

### 3.4 Komplexe Zahlen

#### Bemerkung

1. Man kann die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  relativ schnell auf algebraischen Wege einführen.  $\mathbb{C}$  ist der **kleinsten Erweiterungskörper** der reellen Zahlen, in dem  $-1$  ein Quadrat ist, d.h. die Gleichung  $\xi^2 + 1 = 0$  ist lösbar. Es gibt also eine Zahl  $i \in \mathbb{C}$  mit  $i^2 = -1$ .

Man erhält diesen Erweiterungskörper, als Quotient des Polynomrings  $\mathbb{R}[\xi]$  nach dem maximalen Ideal  $(\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi]$  (A. L. CAUCHY 1847).

Die Bildung des Quotientenringes bedeutet, daß zwei Polynome in derselben Klasse liegen, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von  $\xi^2 + 1$  ist. Die Klasse eines Polynoms  $P(\xi)$  ist also die Menge

$$P(\xi) + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi].$$

Der Körper  $\mathbb{C}$  ist also ein zweidimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , der als den Basisvektoren die Klassen

$$1_{\mathbb{C}} := 1 + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi] \quad \text{und} \quad i := \xi + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi]$$

hat. Es gilt also

$$\mathbb{C} := \{x1 + y\xi + (\xi^2 + 1)\mathbb{R}[\xi] \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Als reeller Vektorraum ist  $\mathbb{C}$  isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

2. In der Basis  $\{1, i\}$  hat jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  die Form

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nach den Rechenregeln in einem Körper und wegen  $i^2 = -1$  gelten für Summe und das Produkt zweier komplexer Zahlen  $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ ,  $w = u \cdot 1 + v \cdot i$  die Regeln:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) \cdot 1 + (y + v) \cdot i, \\ z \cdot w &= (xu - yv) \cdot 1 + (xv + yu) \cdot i. \end{aligned}$$

Für den Kehrwert von  $z = x \cdot 1 + y \cdot i \neq 0$  findet man

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot 1 + \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot i.$$

3. In vielen Lehrbüchern wird ausgehend von diesen Formeln eine Summe und ein Produkt auf  $\mathbb{R}^2$  definiert und nachgerechnet, daß man so einen Körper erhält, indem die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  eine Lösung hat (W. R. HAMILTON 1833).

Man umgeht so die Bildung des Polynomrings  $\mathbb{R}[x]$  und die Bildung des Quotientenkörpers  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)\mathbb{R}[x]$ .

---

4. Man sieht nur diesem so konstruierten Körper nicht an, warum er für die Analysis und ihre Anwendungen in Physik und Technik so wichtig ist.

Dazu und für weiterführende mathematischen Aussagen, wie den **Hauptsatz der Algebra**, bedarf es nicht-algebraischer Hilfsmittel: die Vollständigkeit der reellen Zahlen und die Deutung der komplexen Multiplikation als **Drehung** und **Streckung** der Ebene. Letzteres geschah historisch gesehen mit Hilfe der **Eulerschen Formeln**, in denen die komplexe Multiplikation durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt wird (A. DE MOIVRE 1724, L. EULER 1748).

5. Aus dem Hauptsatz der Algebra folgt, daß die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  die einzige **endlichdimensionale Körpererweiterung** der reellen Zahlen sind.

6. Wir gehen vom Begriff der **Drehung** aus. Die Drehungen der Ebene bilden eine Gruppe, die sogenannte **Torusgruppe**  $\mathbb{T}$ , die wir zunächst einführen.

Wir konstruieren zwei isomorphe Bilder der Torusgruppe:

- (a) Als Quotientengruppe  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  der reellen Zahlen.
- (b) Als Drehungen der Ebene ist die Torusgruppe eine Untergruppe des Ringes der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen.

Als Menge identifizieren wir die Torusgruppe  $\mathbb{T}$  mit dem Einheitskreis  $S^1$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

7. Dann betrachten wir die Drehungen und Streckungen der Ebene und ihre Zusammensetzungen, die **Drehstreckungen**. Die Drehstreckungen sind die Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene, die den Ursprung festhalten und die die Orientierung erhalten.

8. **Komposition** und **Summe** von Drehstreckungen sind wieder Drehstreckungen. Sie bilden also eine Unteralgebra der reellen Algebra der  $2 \times 2$ -Matrizen. Da die **Inverse** einer Drehstreckung wieder eine Drehstreckung ist, ist diese Unteralgebra sogar ein Körper .

Wir nennen die **Menge der Drehstreckungen** den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen (J. R. ARGAND 1806).

