



UNIVERSITÄT  
DES  
SAARLANDES

---

**Die stabilen Graphen der  
Randpunkte von  
Origami-Teichmüllerkurven zu  
zyklischen Überlagerungen des  
Torus von Primzahlgrad**

---

**Bachelorarbeit  
(überarbeitet)**

**Simon Ertl**

7. März 2023

Betreuerin: Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen  
Erstgutachter: Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Laurent Bartholdi

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Präliminarien</b>	<b>1</b>
<b>II. Teichmüllerraum und Origamikurven</b>	<b>7</b>
1. Der Teichmüllerraum . . . . .	7
2. Konstruktion von Origamikurven . . . . .	9
<b>III. Randpunkte von Origamikurven</b>	<b>13</b>
1. Der augmentierte Teichmüllerraum $\hat{T}_g$ . . . . .	13
<b>IV. Dessins d'enfants, die in Randpunkten vorkommen</b>	<b>17</b>
1. Origamis die über dem $(n \times n)$ -Torus faktorisieren . . . . .	17
<b>V. Klassifikation der Graphen</b>	<b>27</b>
1. Klassifikation der Graphen für $\mathcal{O}_n^2$ . . . . .	27
2. Verallgemeinerung auf $\mathcal{O}_n^p$ . . . . .	41



# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Alle wörtlichen oder sinngemäßen Entlehnungen sind deutlich als Solche gekennzeichnet.

Saarbrücken, 07.03.2023

---



# Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle für die Betreuung durch Frau Professor Weitzschmuth und für ihre Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit danken. Der regelmäßige Austausch und das konstruktive Feedback haben mir geholfen, mich sicher durch die mathematischen Herausforderungen zu navigieren.

Ein weiteres Dankeschön geht an meine Freunde und Kommilitonen, die mich in den letzten Monaten unterstützt und ermutigt haben. Ihre Hinweise und Zuspruch haben mir immer wieder geholfen, meine Motivation aufrechtzuerhalten und die Arbeit zu vollenden.

Zuletzt möchte ich auch meiner Familie danken. Ohne ihre vielseitige Unterstützung wäre mein Studium und diese Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.

Diese Bachelor-Arbeit entstand im Rahmen des SFB-TRR 195 „Symbolic Tools in Mathematics and their Application“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG)





# Einleitung

In dieser Arbeit befassen wir uns mit Randpunkten von Origamikurven im Modulraum  $\mathcal{M}_g$ , für eine spezielle Klasse von Origamis und wie man deren stabile Graphen beschreiben kann. Als Ziel dieser Arbeit wollen wir die auftretenden stabilen Graphen für diese Klasse klassifizieren. Origamis sind Überlagerungen  $p : X \rightarrow T$  über dem Torus, die lediglich in einem Punkt verzweigen. Diese kann man auch als Riemannsche Flächen mit einem Translationsatlas betrachten, die eine elegante Darstellung durch die Monodromie von  $p$  als Paar von Permutationen besitzen.

Nachdem wir im ersten Kapitel einige Begriffe aus der Theorie der Überlagerungen und der Riemannschen Flächen eingeführt haben, beschäftigen wir uns im zweiten Kapitel mit der Konstruktion von Origamikurven. Hierfür führen wir den *Teichmüllerraum* ein, den Raum der markierten, geschlossenen Riemannschen Flächen. Wir zeigen, wie Origamis Punkte im Teichmüllerraum liefern. Indem wir die Translationsstruktur auf dem Torus durch Matrizen variieren lassen, erhalten wir eine *Teichmüllerkreisscheibe* im Teichmüllerraum. Nachdem wir den Modulraum einführen und die Teichmüllerkreisscheibe in diesen projizieren, erhalten wir die Teichmüllerkurve des Origamis im Modulraum.

Im dritten Kapitel wollen wir den Raum beschreiben, indem die Randpunkte der Origamikurve liegen. Hierfür definieren wir den *augmentierten Teichmüllerraum nach Abikoff*  $\hat{T}_g$  [Abi77], der aus dem Teichmüllerraum entsteht, in dem man ihm Riemannsche Flächen hinzufügt, auf welchen endlich viele Kurven zu einem Punkt kontrahiert wurden. Nachdem wir diesen mit einer Topologie versehen haben, definieren wir die Kompaktifizierung des Modulraumes  $\overline{\mathcal{M}}_g$  nach *Deligne-Mumford* [DM69] als *Bahnenraum*, der aus der Aktion der Abbildungsklassengruppe  $\Gamma_g$  auf  $\hat{T}_g$  entsteht.

Alexander Rogovskyy hat in seiner Bachelorarbeit [Rog22] spezielle Überlagerungen über dem Torus untersucht, die den  $(n \times n)$ -Torus als Zwischenüberlagerung besitzen. Insbesondere hat er eine Möglichkeit angegeben, diese Origamis jeweils durch einen Vektor mit Einträgen aus  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  zu beschreiben. Im vierten Kapitel werden wir anhand eines Beispiels dieser Origamis den stabilen Graphen der Randpunkte der Origamikurve explizit berechnen. Des Weiteren werden

wir eine Beschreibung der Randpunkte durch *Dessins d'enfants* kennenlernen. Dies sind Überlagerungen über der dreifach punktierten Riemannsphäre.

Im fünften Kapitel wollen wir uns weiter mit der Struktur der stabilen Graphen der Randpunkte beschäftigen. Wir schränken uns hier auf die Origamis aus der Bachelorarbeit von Rogovskyy ein, bei welchen die Zwischenüberlagerung über dem  $(n \times n)$ -Torus von Grad  $p$  ist, wobei  $p$  prim ist. Hierbei unterscheiden wir zwischen dem allgemeinen Fall und dem Fall  $p = 2$ . Wir geben die Anzahl der Ecken und Kanten des Graphen an und zeigen wie man diese mit Hilfe des Vektors des Origamis berechnen kann. Als Hauptsatz dieses Kapitels werden wir die auftretenden stabilen Graphen der Randpunkte des Origamis klassifizieren.

# Kapitel I.

## Präliminarien

In diesem Kapitel führen wir die Grundbegriffe zu Riemannschen Flächen und der Überlagerungstheorie ein. Wir orientieren uns an [MM68], wo eine ausführliche Darstellung mit Beweisen gefunden werden kann.

Zu Beginn führen wir den Begriff einer Mannigfaltigkeit ein.

**Definition I.0.1 (Mannigfaltigkeit):** Sei  $M$  ein topologischer Raum. Wir bezeichnen  $M$  als eine *Mannigfaltigkeit* genau dann wenn

- (i)  $M$  ein separierter Raum ist,
- (ii)  $M$  eine höchstens abzählbare Basis hat und
- (iii) für alle Punkte  $x$  aus  $M$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  existiert, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

Hierbei bezeichnet  $n$  die *Dimension* von  $M$ .

Wir wollen nun auf diesen Mannigfaltigkeiten Homöomorphismen betrachten.

**Definition I.0.2 (Karten, Atlanten und komplexe Strukturen):** Sei im Folgenden  $M$  eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) Eine *Karte* auf  $M$  ist ein Paar  $(U, \phi)$  wobei  $\phi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus von einer Teilmenge  $U$  von  $M$  in eine offene Teilmenge  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  ist.
- (ii) Eine Überdeckung von  $M$  durch eine Menge von Karten  $\{(U_i, \phi_i) | i \in I\}$ , heißt *komplexer Atlas*  $A$ , wenn die Kartenwechselabbildungen

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

biholomorph sind.

- (iii) Zwei komplexe Atlanten sind äquivalent, wenn für alle Karten die Kartenwechselabbildungen biholomorph sind. Eine Äquivalenzklasse davon bezeichnet man als *komplexe Struktur auf  $M$* .

**Definition I.0.3 (Riemannsche Fläche):**  $X$  heißt *Riemannsche Fläche* wenn  $X$  eine zwei dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Struktur ist.

Für Riemannsche Flächen und allgemeiner für zusammenhängende Flächen  $X$  wollen wir das „Geschlecht“ einführen, das den topologischen Typ der Fläche beschreibt.

**Definition I.0.4 (Geschlecht):** Für das Geschlecht einer zusammenhängenden Fläche  $X$  betrachten wir stetige injektive Abbildungen  $f := S^1 \rightarrow X$ , wobei  $S^1$  den Einheitskreis bezeichnet. Das Geschlecht  $g$  ist die maximale Anzahl dieser Abbildungen, sodass die Fläche ohne das Bild dieser Wege noch zusammenhängend ist.

**Beispiel I.0.5:** Der Torus  $T$  ist eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 1.

**Definition I.0.6 (Wege und Homotopien):**

- (i) Für einen topologischen Raum  $X$  heißt die Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  *Weg* von  $\gamma(0)$  nach  $\gamma(1)$ . Ein Weg heißt *geschlossen*, wenn  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Ist ein Weg geschlossen, nennen wir  $\gamma$  *Schleife* mit *Basispunkt*  $\gamma(0)$ .
- (ii) Ein topologischer Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für zwei Punkte  $a, b$  aus  $X$  einen Weg mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$  gibt.
- (iii) Zwei Wege  $\gamma_0, \gamma_1$  heißen *weghomotop*, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : I \times I \rightarrow X$$

mit  $h(0, t) = a$ ,  $h(1, t) = b$  und  $h(s, 0) = \gamma_0(s)$ ,  $h(s, 1) = \gamma_1(s)$  gibt. Die Abbildung  $h$  wird *Homotopie* genannt.

Für zwei Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  können wir die Verknüpfung definieren als:

$$\gamma_2 * \gamma_1 : I \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

**Bemerkung I.0.7:** Die Relation

$$\gamma_0 \sim_h \gamma_1 \Leftrightarrow \exists h \text{ Homotopie von } \gamma_0 \text{ nach } \gamma_1$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen*.

**Beweis:** Die Reflexivität und die Symmetrie sind klar. Für die Transitivität sei  $h$  die Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  und  $g$  die Homotopie von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$ . Wir definieren  $f$  von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_2$  durch:

$$f(s, t) = \begin{cases} h(s, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(s, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Somit ist  $f$  eine Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_2$ . □

Die oben definierte Verknüpfung ist mit den Äquivalenzklassen verträglich und wir erhalten somit

$$[\gamma_1 * \gamma_2] = [\gamma_1] * [\gamma_2]$$

Wir werden nun sehen, dass die obigen Äquivalenzklassen mit der Verknüpfung eine Gruppe bilden.

**Definition I.0.8 (Fundamentalgruppe):** Die Homotopieklassen von Schleifen von  $a$  bilden zusammen mit der Verknüpfung von Wegen eine Gruppe, die *Fundamentalgruppe*. Wir schreiben hierfür:

$$\pi(X, a)$$

Man erkennt einfach, dass es sich hierbei um eine Gruppe handelt. Das neutrale Element ist die Identität  $e(s) = a$  für alle  $s \in [0, 1]$ , das Inverse Element ist  $y^{-1}(s) = y(1 - s)$  und die Assoziativität wurde bereits begründet.

Da wir uns im Folgenden fast ausschließlich mit zusammenhängenden topologischen Räumen beschäftigen werden, ist das folgende Lemma hilfreich:

**Lemma I.0.9:** *Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist die Fundamentalgruppe unabhängig von der Wahl des Basispunktes, somit ist also  $\pi(X, a) \cong \pi(X, b)$ .*

**Beweis:** [Hat00, Proposition 1.5] □

**Beispiel I.0.10 (Die Fundamentalgruppe von  $T$ ):** Wir betrachten folgende Abbildung des Torus. Die beiden Schleifen  $a$  und  $b$  bilden eine Basis der Fundamentalgruppe  $\pi_1(T, p)$  zu Basispunkt  $p$  (siehe Kapitel I). Aus diesem Grund ist

$$\pi_1(T, p) \cong \mathbb{F}_2,$$

wobei  $\mathbb{F}_2$  die freie Gruppe in zwei Erzeugern meint.

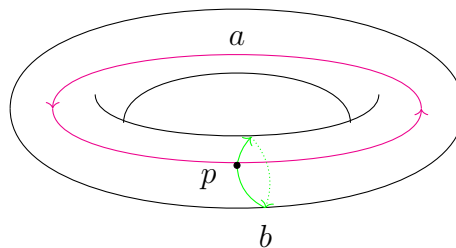


Abbildung I.1.: Die Fundamentalgruppe des Torus mit den zwei Erzeugern  $a, b$  und Basispunkt  $p$ .

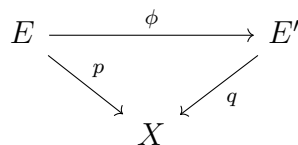
**Definition I.0.11 (Überlagerung, Isomorphie und Deckgruppe):** Seien  $E$  und  $X$  zusammenhängende topologische Räume.

- (i) Eine *Überlagerung* ist eine stetige Funktion  $p : E \rightarrow X$  von dem *Überlagerungsraum*  $E$  nach  $X$ , sodass für jeden Punkt  $x$  aus  $X$  eine offene Umgebung  $U$  existiert, sodass

$$p^{-1}(x) = \bigcup_{i \in I} V_i \text{ und } p|_{V_i} : E \rightarrow U \text{ ein Homöomorphismus ist.}$$

Wir bezeichnen  $V_i$  als *Blätter* der Überlagerung und  $d = \#p^{-1}(x)$  als *Grad* der Überlagerung. Dieser ist unabhängig vom gewählten  $x$ .

- (ii) Die zwei Überlagerungen  $p$  und  $q$  heißen *isomorph* wenn das Diagramm



kommutiert. Hierbei ist  $\phi$  ein Homöomorphismus, den wir in diesem Fall als *Isomorphismus* zwischen Überlagerungen bezeichnen.

