلول (يعتمد على b_i).

أمثلة ٣.٢ (i) المصفوفة

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

لها المحدد 12 ولأجله يكون لنظام المعادلات حل واضح والذي قمنا بحسابه في الأعلى.

(ii) المصفوفة

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{array}\right)$$

لها المحدد 0 ولأجله يكون نظام المعادلات غير واضح الحل. أما مسألة إذا ما كان يوجد أساساً حل لنظام المعادلات أو أنه غير قابل للحل فترتبط تحديدا بال b_i المختارة.