Eine Basis bilden die identische Abbildung 1 und die Drehung um  $\pi/2$ , die mit  $i$  bezeichnet wird:

$$i := \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $i^2$  die Drehung um  $\pi$ . Diese überführt jeden Vektor  $w \in \mathbb{R}^2$  in  $-w$ , d.h.  $i^2 = -1$ .

### 3.4.1 Torusgruppe

#### Bemerkung.

1. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

ist periodisch mit der Periode  $2\pi$  (vgl. Bemerkung 3.3.14. Ihr Bild ist der gesamte Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$ ).

2. Die Einschränkung dieser Abbildung auf das Intervall  $(-\pi, \pi]$  ist eine Bijektion auf den Einheitskreis. Die Umkehrabbildung ist die Argumentfunktion (vgl. Satz 3.3.15)

$$\mathbb{S}^1 \ni (x, y) \mapsto \arg(x, y) \in (-\pi, \pi].$$

**Lemma 3.4.1** Für  $s, t \in \mathbb{R}$  sind äquivalent:

1.  $(\cos s, \sin s) = (\cos t, \sin t)$ .
2. Es gibt eine ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , so daß

$$s - t = 2\pi n.$$

**Beweis.** Aus dem Additionstheorem 3.3.18 folgt

$$\cos(s - t) = 1.$$

Da  $x \mapsto \cos x$  nach Lemma 3.3.14  $2\pi$ -periodisch ist, folgt

$$s - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

#### Bemerkung.

1. Die reellen Zahlen bilden mit der Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$ .

Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  sind eine Untergruppe von  $(\mathbb{R}, +)$ .

Eine weitere Untergruppe von  $(\mathbb{R}, +)$  sind die ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ :

$$2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Zwei reelle Zahlen  $s, t \in \mathbb{R}$  heißen **kongruent modulo  $2\pi$** , wenn es eine ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  gibt, so daß

$$t = s + 2\pi n.$$

D.h.  $s - t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

3. Für eine reelle Zahl  $s \in \mathbb{R}$  bilde man die **Äquivalenzklasse von  $s$**  :

$$[s] := \{t \mid t \in \mathbb{R}, s - t \in 2\pi\mathbb{Z}\} = s + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Ein Element  $\tilde{s} \in [s]$  heißt ein **Repräsentant** der Klasse  $[s]$ . Für einen Repräsentanten  $\tilde{s}$  gilt  $[\tilde{s}] = [s]$ .

4. Man erklärt eine Verknüpfung auf der Menge der Äquivalenzklassen durch die Vorschrift:

$$[s] + [t] := [s + t].$$

Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, d.h. die rechte Seite  $[s + t]$  ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $s \in [s]$  und  $t \in [t]$ .

5. Die Klasse  $[0] = 2\pi\mathbb{Z}$  ist das neutrale Element unter dieser Verknüpfung.  
6. Es gilt  $[s] + [-s] = [0]$ .

### Bezeichnung 3.4.2 (Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ )

Die Quotientengruppe  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ist die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} := \{[s] \mid s \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit der Verknüpfung

$$[s] + [t] := [s + t].$$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ist eine abelsche Gruppe.

### Bemerkung.

1. Auf Grund von Lemma 3.4.1 erhalten wir eine wohldefinierte Bijektion

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni [t] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{S}^1.$$

Mit Hilfe dieser Bijektion übertragen wir die Gruppenstruktur von  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  auf den Einheitskreis, so daß diese Abbildung ein Gruppenisomorphismus wird.

Die so erklärte Verknüpfung auf dem Einheitskreis schreibt man mit einem Malpunkt und nennt die so definierte abelsche Gruppe die **Torusgruppe** oder den **Torus**  $\mathbb{T}$ .

2. Für die Verknüpfung  $z \cdot w$  zweier Elemente  $z, w \in \mathbb{T}$  gilt

$$[\arg(z \cdot w)] = [\arg z] + [\arg w]$$

Die Abbildung  $\mathbb{T} \ni w \mapsto z \cdot w$  beschreibt die **Drehung** des Einheitskreises um den Winkel  $\arg z$ .

### Bezeichnung 3.4.3 (Torusgruppe $\mathbb{T}$ )

Die Torusgruppe  $\mathbb{T}$  ist der Einheitskreis versehen mit der folgenden Gruppenverknüpfung: Für  $z, w \in \mathbb{T}$  sei

$$z \cdot w := (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)),$$

wobei  $\varphi := \arg z$  und  $\psi := \arg w$  ist.