- (iii) Eine *Decktransformation* der Überlagerung  $p : E \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus  $\phi$ , so dass das obige Diagramm für  $p = q$  kommutiert. Die Deckgruppe entsteht nun mit der Komposition von Abbildungen. Die Deckgruppe  $Deck(p)$  entspricht der Automorphismengruppe  $Aut(p)$ .
- (iv) Die Überlagerung heißt *normal*, wenn die Deckgruppe transitiv auf den Fasern  $p^{-1}(x)$  operiert.
- (v) Eine Überlagerung heißt *zyklisch*, wenn die Deckgruppe zyklisch ist.

(vi) Seien nun  $X, Y$  Riemannsche Flächen und eine  $p : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung, die auf den Karten lokal holomorph ist, auf  $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  eine Überlagerung ist und sich nicht auf diese Punkte fortsetzen lässt. Dann nennen wir  $p$  *verzweigte Überlagerung* und die Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  *Verzweigungspunkte*. Ist  $p$  nicht konstant, dann ist  $p$  in den Punkten lokal von der Form  $x_i \mapsto x^{e_{x_i}}$ . Wir nennen  $e_x$  den *Verzweigungsindex* von  $x_i$ .

**Beispiel I.0.12 (Origamis):** Origamis sind endliche Überlagerungen über dem Torus  $T$ , die lediglich über einem Punkt  $\infty$  verzweigen. Anschaulich kann man dies unter folgenden Bedingungen darstellen, indem man endlich viele Einheitsquadrate so verklebt.

- Jede untere Kante eines Quadrates wird mit genau einer oberen Kante verklebt.
- Analog wird jede rechte Kante mit einer linken Kante verklebt.
- Die so entstehende Fläche muss zusammenhängend sein.

Dies liefert eine Darstellung durch ein Paar von Permutationen  $(\sigma_x, \sigma_y)$  mit  $\sigma_{x,y} \in S_n$ . Hierbei bezeichnet  $n$  die Anzahl der verklebten Quadrate und wir bezeichnen mit  $n$  den *Grad* des Origamis. Weiterführende Informationen zu

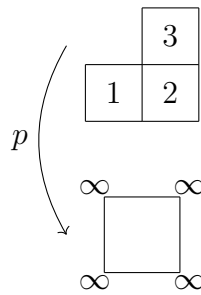


Abbildung I.2.: Das Origami mit Permutationen  $\sigma_x = (1, 2)$ ,  $\sigma_y = (1, 3)$ .

Origamis kann unter anderem in [Sch05] gefunden werden.

**Satz I.0.13 (Formel von Riemann- Hurwitz):** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine holomorphe  $n$ -blättrige verzweigte Überlagerung zwischen den kompakten Riemannschen Flächen  $X$  und  $Y$ , die jeweils von Geschlecht  $g$  und  $g'$  sind. Dann gilt:

$$2g - 2 = \sum_{P \in X} (e_P - 1) + n(2g' - 2)$$

Hierbei bezeichnet  $e_P$  den Verzweigungsindex von  $P$ .

**Beweis:** [M20, Satz 3.4.7]

□





# Kapitel II.

## Teichmüllerraum und Origamikurven

In diesem Kapitel wollen wir eine kurze Einführung in die Teichmüllertheorie geben. Wir werden zwei äquivalente Definitionen des Teichmüllerraumes angeben und mit Hilfe von quasikonformalen Abbildungen eine Metrik auf dem Teichmüllerraum definieren. Wir orientieren uns hierbei an der Darstellung in [IT92][Kapitel 1]. Daraufhin werden wir Teichmüllerkreisscheiben definieren, um als Ziel dieses Kapitels die Kurve eines Origamis als Teichmüllerkurve im Modulraum konstruieren. Dieser Abschnitt basiert auf [Her12].

### 1. Der Teichmüllerraum

#### 1.1. Der Teichmüllerraum für Geschlecht $g$

**Definition II.1.1 (Der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_g$ ):** Sei  $R$  eine Riemannsche Fläche. Wir betrachten ein Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe  $\pi_1(R, p)$  von  $R$  mit Basispunkt  $p$ . Sei  $\Sigma_p = \{[A_i], [B_i]\}_{i=1}^g$  ein Standard-Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe, wie in [Hat00, Sektion 1.2] gezeigt.

- (i) Wir nennen  $\Sigma_p$  eine *Markierung* von  $R$ .
- (ii) Zwei Markierungen  $\Sigma_p$  und  $\Sigma_{p'}$  heißen *äquivalent*, wenn es eine stetige Kurve  $C_0$  auf  $R$  von  $p$  nach  $p'$  gibt mit der Eigenschaft, dass  $[A_i] = [C_0^{-1} * A'_i * C_0]$  gilt. Hierbei handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.
- (iii) Seien  $(R, \Sigma_p)$  und  $(S, \Sigma_q)$  zwei Paare mit einer Markierung. Wir bezeichnen solche Paare als *äquivalent*, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $\varphi : R \rightarrow S$  gibt, so dass  $\varphi(\Sigma_p) = \{[\varphi(A_i)], [\varphi(B_i)]\}_{i=1}^g$  äquivalent zu  $\Sigma_q$  ist.

(iv) Der *Teichmüllerraum vom Geschlecht  $g$*  ist definiert als:

$$\mathcal{T}_g := \{[R, \Sigma_p] \mid R \text{ kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht } g, \\ \Sigma_p \text{ Markierung auf } R\}$$

wobei  $[R, \Sigma_p]$  die Äquivalenzklassen sind, die wir oben definiert haben.

Wir fixieren nun eine beliebige kompakte Riemannsche Fläche  $R_{ref}$  von Geschlecht  $g$ . Sei  $f : R_{ref} \rightarrow R$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus von  $R_{ref}$  in eine geschlossene Riemannsche Fläche  $R$ . Zwei Paare  $(R_1, f)$  und  $(R_2, g)$  solcher Riemannschen Flächen mit Abbildungen heißen *äquivalent*, falls  $g \circ f^{-1} : R_1 \rightarrow R_2$  homotop zu einer biholomorphen Abbildung  $h : R_1 \rightarrow R_2$  ist. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

**Definition II.1.2 (Der Teichmüllerraum von  $R$ ):** Die Menge der oben definierten Äquivalenzklassen heißt *Teichmüllerraum von  $R_0$* .

$$\mathcal{T}(R_{ref}) = \{[R, f] \mid R \text{ geschlossene Riemannsche Fläche } f \text{ wie oben definiert} \}$$

Wir können eine Identifikation der beiden Definitionen vornehmen. Sei  $\Sigma_p = [[A_i], [B_i]]_{i=1}^g$  eine Markierung auf  $R_{ref}$ . Ein beliebiger Punkt  $[S, f]$  aus  $\mathcal{T}(R)$  induziert eine Markierung  $f_*(\Sigma_p)$  auf  $S$ .

**Satz II.1.3:** *Die Abbildung*

$$\Phi_{\Sigma_p} : \mathcal{T}(R_{ref}) \rightarrow \mathcal{T}_g \\ [S, f] \mapsto \Phi_{\Sigma_p}([S, f]) = [S, f_*(\Sigma_p)]$$

*ist eine Bijektion*

**Beweis:** [IT92][Theorem 1.4] □

Im weiteren Verlauf wollen wir eine Metrik auf dem Teichmüllerraum betrachten, hierfür führen wir zunächst quasikonformale Abbildungen ein.

**Definition II.1.4 (quasikonformale Abbildung):**

- (i) Seien  $D, D'$  Teilmengen von  $\mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow D'$  ein orientierungstreuer Diffeomorphismus. Wir definieren  $\mu(\tau) := \left| \frac{f_{\bar{z}}(\tau)}{f_z(\tau)} \right|$ , für  $\tau \in D$ . Dann heißt

$$K_f := \sup_{\tau \in D} \frac{1 + \mu(\tau)}{1 - \mu(\tau)}$$

die *komplexe Dilatation* von  $f$  im Punkt  $\tau$ . Gilt  $K_f < \infty$ , so nennt man  $f$  eine *quasikonformale Abbildung*.

**Satz II.1.5 (Satz von Teichmüller):** Für zwei Elemente  $[R_1, f]$  und  $[R_2, g]$  aus  $\mathcal{T}_g$  existiert eine quasikonformale Abbildung  $h : R_1 \rightarrow R_2$  mit minimaler Dilatation unter allen quasikonformen Abbildungen, die homotop zu  $g \circ f^{-1}$  sind.

**Beweis:** [IT92] □

**Definition II.1.6 (Die Teichmüllermetrik):** Seien  $[R_1, f]$  und  $[R_2, g]$  Elemente aus  $\mathcal{T}_g$ . Nach Satz II.1.5 existiert eine quasikonformale Abbildung  $h : R_1 \rightarrow R_2$  mit minimaler Dilatation  $K$ . Dann ist der Abstand zwischen  $[R_1, f]$  und  $[R_2, g]$  definiert als  $d([R_1, f], [R_2, g]) = \log K$ .

**Satz II.1.7:** Die Teichmüllermetrik ist eine Metrik.

**Beweis:** [IT92] □

## 2. Konstruktion von Origamikurven

Wie in Beispiel I.0.12 eingeführt, ist ein Origami  $O := (p : X \rightarrow E)$  definiert als Überlagerung über dem Torus. Wir zeigen, wie wir im Allgemeinen für Translationsflächen Punkte im Teichmüllerraum erhalten. Durch Verknüpfung des Translationsatlas mit Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  verändert sich möglicherweise die Translationsstruktur und wir können dadurch die Teichmüllerkreisscheibe definieren. Mit Projektion dieser in den Modulraum erhalten wir die Teichmüllerkurve und, im Fall von Origamis, die entsprechende Origamikurve. Eine ausführliche Erarbeitung erfolgt in [Her12].

**Definition II.2.1:** Ein komplexer Atlas heißt *Translationsatlas*, wenn die Kartenwechselabbildungen lokal Translationen sind. Wir verlangen also, dass

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

von der Form  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = z + c_{ij}$  für  $c_{ij} \in \mathbb{C}$  sind. Entsprechend sind zwei solcher Translationsatlanten äquivalent, wenn die Übergangsfunktionen für alle Karten lokal Translationen sind. Die so entstehenden Äquivalenzklassen heißen *Translationsstruktur*. Eine Riemannsche Fläche  $R$  mit solch einer Struktur nennt man *Translationsfläche*.

**Proposition II.2.2:** Ein Origami  $O = (p : X \rightarrow E)$  induziert eine Translationsstruktur auf  $X^*$ , wobei  $X^* := X \setminus p^{-1}(\infty)$ .

**Beweis:** Wir müssen die entsprechenden Karten auf der punktierten Fläche definieren. Sei hierfür  $x \in X^*$ .

- Liegt  $x$  im Inneren eines Quadrates, so wählen wir als Karte das offene Quadrat um  $x$ .
- Liegt  $x$  am Rand eines Quadrates, so wählen wir in den beiden angrenzenden Quadraten eine offene Umgebung von  $x$  aus der Vereinigung dieser Quadrate als Karte.

Die Kartenwechselabbildungen sind lediglich die vertikalen und horizontalen Translationen der Quadrate.  $\square$

Insbesondere ist eine Translationsstruktur eine holomorphe Struktur. Diese wollen wir nun auf  $p^{-1}(\infty)$  fortsetzen. Hierfür müssen wir die Translationsabbildung um die Punkte  $p^{-1}(\infty)$  erweitern. Gilt nun  $x \in p^{-1}(\infty)$ , so betrachten wir eine Schleife um  $x$ . Im Einheitsquadrat schneidet diese die vier Ränder des Quadrates. Liften wir diese Schleife, so schneiden wir in  $X$  genau  $4e_x(p)$  Ränder von Quadraten, wobei  $e_x(p)$  den Verzweigungsindex von  $p$  im Punkt  $x$  bezeichnet. Und somit hat  $p$  lokal die Form  $z \mapsto z^{e_x(p)}$ .

**Korollar II.2.3:** *Für jedes Origami können wir die Struktur der Riemannschen Fläche auf  $T$  entlang von  $p$  auf  $X$  liften.*

Im weiteren Verlauf benötigen wir mehr Informationen über Translationsflächen. Insbesondere wollen wir Richtungen auf Translationsflächen angeben. Hierfür führen wir zunächst geodätische Linien ein.

**Definition II.2.4 (geodätische Linie):** Sei  $I$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ,  $X$  eine Translationsfläche und  $\gamma : I \rightarrow X$  eine stetige Funktion. Des Weiteren existiere für jedes  $i$  aus  $I$  eine offene Umgebung  $U_i$ , so dass  $\gamma|_{U_i}$  eine Isometrie ist. Dann heißt das Bild  $\gamma(I)$  *geodätische Linie* oder *Geodätische*.

Mit Hilfe dieser geodätischen Linien können wir nun Richtungen auf Translationsflächen über den Holonomievektor definieren (siehe [Ran16, Definition 1.11]).

**Definition II.2.5 (Holonomievektor):** Sei  $\gamma(I)$  eine geodätische Linie zwischen zwei Punkten  $x, y \in X$ . Wir wählen eine Überdeckung dieser Linie durch Karten  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  und Punkte  $(x_i)_{i \in I}$ , so dass  $x_i, x_{i+1} \in U_i$ . Da die Kartenwechselabbildungen Translationen sind, können wir die Bilder  $\phi_i(U_i)$  auf  $\mathbb{R}^2$  so verschieben, dass  $\phi_i(x_{i+1}) = \phi_{i+1}(x_{i+1})$  gilt. Dadurch erhalten wir eine Geodätische in  $\mathbb{R}^2$ . Der Vektor zwischen dem Bild von  $x$  und  $y$  heißt *Holonomievektor*.

Wir können nun Richtungen auf  $X$  über die Richtung des Holonomievektors auf  $X$  betrachten.

## 2.1. Variation der Translationsstruktur

Sei  $R$  eine kompakte Riemannsche Fläche,  $\mu$  ein Translationsatlas auf  $R^* := R \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ , mit endlich vielen Punkten  $\{p_1, \dots, p_n\}$  aus  $R$  und somit  $(R^*, \mu)$  eine Translationsfläche. Wir wollen nun einen Modulraum für  $(R, \mu)$  konstruieren. Wir orientieren uns hierbei an [Bau09, Abschnitt 2.3.2] und [HS07, Abschnitt 2.3.2].

- Sei hierfür zunächst die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto Ax$  für  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , gegeben. Indem wir jede Karte  $\phi_i$  aus  $\mu$  mit  $A$  verknüpfen, erhalten wir einen neuen Translationsatlas  $\mu_A := A\mu$  und somit eine neue Translationsfläche  $(R, \mu_A)$ .
- Wir erhalten eine Abbildung in den Teichmüllerraum:

$$\hat{\iota} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{T}_g, \quad A \mapsto [(R, id)]$$

Hierbei ist  $id : (R, \mu) \rightarrow (R, \mu_A)$  punktweise die Identität, es wird aber die Struktur als Translationsfläche verändert.

- Für  $U$  aus  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  ist  $id : (R, \mu) \rightarrow (R, \mu_U)$  biholomorph. Sind nun  $A, B$  aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $A = BU$ , gilt also  $\hat{\iota}(A) = \hat{\iota}(B)$ .

**Vorüberlegung II.2.6:** Im weiteren Schritt wollen wir nun die obere Halbebene  $\mathbb{H} := \{p + i \cdot q \mid q \geq 0\}$  mit  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  in Zusammenhang bringen. Es stellt sich heraus, dass

$$\mathbb{H} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

da wir lediglich Streckungen und keine Drehungen um den Punkt  $i$  betrachten wollen.

**Beweis (der Vorüberlegung):** Die Aktion

$$\mathfrak{p} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

ist transitiv und die Gruppe  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  ist der Stabilisator von  $i$ . Hieraus folgt bereits die Isomorphie.  $\square$

**Definition II.2.7 (Die Teichmüllereinbettung):** Somit steigt die Abbildung  $\hat{\iota}$  ab zu einer Abbildung:

$$\iota_R : \mathbb{H} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{T}_g$$

die wir Teichmüllereinbettung von  $R$  nennen.

**Satz II.2.8:** *Betrachten wir die Poincaré Metrik auf  $\mathbb{H}$  und die Teichmüllermetrik auf  $\mathcal{T}_g$ , dann ist die Teichmüllereinbettung  $\iota_R$  von  $R$  eine holomorphe Isometrie auf ihr Bild.*

**Beweis:** [HS07, Seite 17] □

## 2.2. Teichmüllerkreisscheiben und der Modulraum

**Definition II.2.9:** Für eine kompakte Riemannsche Fläche heißt das Bild der in Definition II.2.7 konstruierten Abbildung

$$\Delta_R := \iota_R(\mathbb{H})$$

*Teichmüllerkreisscheibe.*

**Definition II.2.10 (Der Modulraum  $\mathcal{M}_g$ ):** Der *Modulraum* ist definiert als:

$$\mathcal{M}_g := \{R \mid R \text{ ist eine geschlossene Riemannsche Fläche von Geschlecht } g\} / \sim \quad (\text{II.1})$$

Hier gilt:  $R \sim Q$  genau dann, wenn eine biholomorphe Abbildung  $h : R \rightarrow Q$  existiert.

Wir erhalten somit eine natürliche Projektion  $\pi : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ , indem wir die Markierung auf der Riemannschen Fläche vergessen. Wir wollen nun das Bild der von  $O$  induzierten Teichmüllerkreisscheibe im Modulraum betrachten.

**Definition II.2.11:** Das Bild von der Teichmüllerkreisscheibe in  $\mathcal{M}_g$  heißt *Teichmüllerkurve*, falls  $\pi(\Delta_R)$  eine algebraische Kurve ist. In diesem Fall schreiben wir  $C(R) := \pi(\Delta_R)$ .

**Proposition II.2.12:** *Für ein Origami  $O : X \rightarrow E$  ist das Bild der Teichmüllerkreisscheibe  $C(O)$  eine algebraische Kurve.*

**Beweis:** [HS09, Satz 5.3] □

# Kapitel III.

## Randpunkte von Origamikurven

Im vorangegangenen Kapitel haben wir zu einem gegebenen Origami die Origamikurve  $C(O)$  in  $\mathcal{M}_g$  konstruiert. In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Randpunkten dieser Kurve beschäftigen. Um von dieser algebraischen Kurve nun die Randpunkte zu bestimmen, betrachten wir die *Deligne-Mumford Kompaktifizierung* (siehe [DM69])  $\overline{\mathcal{M}}_g$  von  $\mathcal{M}_g$ . Hierfür werden wir den augmentierten Teichmüllerraum nach Abikoff  $\hat{T}_g$  einführen. Dieser entsteht aus dem Teichmüllerraum indem Punkte hinzugefügt werden, die stabile Riemannsche Flächen sind. Stabile Riemannsche Flächen sind Riemannsche Flächen auf welchen endlich viele Schleifen kontrahiert werden. Darauf folgend werden wir  $\hat{T}_g$  mit einer Topologie versehen. Diese Konstruktion werden wir nutzen, um  $\overline{\mathcal{M}}_g$  einzuführen. Es stellt sich heraus, dass der Rand der Origamikurve in  $\partial C(O) = \overline{C(O)} \setminus C(O)$  lediglich endlich viele Punkte enthält.

### 1. Der augmentierte Teichmüllerraum $\hat{T}_g$

Wir orientieren uns an [HS07], wo weitere Informationen gefunden werden können. Die Idee des augmentierten Teichmüllerraumes stammt aus [Abi77].

**Definition III.1.1 (Stabile Riemannsche Fläche, Deformation):**

(i) Sei  $X$  ein zusammenhängender, kompakter und komplexer Raum und es gilt:

- Für alle singulären Punkte existiert eine Umgebung, die biholomorph zu

$$\{(c, w) \in \mathbb{C}^2 \mid c, w \in \mathbb{C}, c \cdot w = 0\}$$

ist. Solche Punkte bezeichnen wir auch als *Doppelpunkte*.

- Jede irreduzible Zusammenhangskomponente, die isomorph zu  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ist, schneidet die anderen Zusammenhangskomponenten in mindestens drei Punkten.

Dann heißt  $X$  *stabile Riemannsche Fläche*.

- (ii) Seien  $X_{ref}$  eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht  $g$ ,  $X$  eine stabile Riemannsche Fläche,  $f : X_{ref} \rightarrow X$  eine stetige surjektive Abbildung und  $c_1, \dots, c_n$  disjunkte Schleifen auf  $X_{ref}$ , so dass  $f(c_i) = x_i$  und  $f|_{X_{ref} \setminus \bigcup_{i=1}^n c_i}$  ein Homöomorphismus ist. Dann heißt  $f$  *Deformation*.

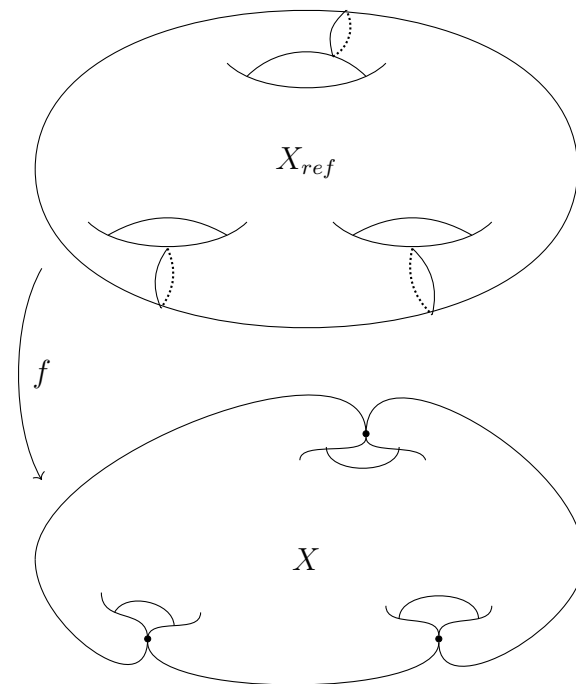


Abbildung III.1.: Eine Deformation einer Referenzfläche von Geschlecht 3



**Definition III.1.2 (Der augmentierte Teichmüllerraum nach Abikoff):**

$$\hat{T}_g := \{(X, f) \mid X \text{ stabile Riemannsche Fläche ,} \\ f : X_{ref} \rightarrow X \text{ Deformation}\} / \sim$$

Hierbei gilt, wie beim Teichmüllerraum,  $(X, f) \sim (Y, g)$  genau dann, wenn eine biholomorphe Abbildung  $h$  existiert, sodass  $h \circ f$  homotop zu  $g$  ist.  $\hat{T}_g$  heißt *augmentierter Teichmüllerraum nach Abikoff*.

Da wir für die Origamikurve Randpunkte betrachten wollen, benötigen wir eine Topologie auf dem kompaktifizierten Modulraum. Wir werden nun eine Topologie auf  $\hat{T}_g$  definieren und diese auf  $\overline{\mathcal{M}}_g$  übertragen. Hierfür geben wir eine Umgebungsbasis für die Punkte an.

**Definition III.1.3:** Sei  $V$  eine kompakte Umgebung der Doppelpunkte und  $\epsilon > 0$ . Dann ist eine Umgebung von  $(X, f)$  definiert durch:

$$\mathcal{U}_{V,\epsilon} := \{(X', f') \mid \exists h : X \rightarrow X' \text{ mit } h \text{ ist } (1 + \epsilon)\text{-quasikonformal} \\ \text{und } f' \text{ ist homotop zu } h \circ f\}$$

Über diese Umgebungen ist die Topologie auf  $\hat{T}_g$  definiert.

**Definition III.1.4:** Sei  $\text{Diffeo}^+(X_{ref})$  die Gruppe der orientierungstreuen Diffeomorphismen von  $X_{ref}$  und  $\text{Diffeo}^0(X_{ref}) \leq \text{Diffeo}^+(X_{ref})$  der Normalteiler der Abbildungen, die nullhomotop sind. Dann heißt

$$\Gamma_g = \text{Diffeo}^+(X_{ref}) / \text{Diffeo}^0(X_{ref})$$

*Abbildungsklassengruppe* und  $\Gamma_g$  operiert auf  $T_g$ .

**Definition III.1.5:** Die Gruppenaktion von  $\Gamma_g$  lässt sich auf  $\hat{T}_g$  fortsetzen. Wir definieren hier  $\overline{\mathcal{M}}_g$  als Quotienten der Aktion:

$$\overline{\mathcal{M}}_g := \Gamma_g \backslash \hat{T}_g.$$

Des Weiteren hat Braungardt in [Bra01, Satz 3.4.2] gezeigt, dass  $\overline{\mathcal{M}}_g$  homöomorph zur bekannten *Deligne-Mumford* Kompaktifizierung ist.

**Satz III.1.6:**  $\overline{\mathcal{M}}_g$  ist sogar eine projektive Varietät.

**Beweis:** [Knu83]

□



# Kapitel IV.

## Dessins d'enfants, die in Randpunkten vorkommen

Wir werden die Dessins d'enfants am Rand der Origami Kurve anhand eines Beispiels erläutern und daraufhin die stabilen Graphen der Origamis, die den  $(n \times n)$ -Torus als Zwischenüberlagerung besitzen, klassifizieren. Diese Klasse von Origamis wurde von Alexander Rogovskyy in [Rog22] untersucht.

### 1. Origamis die über dem $(n \times n)$ -Torus faktorisieren

**Definition IV.1.1:** Wir definieren den  $(n \times n)$ -Torus als Bahnraum der Gruppenaktion von  $(n\mathbb{Z})^2 \curvearrowright X := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ . Wir schreiben im Folgenden  $T_n$  für den  $(n \times n)$ -Torus.

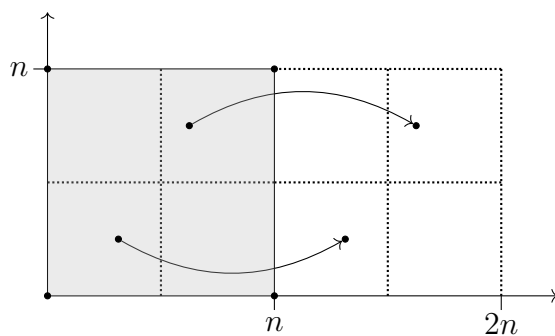


Abbildung IV.1.: Der  $(n \times n)$ -Torus gegeben durch das passende Gitter

Im Folgenden wollen wir zyklische Überlagerungen von Grad  $d$ , gegeben durch  $p : X \rightarrow T_n$ , betrachten.  $X$  ist hierbei gegeben durch  $d$  Kopien von  $T_n$  und

- wir betrachten  $N := n^2 + 1$  Schlitze (vgl. Abbildung IV.2)
- jeden Schlitz gewichten wir mit  $s_i \in \mathbb{Z}/(d\mathbb{Z})$ . Hierbei gibt  $s_i$  an, wie viele Kopien beim Überqueren von unten nach oben, respektive von links nach rechts, gewechselt werden,
- wir verlangen, dass  $\langle s_1, \dots, s_{n^2+1} \rangle = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Dies garantiert, dass die entstehende Fläche zusammenhängend ist.