### Bemerkung 3.4.4 (Isomorphismus $\mathbb{T}$ mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ )

1. Die folgenden Abbildung sind zueinander inverse Gruppenisomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni [t] &\mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{T}, \\ \mathbb{T} \ni z &\mapsto [\arg z] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Manchmal nennt man auch die Abbildung  $z \mapsto [\arg z] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  Argumentfunktion und die Funktion  $z \mapsto \arg z \in (-\pi, \pi]$  den **Hauptzeig der Argumentfunktion**.

**Bemerkung** Man kann das Produkt in  $\mathbb{T}$  auch ohne Benutzung trigonometrischer Funktionen direkt aus den Koordinaten berechnen. Die entstehende Formel wird klarer, wenn man sie als Matrizenprodukt liest.

### Satz 3.4.5 (Produktformel in der Torusgruppe)

1. Für Das Produkt zweier Elemente  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v) \in \mathbb{T}$  gilt

$$z \cdot w = (xu - yv, xv + yu).$$

2. Bezüglich der Standardbasis beschreibt die Formel 1. die Wirkung einer Matrix auf einen Spaltenvektor:

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

**Beweis (Produktformel in der Torusgruppe).**

1. Der Beweis der Formel folgt aus dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen 3.3.18. Es sei

$$\varphi := \arg z, \quad \psi := \arg w.$$

Nach Definition des Produktes 3.4.3 gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)) \\ &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &= (xu - yv, yu + xv). \end{aligned}$$

2. Nachrechnen.

**Bemerkung** Eine reelle  $n \times n$ -Matrix  $A$  heißt **orthonormal**, wenn die transponierte  $A^t = A^{-1}$  ist. Dann ist  $\det(A) \in \{1, -1\}$ .

Die **spezielle orthonormale Gruppe**  $SO(n)$  besteht aus allen orthonormalen  $n \times n$ -Matrizen  $A$  mit  $\det(A) = 1$ . Die Elemente von  $SO(n)$  heißen **Drehungen**.

**Korollar 3.4.6 (Spezielle orthonormale Gruppe  $SO(2)$ )** Die Torusgruppe ist isomorph zu der Gruppe  $SO(2)$ . Der Isomorphismus wird durch die folgende Abbildung gegeben:

$$\mathbb{T} \ni z = (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in SO(2).$$

**Beweis.** Man rechnet leicht nach, daß die angegebene Abbildung

$$\mathbb{T} \ni z = (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in SO(2).$$

ein Gruppenisomorphismus von  $\mathbb{T}$  in  $SO(2)$  ist.

Es ist zu zeigen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Da  $\det A = x^2 + y^2 = 1$  ist, folgt aus der Kramerschen Regel:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit der Transponierten  $A^t$  so folgt

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### 3.4.2 Konstruktion der komplexen Zahlen

#### Bemerkung 3.4.7 (Drehstreckungen)

1. Ein positives Vielfaches  $C = rZ$  einer Drehung  $Z \in SO(2)$  mit einem reellen Faktor  $r > 0$  heißt eine **Drehstreckung**. Also sind alle reellen  $2 \times 2$ -Matrizen der Form

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit  $r = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  Drehstreckungen (vgl. Korr. 3.4.6).

2. Sind  $C = rZ, D = \rho W$  mit  $Z, W \in SO(2)$  und  $r, \rho \in (0, \infty)$  Drehstreckungen, so ist auch ihr Produkt:

$$C \cdot D = r\rho Z \cdot W$$

und die Inverse eine Drehstreckung:

$$C^{-1} = r^{-1}Z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

3. Mit zwei Drehstreckung  $C, D$  und  $C \neq -D$  ist auch die Summe  $C + D$  eine Drehstreckung, da diese Matrix wieder die Form

$$C + D = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

hat.

Für eine reelle Zahl  $\lambda \neq 0$  ist  $\lambda C$  eine Drehstreckung.

4. Nimmt man zu den Drehstreckungen noch die Nullmatrix hinzu, so erhält man eine unital **Unteralgebra**  $\mathbb{C}$  der Algebra der reellen  $2 \times 2$ -Matrizen. Nach 2. enthält die Algebra  $\mathbb{C}$  mit jedem Element  $C \neq 0$  auch das Inverse  $C^{-1}$ . Die Algebra  $\mathbb{C}$  ist also ein **Körper**.
5. Die Matrixschreibweise für die Elemente von  $\mathbb{C}$  ist etwas aufwendig. Wir führen noch eine abkürzende Bezeichnung ein.

#### Definition 3.4.8 (Komplexe Zahlen)

1. Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  besteht aus allen reellen  $2 \times 2$ -Matrizen der Form

$$c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. Man wählt als Basis von  $\mathbb{C}$  die Einheitsmatrix 1 und die imaginäre Einheit

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist  $i^2 = -1$ .