Dies führt zu einer Vektordarstellung mit  $\vec{v} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{Z}/(d\mathbb{Z}))^N$ .

**Definition IV.1.2 (Der Raum der zyklisch faktorisierenden Origamis):** Nach obiger Konstruktion haben wir eine Überlagerung von Grad  $d$ ,  $p : X \rightarrow T_n$ , erhalten. Indem wir nun jedes Kästchen von  $T_n$  mit  $q : T_n \rightarrow T$  auf  $T$  abbilden erhalten wir eine normale Überlagerung von Grad  $n^2$ . Verknüpfen wir nun die Überlagerungen  $p$  und  $q$ , so erhalten wir ein Origami:

$$O = (\tilde{p} : X \xrightarrow{p} T_n \xrightarrow{q} T)$$

Nach [Rog22, Lemma 2.2] ist dies wieder eine Überlagerung. Wir bezeichnen die Klasse der Origamis, die auf diese Weise entstehen mit  $\mathcal{O}_n^d$ .

**Notation:** Die Schlitze werden so angeordnet, dass die ersten  $n$  Einträge des Vektors die ersten  $n$  Schlitze an der unteren Kante des  $(n \times n)$ -Quadrates bezeichnen und die Einträge  $v_{n+1}, \dots, v_{2n}$  die Schlitze an der linken Kante. Die restlichen Einträge füllen das Quadrat von links nach rechts und unten nach oben.

**Beispiel IV.1.3:** Als einführendes Beispiel betrachten wir eine Überlagerung mit  $d = 3$ ,  $n = 2$  und Verklebungen gegeben durch den Vektor  $\vec{v} = (1, 2, 1, 0, 0)$ .

Durch die Monodromieabbildung erhalten wir die beiden beschreibenden Permutationen

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (1, 2, 5, 6, 9, 10)(3, 4)(7, 8)(11, 12) \\ \sigma_y &= (1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 4, 10, 12, 6, 8) \end{aligned}$$

Zu Beginn wollen wir das Geschlecht  $g$  der Fläche  $X$  berechnen. Hierfür verwenden wir den Satz von Riemann-Hurwitz. Wir betrachten Überlagerungen über dem 1-Torus, welcher Geschlecht 1 besitzt. Somit erhalten wir:

$$2g - 2 = \sum_{p \in X} (e_p - 1)$$

1. Origamis die über dem  $(n \times n)$ -Torus faktorisieren

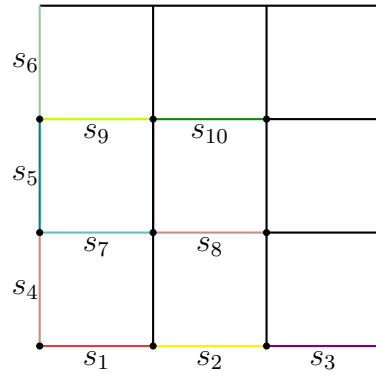


Abbildung IV.2.: Die Anordnung der Schlitze auf  $T_3$

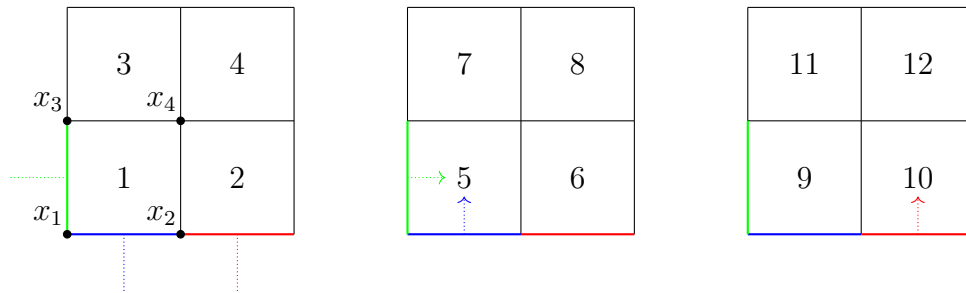


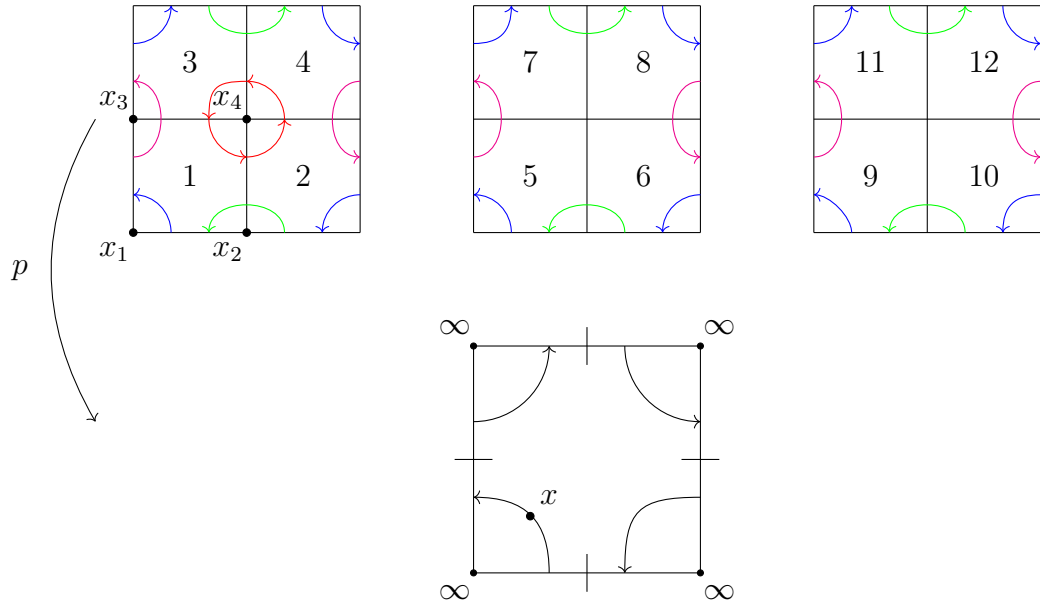
Abbildung IV.3.: Das Beispielorigami

Wir benötigen die Verzweigungsdaten der Überlagerung. Hierfür betrachten wir Schleifen, um den Punkt  $\infty$ , die wir entlang von  $p$  liften. Die Schleife um  $\infty$  hat Winkel  $2\pi$  und die gelifteten Schleifen um die Eckpunkte einer Kopie von  $T_n$ ,  $\{x_1, \dots, x_4\} \in \tilde{p}^{-1}(\infty)$  haben den Winkel  $k_{x_i} \cdot 2\pi$ , mit  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Auf jedem Kästchen auf  $X$  läuft die Schleife um eine Ecke, also um Winkel  $\frac{\pi}{2}$ . In dem wir die Anzahl der Kästchen zählen, die die Schleife überquert, können wir  $k$  bestimmen. Der Wert  $k$  entspricht hierbei dem Verzweigungsindex  $e_{x_i}$ . Hierbei notieren wir  $x_i$  als linke untere Ecke des  $i$ -ten Kästchens. Somit ergibt sich:

Die Kästchen werden in den folgenden Reihenfolgen überquert:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow [1, 10, 4, 3, 5, 2, 8, 7, 9, 6, 12, 11] \\ x_2 &\rightarrow [2, 1, 11, 12, 6, 5, 3, 4, 10, 9, 7, 8] \\ x_3 &\rightarrow [3, 4, 2, 5, 7, 8, 6, 9, 11, 12, 10, 1] \\ x_4 &\rightarrow [4, 3, 1, 2] \end{aligned}$$

Es sind also die Punkte  $x_1, x_2, x_3$  Singularitäten von  $X$ . Dies liefert die Ver-



zweigungsdaten  $e_{x_1} = 3$ ,  $e_{x_2} = 3$ ,  $e_{x_3} = 3$  und  $e_{x_4} = 1$  und somit erhalten wir das Geschlecht der Fläche:

$$2g - 2 = (3 - 1) + (3 - 1) + (3 - 1) + (1 - 1) = 6 \Leftrightarrow g = 4$$

Wie bereits in Kapitel III gezeigt, erhalten wir die Randpunkte der Origamikurve durch Kontraktion von endlich vielen Schleifen auf  $X$ .

**Definition IV.1.4 (Zylinder auf Translationsflächen):** Sei im Folgenden  $X$  eine Translationsfläche.

- Eine offene Teilmenge  $Z \subseteq X$  heißt *Zylinder*, falls sie isometrisch zu  $\mathbb{R}/k \cdot \mathbb{Z} \times ]0, a[$  ist. Hierbei bezeichnet  $k$  den Umfang und  $a$  die Höhe des Zylinders. Die Teilmengenbeziehung " $\subseteq$ " induziert eine Partialordnung auf der Menge der Zylinder. In diesem Kontext sprechen wir von *maximalen Zylindern*.
- Die *Richtung* eines Zylinders ist definiert als Richtung des Holonomievektors einer geschlossener Geodätischen  $\gamma$ , die  $\mathbb{R}/(k \cdot \mathbb{Z}) \times \{t\}$ ,  $t \in ]0, a[$ , als Urbild besitzt.
- Eine Partition von  $X$  durch Abschlüsse maximaler Zylinder heißt *Zylinderzerlegung*.

Es stellt sich heraus, dass man als Schleifen die Zylindermitten von maximalen horizontalen Zylindern wählen kann, wie in [HS07, Korollar 4.15 c)] gezeigt.

1. Origamis die über dem  $(n \times n)$ -Torus faktorisieren

Im weiteren Verlauf wollen wir die Fläche  $X$  in horizontale Zylinder zerlegen. Hierfür starten wir an einem beliebigen Punkt und dehnen den Zylinder in horizontale Richtung aus, bis sich der Zylinder wieder schließt. In vertikale Richtung dehnen wir den Zylinder aus, bis sich eine Singularität im Rand befindet.

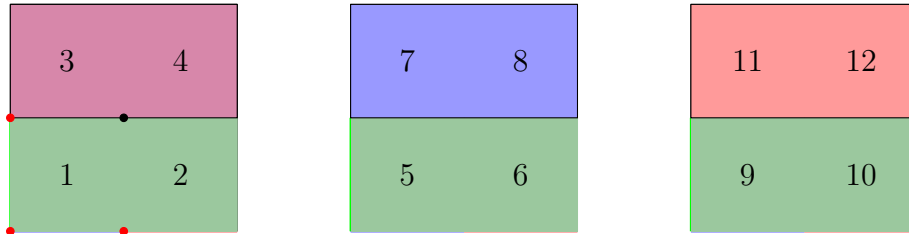


Abbildung IV.4.: Die horizontale Zylinderzerlegung von  $X$

Die horizontalen Mittellinien dieser Zylinder bilden Schleifen auf  $X$ . Durch Kontraktion dieser Schleifen erhalten wir die Randpunktfläche von  $C(O)$ . Wir notieren diese Fläche im Folgenden mit  $X_\infty$ . Die so entstehende Fläche ist eine stabile Riemannsche Fläche. Außerhalb dieser Zylindermitten erhalten wir Komponenten, die wir wieder kolorieren.

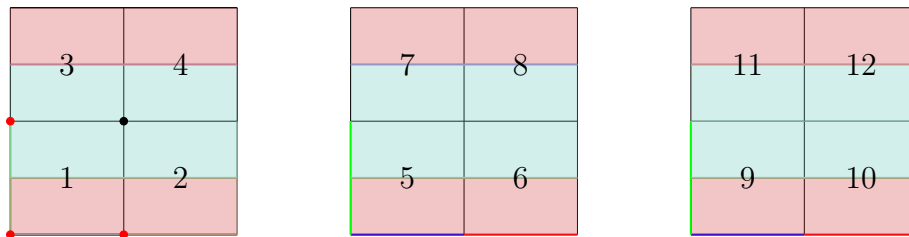


Abbildung IV.5.: Die Komponenten und Zylindermitten

**Definition IV.1.5 (Der stabile Graph eines Origamis):** Sei  $p : X \rightarrow T$  ein Origami mit maximalen horizontalen Zylindern  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  und  $z_1, \dots, z_n$  jeweils die Mittellinien der Zylinder. Der *stabile Graph* eines Origamis ist wie folgt definiert. Er besitzt die Eckenmenge

$$E := \{v_i \mid v_i \text{ ist Zusammenhangskomponente von } X \setminus \bigcup_{i=1}^n z_i\}$$

und die Kantenmenge

$$K := \{z_1, \dots, z_n\},$$

wobei die Kante  $z_i$  die Komponenten aus  $X \setminus \bigcup_{i=1}^n z_i$  verbindet, die an die Zylindermitte angrenzen. Des Weiteren gewichten wir die Ecken des Graphen mit dem Geschlecht der entsprechenden Komponente. Solche Graphen wurde für allgemeinere stabile Kurven von Deligne und Mumford in [DM69, Seite 86] eingeführt.



Abbildung IV.6.: Der stabile Graph des Origamis aus Beispiel IV.1.3.

**Satz IV.1.6 (Fundamentalgruppe zusammenhängender Graphen):** Sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph. Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\pi_1(\Gamma) \cong \mathbb{F}_n$$

Hierbei gilt  $n = |E| - |E'|$ , wobei  $E'$  die Kantenmenge eines Spannbaumes von  $\Gamma$  ist.

**Beweis:** [MM68] □

Wir wollen nun die Geschlechter der Komponenten berechnen.

**Bemerkung IV.1.7:** Die Geschlechter der Komponenten, das Geschlecht von  $X$  und der Rang der Fundamentalgruppe des Graphen lassen sich durch

$$\sum_{X \in \text{Komp}} g_X + \text{rank}(\pi_1(\Gamma)) = g$$

in Zusammenhang setzen.

**Beweis:** Siehe [Cap18, Kapitel 2]. □

Wir erkennen, dass für den stabilen Graphen des Origamis der Spannbaum nur eine Kante hat und somit  $\text{rank}(\pi_1(\Gamma)) = 3$ . Somit gilt

$$\sum_{X \in \text{Komp}} g_X + 3 = 4 \Rightarrow \sum_{X \in \text{Komp}} g_X = 1$$

Wir wollen nun die Komponenten weiter beschreiben. Hierfür führen wir Dessins d'enfants ein.



1. Origamis die über dem  $(n \times n)$ -Torus faktorisieren

**Definition IV.1.8 (Dessin d'enfant):** Ein *Belyi Paar* ist ein Paar  $(X, \beta)$ , wobei  $X$  eine geschlossene Riemannsche Fläche ist und  $\beta$  ein Morphismus von  $X \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , der nur über den Punkten  $0, 1$  und  $\infty$  verzweigt.

Wir können Belyi Paare durch ihre Monodromie beschreiben. Man kann sich einfach überlegen, dass

$$\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}) \cong \mathbb{F}_2.$$

Hierfür wählt man als Erzeuger für  $\mathbb{F}_2$ , zu einem beliebigen Basispunkt  $c \in (\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ ,  $X$  als Schleife um  $0$  und als zweiten Erzeuger  $Y$  die Schleife um den Punkt  $1$ . Dann kann man eine beliebige Schleife um  $\infty$  durch Konkatenation der Schleifen darstellen.

**Bemerkung IV.1.9:** Belyi Paare lassen sich durch ihre Monodromie durch Paare von Permutationen beschreiben. Wir notieren im Folgenden  $D = (\sigma_0, \sigma_1)$ , wobei  $\sigma_0$  die Monodromie von  $x$  und  $\sigma_1$  die Monodromie von  $y$  ist.

In [HS09] wird gezeigt, dass die Komponenten  $X_1, \dots, X_n$  von  $X_\infty$  Überlagerungen  $p_i : C_i \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ,  $i \in 1, \dots, n$  induzieren, wobei  $C_i$  die Normalisierung von  $X_i$  bezeichnet.

**Satz IV.1.10:** *Die Überlagerungen  $p_i : C_i \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ,  $i \in 1, \dots, n$  sind Belyi-Morphismen.*

**Beweis:** [HS09] □

Wir erinnern uns, dass wir die Permutationen der Monodromiedarstellung eines Origamis  $O := (p : X \rightarrow E)$  erhalten, indem wir für  $\sigma_x$  eine horizontale Schleife und für  $\sigma_y$  eine vertikale Schleife entlang von  $p$  auf  $X$  liften und die Reihenfolge in der die Kästchen überquert werden, notieren. Auf eine ähnliche Art erhalten wir nun die Permutationen  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$ . Im Folgenden bezeichnet  $E_\infty$  den kontrahierten Torus. Liften wir nun eine vertikale und horizontale Schleife auf  $X_\infty$  und wieder die Reihenfolge notieren, in der die Kästchen überquert werden, so erhalten wir die Dessin d'enfants am Rand des Origamis. Wichtig hierbei ist, dass  $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \subset S_n$  nicht transitiv auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$  operieren muss. Wir erhalten die Dessin d'enfants, die durch die Belyi-Morphismen aus Satz IV.1.10 beschrieben sind, indem wir die Permutationen  $\sigma_0$  und  $\sigma_1$  auf die Bahnen einschränken.

**Satz IV.1.11:** *Für die Permutationen  $(\sigma_x, \sigma_y)$  des Origamis und  $(\sigma_0, \sigma_1)$  des Dessins d'enfant gilt:*

$$\sigma_0 = \sigma_x \text{ und } \sigma_1 = \sigma_y^{-1} \sigma_x \sigma_y.$$

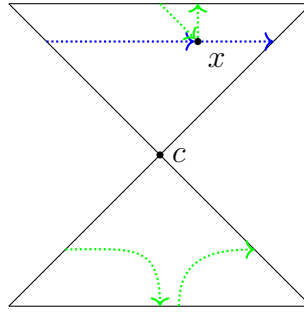


Abbildung IV.7.: Der kontrahierte Torus

**Beweis:** [HS09]

□

**Beispiel IV.1.12:** Für unser Beispiel ergeben sich also die Permutationen des Dessin d'enfants am Rand:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= (3, 4)(7, 8)(11, 12)(1, 2, 5, 6, 9, 10) \\ \sigma_1 &= (1, 2)(5, 6)(9, 10)(3, 12, 7, 4, 11, 8)\end{aligned}$$

Hieraus resultiert der folgende Bahnraum, mit dem wir die Permutationen der Dessins der Komponenten ausrechnen:

$$\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \setminus \{1, \dots, 12\} = \{[1, 2, 6, 5, 9, 10], [3, 4, 7, 8, 11, 12]\}$$

Und somit ergibt sich für das Dessin der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}\sigma_0^{X_1} &= \sigma_0 \Big|_{[1,2,6,5,9,10]} = (1, 2, 5, 6, 9, 10) \\ \sigma_1^{X_1} &= \sigma_1 \Big|_{[1,2,6,5,9,10]} = (1, 2)(5, 6)(9, 10)\end{aligned}$$

und für die zweite Komponente:

$$\begin{aligned}\sigma_0^{X_2} &= \sigma_0 \Big|_{[3,4,7,8,11,12]} = (3, 4)(7, 8)(11, 12) \\ \sigma_1^{X_2} &= \sigma_1 \Big|_{[3,4,7,8,11,12]} = (3, 12, 7, 4, 11, 8)\end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichne  $D_1$  und  $D_2$  die Dessins der Flächen  $X_1$  und  $X_2$ . Um nun den stabilen Graphen zu vervollständigen, müssen wir die Geschlechter der Flächen  $X_1$  und  $X_2$  ausrechnen.

1. Origamis die über dem  $(n \times n)$ -Torus faktorisieren

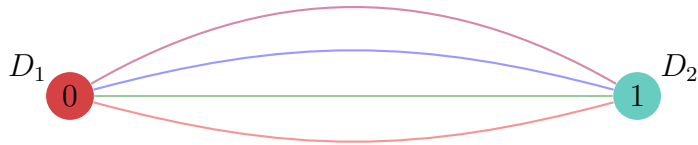


Abbildung IV.8.: Der vervollständigte Randpunktgraph mit Geschlechtern

**Satz IV.1.13:** Sei  $D$  ein Dessin mit Monodromie  $(\sigma_0, \sigma_1)$  und Grad  $d$ .

- Wir summieren in  $k_0$  die Anzahl der Zyklen von  $\sigma_0$ . Hierbei zählen wir auch die 1-Zyklen in  $S_n$  von  $\sigma_0$  mit. Mit  $k_1$  zählen wir analog die Zyklen von  $\sigma_1$ .
- Mit  $k_2$  notieren wir analog zu oben die Anzahl der Zyklen von  $\sigma_0 \circ \sigma_1$ .

Dann gilt für das Geschlecht von  $D$ :

$$g = \frac{2 - \chi}{2}, \quad \text{wobei} \quad \chi = k_0 + k_1 + k_2 - d.$$

**Beweis:** [HS09]

□

**Beispiel IV.1.14:** Wir können nun also für  $D_1$  von Grad 6 ausrechnen, dass  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ . Somit ergibt sich, dass  $g_{D_1} = 0$ . Für  $D_2$ , auch von Grad 6, rechnen wir aus, dass  $k_0 = 3$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ . Es ist also  $g_{D_2} = 1$ . Somit erhalten wir den Graphen in Section 1.



# Kapitel V.

## Klassifikation der Graphen

### 1. Klassifikation der Graphen für $\mathcal{O}_n^2$

Im letzten Kapitel haben wir erkannt, dass die Graphen eine elegante Beschreibung der Randpunkte der Origamikurve zulassen. Im Folgenden stellen wir uns nun die Frage nach der Struktur dieser Graphen für Origamis, die wie in dem Beispiel, über dem  $(n \times n)$ -Torus faktorisieren. Hierfür wollen wir zunächst lediglich die Parameter  $n \in \mathbb{N}$  und  $d = 2$  betrachten. Wir folgen dazu der Struktur des Beispiels und berechnen zunächst die Verzweigungsdaten eines Origamis, repräsentiert durch einen Vektor  $v = [s_1, \dots, s_{n^2+1}] \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n^2+1}$ . Da die Einträge aus  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sind, gilt also  $s_i = 1$  oder  $s_i = 0$ . Somit wird beim Überqueren entweder die Kopie gewechselt oder nicht. Aus diesem Grund ergibt sich für die Verzweigungsindizes:

**Bemerkung V.1.1:** Ist  $x_i$  ein Eckpunkt eines Quadrates, also  $x_i \in p^{-1}(\infty)$  und  $S_{x_i}$  bezeichne die Menge der Indizes der angrenzenden Schlitze zu  $x_i$ . Dann gilt:

$$e_{x_i} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j \in S_{x_i}} s_j \pmod{2} = 0, \quad e_{x_i} = 2 \text{ sonst.}$$

**Korollar V.1.2:** *Wir erhalten als Korollar aus Bemerkung V.1.1:*

$$e_{x_i} = 1 + \left( \sum_{j \in S_{x_i}} s_j \pmod{2} \right)$$

*Hierbei rechnen wir im zweiten Summanden mit 1 und 0 als Repräsentanten der entsprechenden Äquivalenzklassen.*

Indem wir nun für einen Eckpunkt  $x_i$  die entsprechenden Indizes der angrenzenden Schlitze im Vektor  $v$  ausrechnen, können wir die Verzweigungsdaten also kombinatorisch beschreiben.

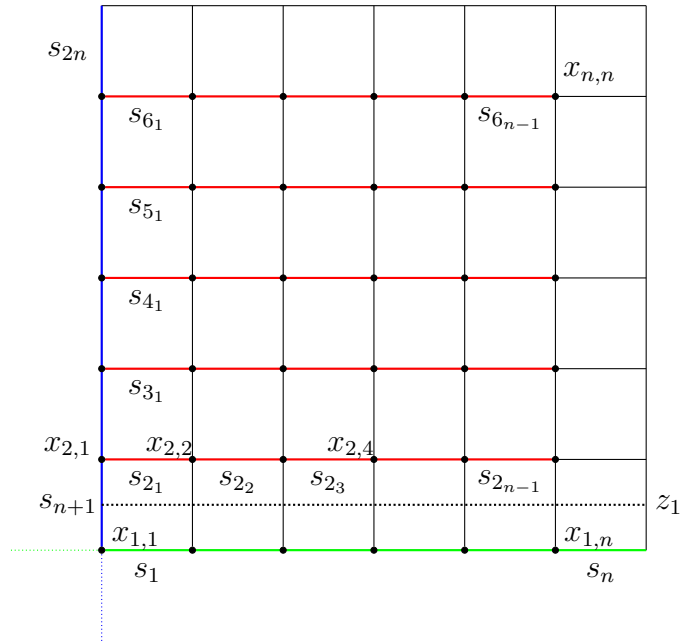


Abbildung V.1.: Der  $(6 \times 6)$ -Torus

**Notation V.1.3:** Wir führen einige nützliche Notation ein (siehe Abbildung V.1):

- Im folgenden notieren wir die linken unteren Ecken der Kästchen mit  $x_{i,j}$ , wobei  $i$  und  $j$  jeweils  $\{1, \dots, n\}$  durchlaufen.
- Wir nennen die unteren Kanten der Kästchen *Linien*. Die Kante auf der also die Eckpunkte  $x_{k,j}$  liegen, heißt also  $k$ -te Linie.
- Zur besseren Lesbarkeit notieren wir die ersten  $2n$  Einträge des Vektors  $v$  wie gehabt mit  $s_i$  für den  $i$ -ten Eintrag. Die restlichen Einträge beschreiben die vertikalen Schlitze, in Abbildung V.1 farblich rot gekennzeichnet. Wir notieren diese Schlitze mit  $s_{i_j}$ , mit  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  und  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Der Schlitz  $s_{i_j}$  liegt hierbei in der  $i$ -ten Linie und am unteren Rand des  $j$ -ten Kästchens.

Wir wollen nun die Verzweigungsindizes für einen gegebenen Vektor ausrechnen.