Die Elemente von  $\mathbb{C}$  haben also die Form  $c = a \cdot 1 + b \cdot i$ . Man kürzt dies ab zu

$$c = a + ib.$$

### Bemerkung.

1. Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum. Durch die Wahl der festen Basis  $\{1, i\}$  ist  $\mathbb{C}$  als Vektorraum isomorph zu dem Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ .
2. Entsprechend zur Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden, stellt man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene dar. Man spricht von der **komplexen Ebene** oder **Gaußschen Ebene**.

Man wählt in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem mit einer waagerechten  $x$ -Achse und einer senkrechten  $y$ -Achse.

Eine komplexe Zahl  $c = a + ib$  wird dann durch den Punkt mit den Koordinaten  $(a, b)$  oder einen Vektor mit den Koordinaten  $(a, b)$  dargestellt.

### Satz 3.4.9 (Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ )

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$$

ist ein Körperisomorphismus. D.h. die den reellen Zahlen entsprechenden komplexen Zahlen werden genauso addiert und multipliziert wie die reellen Zahlen. Sie bilden einen zu  $\mathbb{R}$  isomorphen Unterkörper von  $\mathbb{C}$ .

### Bezeichnung 3.4.10 ( $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ )

Die komplexen Zahlen der Form  $z = x \cdot 1 + 0 \cdot i$  heißen **reell**. Man schreibt kurz  $x$  und betrachtet von nun an die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**Bemerkung** Auf  $\mathbb{C}$  gibt es **keine Ordnung**, die den Axiomen eines geordneten Körpers 1.1.5 genügt.

In einem geordneten Körper sind Quadrate immer positiv (vgl. 1.1.6(1)). Es ist

$$1 = 1^2 \quad \text{und} \quad -1 = i^2.$$

Gäbe es eine solche Ordnung, so wären im Widerspruch zum Ordnungsaxiom sowohl 1 als auch  $-1$  positiv.

**Bemerkung.**

1. Wir betrachten von nun an die komplexen Zahlen als eine Grundstruktur der Mathematik und nehmen auf ihre Konstruktion nur noch ganz selten Bezug.
2. Die reellen Zahlen fassen wir als einen Unterkörper  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  der komplexen Zahlen auf.
3. Wir schreiben die komplexen Zahlen  $z$  nicht als Matrizen sondern in der Form

$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Natürlich ist  $x + iy = x + yi$ . Man schreibt aber den Faktor  $i$  meistens zuerst. So sind Realteil und Imaginärteil optisch schneller zu erkennen.

4. Die Torusgruppe fassen wir als eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  auf:

$$\mathbb{T} := \{z \mid z = x + iy \in \mathbb{C}^*, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Die Torusgruppe ist also der Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$  mit der komplexen Multiplikation.

Wir schreiben  $\mathbb{T}$ , wenn wir die Gruppenstruktur betonen wollen, ansonsten  $\mathbb{S}^1$ .

**Bezeichnung 3.4.11 (Realteil, Imaginärteil)**

Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  heißen die reellen Zahlen  $x, y$  **Realteil** von  $z$  bzw. **Imaginärteil** von  $z$ .

Die Abbildungen Real- und Imaginärteil sind reell linear:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & z = x + iy &\mapsto \operatorname{Re} z := x, \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & z = x + iy &\mapsto \operatorname{Im} z := y. \end{aligned}$$

Geometrisch sind die Abbildungen  $z \mapsto \operatorname{Re} z$  bzw.  $z \mapsto \operatorname{Im} z$  die orthogonalen Projektionen der Ebene auf die Koordinatenachsen.

Für eine komplexe Zahl  $z$  gilt

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

**Bemerkung.**

1. Dem Transponieren von Matrizen entspricht die **Konjugation** komplexer Zahlen.
2. Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat zwei Nullstellen  $i$  und  $-i$ . Algebraisch gesehen, ist  $\mathbb{C}$  der kleinste Oberkörper von  $\mathbb{R}$ , der diese Nullstellen enthält. **Konjugation** entsteht durch Vertauschen dieser beiden Nullstellen.
3. Geometrisch handelt es sich bei der Konjugation um die Spiegelung an der reellen Achse.

**Bezeichnung 3.4.12 (Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$ )**

Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  setzt man

$$\bar{z} = x - iy.$$

$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$  heißt die **konjugiert komplexe Zahl** zu  $z$ .