**Lemma V.1.4:** *Wir unterscheiden hier nach Anzahl der eingehenden Schlitze in einen Eckpunkt und erhalten mit Korollar V.1.2:*

- *Wie in Abbildung V.1 zu erkennen, ist die einzige Ecke mit vier angrenzenden Schlitzten die Ecke  $x_{1,1}$ . Es gilt also:*

$$e_{x_{1,1}} = 1 + ((s_1 + s_{n+1} + s_n + s_{2n}) \pmod 2)$$

- Die einzigen Ecken mit drei angrenzenden Schlitzten sind die Ecken, die vertikal an der linken Kante über  $x_{1,1}$  liegen, also die Ecken  $x_{i,1}$  mit  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Für diese gilt:

$$e_{x_{i,1}} = 1 + ((s_{n+i} + s_{n+i-1} + s_{i_1}) \pmod 2)$$

- Für Ecken mit zwei Schlitzten betrachten wir zunächst die Ecken im Inneren des Quadrates. Wir erhalten für  $i \in \{2, \dots, n\}$ :

$$e_{x_{i,j}} = 1 + ((s_{i_j} + s_{i_{j-1}}) \pmod 2), \\ j \in \{2, \dots, n-1\}$$

und

$$e_{x_{1,j}} = 1 + ((s_j + s_{j-1}) \pmod 2), j \in \{2, \dots, n\}.$$

- Letztlich sind die Ecken mit lediglich einem ausgehendem Schlitz die Ecken  $x_{i,n}$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Für diese ergibt sich:

$$e_{x_{i,n}} = 1 + s_{i_{n-1}}$$

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die Anzahl der Zylinder und Komponenten für einen Vektor berechnen, dies liefert entsprechend die Anzahl der Ecken und Kanten des Randpunktgraphen.

**Satz V.1.5:** Sei ein Origami aus  $\mathcal{O}_d^n$  (mit  $d = 2$ ) durch den Vektor  $v = (s_1, \dots, s_{n^2+1})$  gegeben. Dann gilt für den Randpunktgraphen, dass:

$$\#K = \sum_{i=1}^n k_i - \min(n-1, \sum_{i=1}^n k_i \delta_i)$$

Hierbei ist  $k_i = 1$  genau dann, wenn  $s_{n+i} = 1$  und  $k_i = 2$ , wenn  $s_{n+i} = 0$ . Des Weiteren gibt  $\delta_i$  an, ob in einer Zeile ein Verzweigungspunkt vorliegt oder nicht.

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow e_{x_{i,j}} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** Im ersten Summanden gehen wir davon aus, dass in jeder Linie mindestens ein Verzweigungspunkt vorliegt. Dort zählt  $k_i$  nur, ob in einer Zeile der Eintrag des Schlitzes der linken Kante Null oder Eins ist und entsprechende Zylinder in zwei Zylinder zerfallen oder nicht. Davon subtrahieren wir die Anzahl der Zeilen, in der keine Verzweigungspunkte vorliegen und somit zwei benachbarte Zylinder zusammenfallen. Dies gewichten wir mit der entsprechenden Vielfachheit des Zylinders, der zusammenfällt. Das Minimum hier ist notwendig, da für den Fall nicht vorhandener Verzweigungspunkte alle Zylinder einer Kopie zu einem Zylinder zusammenfallen.  $\square$

**Korollar V.1.6:** *Da die Ecken nach Definition den Komponenten entsprechen und wir in Satz V.1.8 zeigen, dass jede Komponente nur eine Linie von Verzweigungspunkten einschließt, gilt:*

$$\#E = \sum_{i=1}^n 1 - \delta_i,$$

wobei  $\delta_i$  wie oben definiert ist.

Betrachten wir nun Abbildung V.1. Wir können die Lage der Zylinder und Komponenten der Fläche  $X$  auf dem  $(n \times n)$ -Torus darstellen, indem wir sie mit ihren Vielfachheiten auf  $T_n$  beschreiben. Dies liefert eine Art, den Graphen zu beschreiben, die die Klassifizierung der auftretenden Graphen für  $\mathcal{O}_n^2$  einfacher macht.

**Bemerkung V.1.7:**

- (i) Wir können den  $(n \times n)$ -Torus mit  $n$  horizontalen Zylindern überziehen. Jeder dieser Zylinder hat Höhe 1 und Breite  $n$ . Mit  $\hat{z}_i$  bezeichnen wir den  $i$ -ten Zylinder von unten. Jeder dieser Zylinder wird oben und unten von Linien begrenzt. (siehe Abbildung V.1) Liften wir einen dieser Zylinder, so kann er entweder ein oder zwei Urbilder haben. Liegen auf einer Linie zwischen zwei Zylindern keine Verzweigungspunkte, so fallen diese auf der Fläche  $X$  zu einem Zylinder zusammen.
- (ii) Kontrahieren wir nun die Mittellinien der Zylinder auf  $T_n$  zu einem Punkt  $\hat{z}_i^*$  und entfernen diese aus  $T_n$ , so erhalten wir die entsprechenden Komponenten  $\hat{c}_i$  auf  $T_n$ . Mit  $\hat{c}_i$  ist die Komponente gemeint, welche oben von dem Punkt  $\hat{z}_i^*$  begrenzt wird.
- (iii) Mit  $c_i$  bezeichnen wir die eindeutige Komponente auf der Fläche  $X$ , wenn wir  $\hat{c}_i$  auf  $X$  liften.
- (iv) Mit  $V(z_i)$  notieren wir die Anzahl der Zylindermitten, welche die zwei Komponenten  $c_i$  und  $c_{i+1}$  miteinander verbinden.
- (v) Eine Komponente enthält mindestens einen Verzweigungspunkt.

Es ist für unseren Fall sinnvoll, die Geschlechter der Komponenten ohne die Konstruktion der Dessin d'enfants zu berechnen. Hierfür betrachten wir die Einschränkung der Überlagerung  $p$  auf  $c_i$ .

$$p|_{c_i} \longrightarrow \hat{c}_i$$



Da wir bereits die Verzweigungsdaten eines Vektors, der ein Origami definiert, ausgerechnet haben, nutzen wir diese, um die Formel von Riemann-Hurwitz Satz I.0.13 anzuwenden. Die einzelnen Komponenten auf  $T_n$  haben jeweils Geschlecht 0. Die Verzweigungsdaten der Eckpunkte ändern sich durch das Zusammenziehen der Mittellinien nicht. Es kann jedoch passieren, dass wir über den kontrahierten Mittellinien Verzweigungen erhalten. Wir notieren hier für den Verzweigungsindex einer kontrahierten Zylindermitte  $e_{z_i}$ . Des Weiteren können wir eine Aussage über die maximale Anzahl an Verzweigungspunkten in einer Komponente treffen.

**Satz V.1.8:** *Alle Verzweigungspunkte von  $p|_{c_i}$  einer Komponente  $c_i$  liegen auf einer horizontalen Linie, für zwei Verzweigungspunkte einer Komponente  $x_{i_1,j_1}$  und  $x_{i_2,j_2}$  gilt, dass  $i_1 = i_2$ .*

**Beweis:** Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei  $c_i$  eine Komponente, die die  $i$ -te und  $(i+1)$ -te Linie der Kopie von  $T_n$  einschließt und unten von der Zylindermitte  $z_i$  und oben von  $z_k$  begrenzt wird. Dann gibt es einen Zylinder, der zwischen den beiden Punkten  $x_{i,j}$  und  $x_{i+1,j}$  liegt. Die Zylindermitte  $z_j$  dieses Zylinders trennt dann allerdings die Komponente.  $\square$

**Korollar V.1.9:** *Für eine Komponente  $c_i$ , kann die Abbildung*

$$p|_{c_i} \longrightarrow \hat{c}_i$$

*höchstens über den kontrahierten oberen und unteren Zylindermitteln und über  $n$  eingeschlossenen Eckpunkten von Quadraten verzweigen.*

**Bemerkung V.1.10:** Dies liefert eine Beschreibung des stabilen Graphen durch die Graphen mit folgender Konstruktion. Wir beginnen mit einem Zyklus von  $m \in \{1, \dots, n\}$  Ecken, die wir mit  $c_1, \dots, c_m$  nummerieren und mit einem Geschlecht gewichten. Jede Ecke  $c_i$  ist zuerst mit einer Kante mit  $c_{i+1}$  verbunden und der Zyklus schließt sich durch die Verbindung von  $c_m$  mit  $c_1$ . Für jede Kante besteht nun die Möglichkeit, entweder die Kante unberührt zu lassen, oder sie durch  $d$  Kanten, also im Fall  $\mathcal{O}_n^2$  durch zwei Kanten, zu ersetzen. Wir zeigen, dass die so konstruierten Graphen die stabilen Graphen für Origamis  $O$  aus  $\mathcal{O}_n^2$  klassifizieren. Es ist einfach zu erkennen, dass der stabile Graph eines solchen Origamis  $O$  durch diese Art beschrieben werden kann. Wir werden in Satz V.1.14 zeigen, dass für  $\mathcal{O}_n^2$  alle Graphen mit dieser Struktur auftauchen und für jede Ecke die möglichen Geschlechter angeben.

**Proposition V.1.11:** *Sei  $c_i$  die Komponente, die die Eckpunkte  $x_{i,1}, \dots, x_{i,n}$  umschließt und von den Zylindermitteln von  $z_i$  und  $z_{i+1}$  umrandet wird. Des*

Weiteren ist  $p|_{c_i} \rightarrow \hat{c}$  die auf  $c_i$  eingeschränkte, 2-blättrige Überlagerung. Somit ergibt sich für das Geschlecht von  $c_i$ :

$$2g - 2 = -4 + \sum_{k=i}^j (e_{x_k} - 1) + (e_{z_i} - 1) + (e_{z_{i+1}} - 1)$$

**Beispiel V.1.12:** Wir befinden uns wieder in Situation von Beispiel IV.1.3. Wir erhalten für das Geschlecht  $g$  von  $c_1$ :

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -2 \cdot n + (e_{x_1} - 1) + (e_{x_2} - 1) + (e_{z_1} - 1) + (e_{z_2} - 1) \\ \Leftrightarrow 2g - 2 &= -2 \cdot 3 + (3 - 1) + (3 - 1) + (3 - 1) + (1 - 1) \\ \Leftrightarrow 2g - 2 &= -6 + 6 \\ \Leftrightarrow g &= 1 \end{aligned}$$

und für das Geschlecht von  $c_2$ :

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -2 \cdot n + (e_{x_3} - 1) + (e_{x_4} - 1) + (e_{z_1^*} - 1) + (e_{z_2^*} - 1) \\ \Leftrightarrow 2g - 2 &= -2 \cdot 3 + (1 - 1) + (3 - 1) + (3 - 1) + (1 - 1) \\ \Leftrightarrow 2g - 2 &= -6 + 4 \\ \Leftrightarrow g &= 0 \end{aligned}$$

Somit stimmt unser Ansatz mit der Geschlechterberechnung über die Formel von Riemann Hurwitz mit den Geschlechtern der Kinderzeichnungen überein.

**Beispiel V.1.13:** Wir betrachten als Beispiel ein Origami aus  $\mathcal{O}_6^2$ , welches nur an der vertikalen Seite alternierend Verklebungen vorliegen hat. Dieses wird durch den Vektor  $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{37}$  repräsentiert. Der Vektor hat folgende Einträge:

- $v_1, \dots, v_6$  und  $v_{13}, \dots, v_{37}$  sind gleich Null.
- $v_7, v_9, v_{11} = 1$  und  $v_8, v_{10}, v_{12} = 0$ .

Betrachten wir Abbildung V.1, erkennen wir, dass in jeder Ecke an der linken Kante des Quadrates ein Verzweigungspunkt vorliegt. Somit fällt keiner der Zylinder zusammen und es liegen 6 Komponenten vor. Mit Satz V.1.5 gilt also, dass  $\delta_j = 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, 6\}$ . Somit gilt

$$\#K = \sum_{i=1}^n k_i - \min(n - 1, \sum_{i=1}^n k_i \delta_i) = 9 - 0 = 9$$

und  $\#E = 6$ . Des Weiteren können wir nun die Vielfachheiten der Zylinder ausrechnen.

$$\begin{aligned} V(z_1) &= 1, V(z_2) = 2, V(z_3) = 1, \\ V(z_4) &= 2, V(z_5) = 1, V(z_6) = 2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Proposition V.1.11 können wir die Geschlechter der Komponenten ausrechnen und erhalten im Resultat, dass alle Geschlechter  $g_i = 0$  sind, da lediglich über einem eingeschlossenen Punkt und einer Zylindermitte verzweigt wird. Wir erhalten somit den folgenden Graphen:

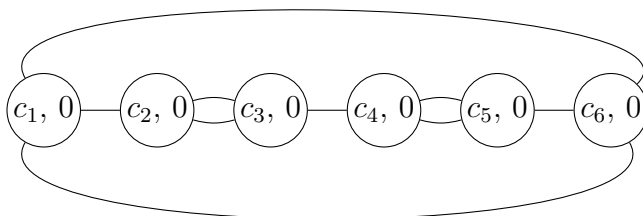


Abbildung V.2.: Der stabile Graph des Beispiels

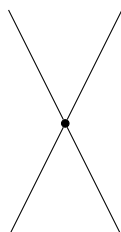
Wir haben somit also eine intuitive Art gefunden, den stabilen Graphen eines Origamis zu beschreiben. Im folgenden Satz wollen wir nun die auftretenden Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$  klassifizieren.

**Satz V.1.14:** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Dann haben die Graphen der Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$  genau die Struktur aus Bemerkung V.1.10. Hierbei gilt:*

Fall 1:



Fall 2:



Fall 3:

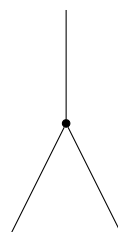


Abbildung V.3.: Die lokale Struktur des Graphen an den Ecken

- (i) *An einer Ecke können, wie in Abbildung V.3 zu erkennen, entweder zwei, drei oder vier Kanten angrenzen. Hierbei sind die minimalen und maximalen auftretenden Geschlechter unterschiedlich.*

*Sei  $n$  gerade und  $g$  bezeichne das Geschlecht der Komponente, dann gilt:*

Fall 1:

$$\max(g) = \frac{n}{2}, \quad \min(g) = 1$$

Fall 2:

$$\max(g) = \frac{n}{2} - 1, \quad \min(g) = 0$$

Fall 3:

$$\max(g) = \frac{n}{2} - 1, \quad \min(g) = 0$$

Ist  $n$  ungerade, so gilt:

Fall 1:

$$\max(g) = \frac{n-1}{2}, \quad \min(g) = 1$$

Fall 2:

$$\max(g) = \frac{n-1}{2} - 1, \quad \min(g) = 0$$

Fall 3:

$$\max(g) = \frac{n+1}{2} - 1, \quad \min(g) = 0$$

- (ii) Für jedes  $m \in \{1, \dots, n\}$  und  $\#E = m$  treten alle möglichen Graphen, die nach Bemerkung V.1.10 konstruiert werden können, als stabile Graphen eines Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$  auf. Auch sind für jede Ecke alle Geschlechter zwischen den Minima und Maxima aus (i) möglich. Die Graphen aus Bemerkung V.1.10 sind also eine Charakterisierung der stabilen Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$ .

**Beweis:** Wir werden für die einzelnen Ecken die betreffenden Einträge der Vektoren konstruieren. Die entsprechenden Minima und Maxima werden wir nach der Formel von Riemann-Hurwitz aus Proposition V.1.11 berechnen. Da  $d = 2$  gilt, ist die Überlagerung 2-blättrig und somit ergibt sich:

$$2g - 2 = -4 + \sum_{k=i}^j (e_{x_k} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1)$$

Sei  $n$  gerade:

Fall 1: Da die eingehenden und ausgehenden Kanten jeweils Vielfachheit 1 haben, verzweigt die Komponente über beiden Zylindern und für die beiden vertikalen Schlitzte gilt  $s_{n+1} = s_{n+i+1} = 0$ . Es ist also  $e_{z_1} = e_{z_2} = 2$ . Mit Satz V.1.8 reicht es, lediglich eine Linie von möglichen Verzweigungspunkten zu betrachten und dort die Multiplizität von  $p|_{c_i}$  zu minimieren oder zu maximieren. Aus Satz V.1.8 folgt auch, dass jede Komponente mindestens

einen Verzweigungspunkt enthalten muss. Es gilt also  $\sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) > 0$ . Durch die Anwendung von Riemann-Hurwitz erhalten wir also, dass  $g \geq 1$ . Wir können auch explizit einen Vektor angeben, für den das minimale Geschlecht von  $c_i$  auftritt. Es muss also noch genau ein beliebiger Schlitz  $s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}$  gleich Eins gesetzt werden. Somit sind die an den Schlitz angrenzenden Eckpunkte  $x_{i_j}$  und  $x_{i_{j+1}}$  Verzweigungspunkte. Es ist:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + e_{x_{i,j}} + e_{x_{i,j+1}} + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) \\ g &= 1 \end{aligned}$$

Für das Maximum wollen wir die Anzahl der Verzweigungspunkte maximieren. Nach Bemerkung V.1.1 muss also die Anzahl der Punkte maximiert werden, an denen eine ungerade Anzahl von Schlitz mit Kopienwechsel angrenzt. Dies erreichen wir, indem wir die  $n - 1$  Schlitz alternierend 1 und 0 setzen, also  $[s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}] = [1, 0, 1, \dots, 0, 1]$ . Da  $n - 1$  ungerade ist, ist der letzte Eintrag des Vektors wieder 1 und somit verzweigen alle von  $c_i$  eingeschlossenen Punkte. Dies liefert das Gewünschte und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + n(2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) \\ g &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: Im zweiten Fall muss bereits für die vertikalen Schlitz  $s_{n+i} = s_{n+i+1} = 1$  gelten, da  $V(z_i) = V(z_{i+1}) = 2$  gilt. Somit können wir die Argumente von Fall 1 übertragen und erhalten für das Minimum:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + e_{x_{i,j}} + e_{x_{i,j+1}} + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \\ g &= 0 \end{aligned}$$

und für das Maximum:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + n(2 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

Fall 3: Das im dritten Fall der Schlitz  $s_i = 0$  und  $s_{i+1} = 1$  ist, führt zu der Besonderheit, dass bereits über dem Punkt  $x_{i_1}$  verzweigt wird, bevor die horizontalen Schlitz gewählt werden. Dadurch müssen im Minimum keine

neuen Verzweigungspunkte hinzugefügt werden. Somit ist das minimale auftretende Geschlecht von  $c_i$ :

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + e_{x_{i,1}} + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Für das maximale Geschlecht setzen wir die Schlitze wieder alternierend auf 0 oder 1, da jede andere Konfiguration der Vektoreinträge zu zwei gleichen aufeinander folgenden Einträgen führen würde, welche indem dortigen Punkt zu Multiplizität 1 führt. Es ist der erste Punkt  $x_{i,1}$  bereits ein Verzweigungspunkt, wir können die Schlitze also entweder beginnend mit Eins,  $[s_{i,1}, \dots, s_{i,n-1}] = [1, 0, 1, \dots, 0, 1]$ , oder beginnend mit Null,  $[s_{i,1}, \dots, s_{i,n-1}] = [0, 1, 0, \dots, 1, 0]$ , beschreiben. Hierbei gilt im ersten Fall, dass  $e_{x_{i,1}} = 1$  und im zweiten Fall, dass  $e_{x_{i,n-1}} = 1$ . Dies liefert für das maximale Geschlecht:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (n - 1)(2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

Sei nun  $n$  ungerade, also  $n - 1$  gerade. Dies ändert lediglich etwas an den maximalen Geschlechtern. Eine alternierende Belegung des Vektors liefert auch hier wieder eine maximale Anzahl an Verzweigungspunkten. Da in Fall 1 und Fall 2 noch keine Verzweigung im Punkt  $x_{i,1}$  vor der Wahl der horizontalen Schlitze vorliegt, liefert eine Wahl von  $[s_{i,1}, \dots, s_{i,n-1}] = [1, 0, 1, \dots, 1, 0]$  keine Verzweigung im Punkt  $e_{x,n}$  und eine Wahl von  $[s_{i,1}, \dots, s_{i,n-1}] = [0, 1, \dots, 0, 1]$  keine Verzweigung im Punkt  $x_{i,n}$ . In diesen Fällen können die Vektoren nur so befüllt werden, dass entweder  $e_{x_{i,1}} = 1$  oder  $e_{x_{i,n-1}} = 1$ . Für das maximale Geschlecht für Fall 1 gilt:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (n - 1)(2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) \\ g &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

und in Fall 2:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (n - 1)(2 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \frac{n-1}{2} - 1 \end{aligned}$$

In Fall 3 ist bereits eine Verzweigung in Punkt  $x_{i,1}$ , durch die beiden vertikalen Schlitze  $s_i$  und  $s_{i+1}$  gegeben. Indem wir den Vektor mit  $[s_{i,1}, \dots, s_{i,n-1}] =$

$[0, 1, 0, \dots, 0, 1]$  belegen, wird über allen Eckpunkten verzweigt. Dies liefert:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + n(2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \frac{n+1}{2} - 1 \end{aligned}$$

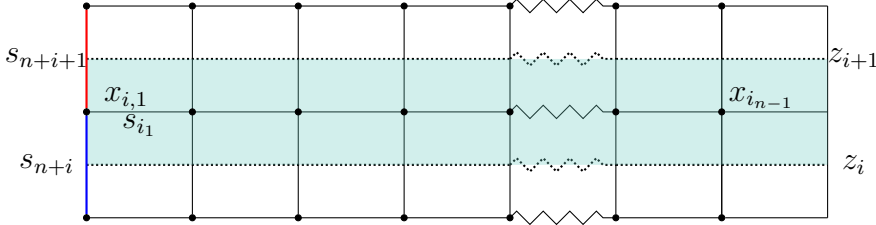


Abbildung V.4.: Die Komponente  $c_i$  in  $X$

Wir konstruieren nun einen Vektor zu einem beliebigen Graphen  $\Gamma$  mit  $\#E = k \in \{1, \dots, n\}$  der aus Bemerkung V.1.10 entsteht. Zu Beginn notieren wir mit  $V(z_i) \in \{1, 2\}$  die Anzahl der Kanten zwischen zwei Komponenten  $c_i$  und  $c_{i+1}$ , für  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Gilt  $V(z_i) = 1$  so setzen wir  $s_{n+i} = 1$ , ansonsten setzen wir  $s_{n+i} = 0$ . Des Weiteren setzen wir die restlichen vertikalen Einträge  $s_{n+k+1}, \dots, s_{2n} = s_{n+k}$ . Dadurch und indem wir alle anderen Einträge oberhalb der  $k$ -ten Linie auf Null setzen, liegen dort keine Singularitäten. Somit können wir den  $k$ -ten Zylinder in horizontale Richtung bis an die obere Kante des Quadrates ausdehnen. Dadurch sind die ersten  $k - 1$  Zylinder ein Kästchen hoch und der  $k$ -te Zylinder ist  $n - k$  Kästchen hoch. Die entsprechenden Komponenten liegen zwischen den definierten Zylindermitten und sind entsprechend durch  $V(z_i)$  Kanten verbunden. Dadurch erhalten wir bereits den gewünschten Graphen. Die Geschlechter der einzelnen Komponenten bestimmen nun die restlichen Einträge des Vektors. Da durch die Zylinderstruktur die Einträge  $s_{n+1}, \dots, s_{2n}$  bereits gegeben sind, müssen nur noch die Einträge  $s_1, \dots, s_n$  durch die erste Komponente und die Einträge  $s_{2n+1}, \dots, s_{n^2+1}$  durch die restlichen Komponenten bestimmt werden. Nach der Konstruktion der Zylinder schließt die Komponente  $c_i$  die Eckpunkte, die auf der  $i$ -ten Linie liegen, ein. Im ersten Teil des Beweises haben wir insbesondere gezeigt, dass das Geschlecht der Komponenten nur von einer beliebigen eingeschlossenen Linie von Eckpunkten und der Verzweigung an den begrenzenden Zylindern abhängt. Eine Bestimmung der Einträge für das Geschlecht von  $c_i$  kann also lokal durch die

Schlitzte  $s_{i_j}$  auf dieser Linie erfolgen. Habe die Komponente  $c_i$  in  $\Gamma$  Geschlecht  $\tilde{g}$  und sei o.B.d.A  $n$  gerade.

Fall 1: Die Ecke  $c_i$  hat die lokale Struktur von Fall 1 und  $\tilde{g}$  liegt zwischen  $\min(g)$  und  $\max(g)$ . Hierbei liefert:

$$[s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}] = \underbrace{[1, 0, 1 \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0]}_{\text{genau } \tilde{g} \text{ Einsen}}$$

dass genau über den Punkten  $x_{i,1}, \dots, x_{i,2\tilde{g}}$  verzweigt wird. Somit gilt:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + 2\tilde{g}(2 - 1) + (2 - 1) + (2 - 1) \\ g &= \tilde{g} \end{aligned}$$

Fall 2: Für Fall 2 konfigurieren wir den Vektor mit

$$[s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}] = \underbrace{[1, 0, 1 \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0]}_{\text{genau } \tilde{g}+1 \text{ Einsen}}$$

Hierdurch sind sind die Punkte  $x_{i,1}, \dots, x_{i,2\tilde{g}+2}$  Verzweigungspunkte. Dies liefert als Geschlecht:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (2\tilde{g} + 2)(2 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \tilde{g} \end{aligned}$$

Fall 3: Indem wir den Vektor wie folgt wählen

$$[s_{i_1}, \dots, s_{i_{n-1}}] = \underbrace{[0, 1, 0 \dots, 1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0]}_{\text{genau } \tilde{g} \text{ Einsen}}$$

liegt an Punkt  $x_{i,1}$  nur ein Schlitz an, somit verzweigen die Punkte  $x_{i,1}, \dots, x_{i,2\tilde{g}+1}$  und für das Geschlecht von  $c_i$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= -4 + \sum_{i=1}^n (e_{x_{i,j}} - 1) + (e_{z_i^*} - 1) + (e_{z_{i+1}^*} - 1) \\ 2g - 2 &= -4 + (2\tilde{g} + 1)(2 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) \\ g &= \tilde{g} \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, wie sich für die Geschlechter der Komponenten die Einträge der Vektoren berechnen lassen. Aus dem so konstruierten Vektor, lässt sich das Origami bestimmen. Somit sind die auftretenden Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$  klassifiziert.  $\square$



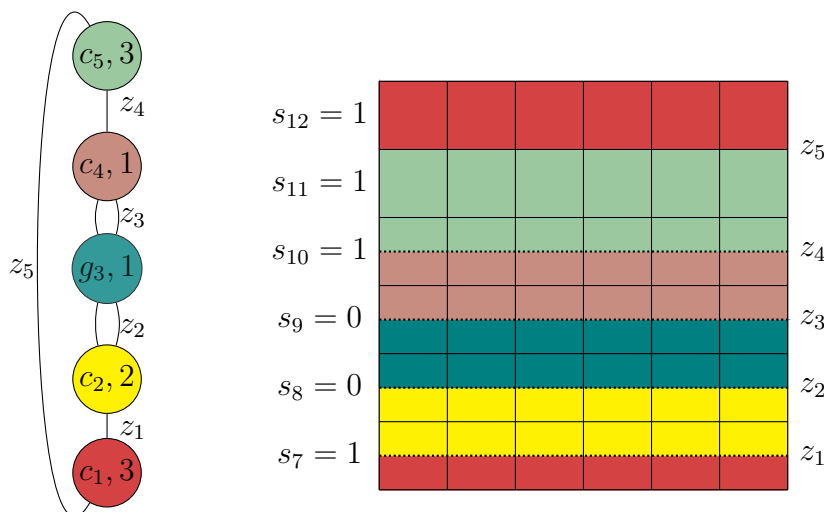


Abbildung V.5.: Der gegebene Graph  $\Gamma$  und  $T_n$  auf dem wir die entsprechenden Komponenten zwischen den Zylindermitten koloriert und die Schlitzzeilen eingetragen haben.

**Beispiel V.1.15:** Wir wollen diese Konstruktion nun an Hand eines Beispiels durchführen. Sei hierfür  $n = 6$  und der Graph aus Abbildung V.5 gegeben.

Wie in Abbildung V.5 erkennen, haben die ersten vier Zylinder die Höhe 1 und der fünfte Zylinder hat Höhe 2. Die Vielfachheiten führen zu den folgenden vertikalen Schlitzzeilen:

$$\begin{aligned} V(z_1) = 1 &\Rightarrow s_7 = 1, & V(z_2) = 2 &\Rightarrow s_8 = 0, & V(z_3) = 2 &\Rightarrow s_9 = 0, \\ V(z_4) = 1 &\Rightarrow s_{10} = 1, & V(z_5) = 1 &\Rightarrow s_{11} = 1 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die restlichen Einträge:

$c_1$ : Wir befinden uns in Fall 1 von Satz V.1.14, somit liefert

$$[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6] = [1, 0, 1, 0, 1, 0]$$

das gewünschte Geschlecht.

$c_2$ : Mit einer eingehenden und zwei ausgehenden Kanten fällt die zweite Komponente unter Fall 3 und somit besetzen wir den Vektor mit:

$$[s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}] = [0, 1, 0, 1, 0]$$

$c_3$ : Da  $c_3$  unter Fall 2 fällt, ergibt sich für  $v$ :

$$[s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}] = [1, 0, 1, 0, 0]$$

$c_4$ : Die vierte Komponente fällt wieder unter Fall 3 und dadurch sind die Einträge gegeben durch:

$$[s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}, s_{27}] = [1, 0, 1, 0, 0]$$

$c_5$ : Die fünfte Komponente fällt wieder unter Fall 1 und dadurch ist

$$[\dots, s_{28}, s_{29}, s_{30}, s_{31}, s_{32}, \dots] = [1, 0, 1, 0, 1].$$

Da der letzte Zylinder Höhe 2 hat, wird die restliche Linie mit Nullen aufgefüllt. Es ist also:

$$[s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}, s_{37}] = [0, 0, 0, 0, 0]$$

Somit sind alle Einträge bestimmt und es ergibt sich der Folgende Vektor:

$$v = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

Dieser Vektor beschreibt das Origami, gegeben durch die horizontale Permutation:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (1, 2, 3, 4, 5, 6, 37, 38, 39, 40, 41, 42)(7, 8, 9, 10, 11, 12)(43, 44, 45, 46, 47, 48) \\ & (49, 50, 51, 52, 53, 54)(13, 14, 15, 16, 17, 18) \\ & (19, 20, 21, 22, 23, 24, 55, 56, 57, 58, 59, 60) \\ & (25, 26, 27, 28, 29, 30, 61, 62, 63, 64, 65, 66) \\ & (31, 32, 33, 34, 35, 36, 67, 68, 69, 70, 71, 72) \end{aligned}$$

und durch die vertikale Permutation:

$$\begin{aligned} \sigma_y = & (1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67)(2, 8, 14, 20, 26, 32) \\ & (38, 44, 50, 56, 62, 68)(3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69) \\ & (4, 10, 16, 22, 28, 34)(40, 46, 52, 58, 64, 70) \\ & (5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71)(6, 12, 18, 24, 30, 36) \\ & (42, 48, 54, 60, 66, 72). \end{aligned}$$

## 2. Verallgemeinerung auf $\mathcal{O}_n^p$

Wir wollen nun die Ergebnisse für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^2$  auf Origamis  $O$  aus  $\mathcal{O}_n^p$ , wobei  $p$  prim ist, verallgemeinern. Für jedes Element  $a$  aus  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ist die Ordnung entweder 1 oder  $p$ . Betrachten wir nun einen vertikalen Schlitz  $s_i \in \mathbb{F}_p$  und ist  $s_i = 0$ , so gilt  $V(z_i) = p$  und für  $s_i \neq 0$  ist  $V(z_i) = 1$ . Dies bedeutet für unseren Graphen, dass zwischen zwei Komponenten entweder eine oder  $p$  Kanten vorkommen können. Also beschreibt Bemerkung V.1.10 auch die Struktur der Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^p$  und wir erhalten Graphen der folgenden Form:

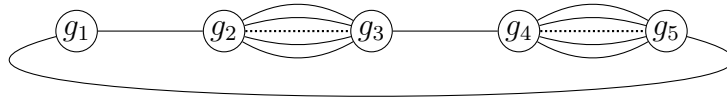


Abbildung V.6.: Der stabile Graph eines Origami aus  $\mathcal{O}_n^p$

Wir wollen wieder die Verzweigungsdaten eines Origamis bestimmen und das Ergebnis aus Bemerkung V.1.1 verallgemeinern. Hierfür betrachten wir Schleifen entgegen dem Uhrzeigersinn um die Eckpunkte. (Siehe [Rog22, Schleifenbasis, Seite 14])) Dazu ist es notwendig, nach der Anzahl der angrenzenden Schlitzte zu unterscheiden. (Siehe Abbildung V.1)

- Für  $x_{1,1}$  gibt

$$l_{1,1} := (-s_{n+1} - s_n + s_{2n} + s_1) \pmod{p}$$

an, um wie viele Kopien durch ein Umrunden des Punktes gewechselt wird.

- Für Punkte  $x_{i,1}$  mit  $i \in \{2, \dots, n\}$  wird dies durch

$$l_{i,1} := (-s_{n+i} + s_{n+i-1} + s_{i_1}) \pmod{p}$$

angegeben.

- Für die Punkte mit zwei anliegenden Schlitzten  $x_{i,j}$ , wobei  $i \in 1, \dots, n$  und  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ , gilt:

$$l_{i,j} := \begin{cases} (-s_{i_{j-1}} + s_{i_j}) \pmod{p}, & \text{falls } i > 1 \\ (-s_{j-1} + s_j) \pmod{p}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für die restlichen Punkte  $x_{i_{n-1}}$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird dies durch

$$l_{i_{n-1}} := s_{i_{n-1}}$$

angegeben.

In [Rog22, Proposition IV.2.3] werden die entsprechenden Verzweigungsdaten berechnet.

**Proposition V.2.1:** *Seien die  $l_{i,j}$  definiert wie oben und  $\text{ord}(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  bezeichne die Ordnung von  $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Dann gilt:*

$$e_{x_{i,j}} = \text{ord}(l_{i,j}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

**Beweis:** [Rog22, Proposition IV.2.3] □

**Bemerkung V.2.2:** Da in dem Beweis von Satz V.1.14 lediglich die Fälle mit eine, zwei oder drei angrenzenden Schlitzten vorkommen, können wir für diese ausrechnen wann der Verzweigungsindex gleich  $p$  ist.

- Für einen Punkt  $x_{1,j}$  mit drei angrenzenden Schlitzten, liefert eine Belegung der Schlitzte durch  $s_{n+i} = s_{n+i-1} = s_{i_1} = 1$  den Verzweigungsindex  $e_{x_{1,j}} = p$ .
- Ein Eckpunkt mit zwei angrenzenden Schlitzten hat  $e_{x_{i,j}} = p$ , wenn die Schlitzte alternierend Null oder Eins sind.
- Ein Punkt mit nur einem angrenzendem Schlitz ist genau dann unverzweigt, wenn an dem Schlitz nicht die Kopie gewechselt wird.

Wir erkennen also, dass wir die Konstruktion der Vektoren aus dem Beweis von Satz V.1.14 genau übertragen können. Des Weiteren gilt für den Satz von Riemann Hurwitz mit Proposition V.1.11:

**Proposition V.2.3:** *Sei  $c_i$  die Komponente, die die Eckpunkte  $x_{i,1} \dots, x_{i,n}$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  umschließt und von den Zylindermitten  $z_i$  und  $z_{i+1}$  umrandet wird. Des Weiteren ist  $p|_{c_i} \rightarrow \hat{c}_i$  die eingeschränkte,  $p$ -blättrige Überlagerung auf  $c_i$ . Die somit ergibt sich für das Geschlecht von  $c_i$ :*

$$2g - 2 = -2p + \sum_{k=i}^j (e_{x,k} - 1) + (e_{z_i} - 1) + (e_{z_{i+1}} - 1)$$

**Satz V.2.4:** *Für ein Origami aus  $\mathcal{O}_n^p$  treten für die drei Fälle aus Bemerkung V.1.10 die folgenden Minima und Maxima bei den Geschlechtern  $g$  der Komponenten auf:*

- Für Fall 1 und ist  $n$  gerade, gilt:

$$\max(g) = \frac{n(p-1)}{2} \quad \text{und} \quad \min(g) = p-1$$

- Für Fall 1 und falls  $n$  ungerade ist, gilt:

$$\max(g) = \frac{(n-1)(p-1)}{2} \quad \text{und} \quad \min(g) = p-1$$

- Für Fall 2 und ist  $n$  gerade, gilt:

$$\max(g) = \frac{n(p-1)}{2} - p + 1 \quad \text{und} \quad \min(g) = 0$$

- Für Fall 2 und falls  $n$  ungerade ist, gilt:

$$\max(g) = \frac{(n-3)p - (n-3)}{2} - p + 1 \quad \text{und} \quad \min(g) = 0$$

- Für Fall 3 und falls  $n$  gerade ist, gilt:

$$\max(g) = \frac{(n-2)(p-1)}{2} \quad \text{und} \quad \min(g) = 0$$

- Für Fall 3 und falls  $n$  ungerade ist, gilt:

$$\max(g) = \frac{(n-2)p - (n+2)}{2} \quad \text{und} \quad \min(g) = 0$$

Auch treten wieder alle Graphen aus Bemerkung V.1.10 mit allen möglichen Geschlechtern in den Komponenten als stabile Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^p$  auf.

**Beweis:** Wir haben in Bemerkung V.2.2 erkannt, dass wir die Vektoren für die entsprechenden Fälle genau so befüllen können, wie indem Beweis von Satz V.1.14.  $\square$

Somit haben wir die Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^p$  klassifiziert.

## Fazit

In dieser Bachelorarbeit haben wir nun in Satz V.2.4 gezeigt, welche stabilen Graphen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist, auftreten können. Es ist nun naheliegend, die Frage zu stellen, welche Graphen im Allgemeinen für Origamis aus  $\mathcal{O}_n^d$  auftreten können. Betrachten wir hierfür exemplarisch einen Zylinder, der von einem vertikalen Schlitz  $s_i$  begrenzt wird. Liften wir nun den Zylinder entlang von  $p$  auf  $X$ , so kann er in Abhängigkeit von  $s_i$ , in Bahnen zerfallen. Dies kann dort auch mit den Komponenten geschehen. Es ist also eine Herausforderung, die entsprechenden Zylindermitten den Komponenten zuzuordnen.

Auch wäre es erkenntnisreich, die auftretenden Dessins d'enfants zu bestimmen, da sie den Randpunkt in  $\overline{M}_g$  eindeutig beschreiben. Mit Hilfe der Techniken für Dessins d'enfants ist es eventuell möglich die explizite Gleichungen für den Randpunkt zu bestimmen.

# Literaturverzeichnis

- [Abi77] William Abikoff. Degenerating families of riemann surfaces. *The Annals of Mathematics*, 105, 1977.
- [Bau09] Oliver Bauer. *Familien von Jacobivarietäten über Origamikurven*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2009.
- [Bra01] Volker Braungardt. *Überlagerungen von Modulräumen für Kurven [online]*. PhD thesis, 2001.
- [Cap18] Lucia Caporaso. Compactifying moduli spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57(3):455–482, December 2018.
- [DM69] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, pages 75–109, January 1969.
- [Hat00] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [Her12] Frank Herrlich. Introduction to origamis in teichmüller space. In *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, pages 233–253. EMS Press, January 2012.
- [HS07] Frank Herrlich and Gabriela Schmithüsen. On the boundary of teichmueller disks in teichmueller and in schottky space. 2007.
- [HS09] Frank Herrlich and Gabriela Schmithüsen. Dessins d’enfants and origami curves. In *Handbook of Teichmüller Theory, Volume II*, pages 767–809. European Mathematical Society Publishing House, 2009.
- [IT92] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer Japan, 1992.
- [Knu83] Finn F. Knudsen. The projectivity of the moduli space of stable curves, ii: The stacks  $m$  g,n. *Mathematica Scandinavica*, 52(2):161–199, 1983.

- [M20] Martin Möller. Riemannsche flächen. <https://www.uni-frankfurt.de/68893918/riemannflaechen.pdf>, 2020. abgerufen am: 06.03.2023.
- [MM68] Barry Mitchell and William S. Massey. Algebraic topology: An introduction. *The American Mathematical Monthly*, 1968.
- [Ran16] Anja Randecker. Geometry and topology of wild translation surfaces, 2016.
- [Rog22] Alexander Rogovskyy. Origamis, die zyklisch über dem  $n \times n$ -torus faktorisieren. <https://www.math.uni-sb.de/ag/weitze/images/Abschlussarbeiten/BARogovskyy.pdf>, 2022. Bachelorarbeit, abgerufen am: 06.03.2023.
- [Sch05] Gabriela Schmithüsen. *Vechgroups of Origamis*. PhD thesis, 2005.