**Feststellung 3.4.13 (Rechenregeln: Konjugation)**

Für die Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln:

1.  $\overline{\bar{z}} = z,$
2.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
3.  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w,$
4.  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$
5.  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
6.  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  ist reell und  $z\bar{z} \geq 0.$
7. Für  $z \neq 0$  ist

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

**Bemerkung.** Die Regeln 1-3 besagen, daß die Konjugation ein **involutorischer Körperisomorphismus** von  $\mathbb{C}$  ist.

**Bezeichnung 3.4.14 (Der absolute Betrag  $|z|$ )**

Es sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Die nichtnegative Zahl

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der (**absolute**) **Betrag** der komplexen Zahl  $z$ .

**Bemerkung.**

1. Der Betrag von  $z$  ist der **euklidische Abstand** des Punktes mit den Koordinaten  $(x, y)$  vom Ursprung.
2. Für reelle  $x$  ist  $|x| = \max\{x, -x\}$ . Die Definition 1.1.14 des Betrages in  $\mathbb{R}$  mit Hilfe der Ordnung und der Betrag in  $\mathbb{C}$  ergeben dasselbe Resultat.
3.  $|z|^2$  ist zugleich die **Determinante** der Drehstreckung

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

**Feststellung 3.4.15 (Rechenregeln: Betrag)**

Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten:

1.  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ,
2.  $|zw| = |z||w|$  (multiplikativ),
3.  $|\bar{z}| = |z|$ ,
4. Für  $w \neq 0$  gilt  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ .
5.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ,
6.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung),

**Korollar 3.4.16** Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

**Beweis (Rechenregeln: Betrag).**

Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$ , dann folgt:

1. klar.
2.  $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2|w|^2$ .
3.  $|\bar{z}|^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ .

4. Für  $w \neq 0$  gilt  $\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z\bar{z}}{w\bar{w}} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2$ .
5.  $|\operatorname{Re} z| = |x| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im} z| = |y| \leq |z|$ ,
6.  $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} + |w|^2$   
 $\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$ .

**Bemerkung.** Das Korollar folgt aus der Dreiecksungleichung.

---

### 3.4.3 Tangens und Arcus-Tangens

#### Beispiele 3.4.17 (Gebrochen lineare Funktionen)

- $\mathbf{D} := \{z \mid |z| < 1\}$  heißt **offene Einheitskreisscheibe**,  
 $\overline{\mathbf{D}} := \{z \mid |z| \leq 1\}$  heißt **abgeschlossene Einheitskr.**
- Es sei  $c \in \mathbb{C}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |c| < 1 &\Leftrightarrow \{z \mid |z - c| \leq |1 - \bar{c}z|\} = \mathbf{D} \\ |c| = 1 &\Leftrightarrow \{z \mid |z - c| \leq |1 - \bar{c}z|\} = \mathbb{C} \\ |c| > 1 &\Leftrightarrow \{z \mid |z - c| \leq |1 - \bar{c}z|\} = \mathbb{C} \setminus \mathbf{D} \end{aligned}$$

- Wenn  $c \in \mathbb{C}$  und  $|c| < 1$ , dann bildet die Abbildung

$$\mathbf{D} \ni z \mapsto \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \in \mathbf{D}$$

die offene Einheitskreisscheibe  $\mathbf{D}$  bijektiv auf sich ab.

Dieselbe Abbildung bildet auch  $\mathbb{S}^1$  bijektiv auf sich ab.

---

#### Beispiele 3.4.18 ( $f$ : Obere Halbebene $\rightarrow$ Kreisscheibe)

- Die Menge  $\mathbf{H} := \{z \mid z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$  heißt die **obere Halbene**. Wenn  $\operatorname{Im} c > 0$  ist, so gilt (Zeichnung!)

$$\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z - c| < |z - \bar{c}|\} = \mathbf{H}.$$

- Es sei  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Im} c > 0$  und  $w_0 \in \mathbb{S}^1$ . Die Funktion

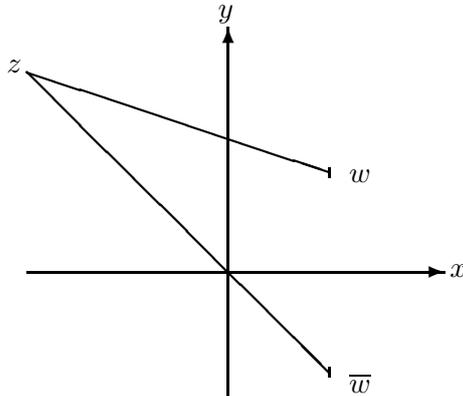
$$\mathbb{C} \setminus \{\bar{c}\} \ni z \mapsto w := w_0 \frac{z - c}{z - \bar{c}} \in \mathbb{C}$$

- bildet die obere Halbebene  $\mathbf{H}$  bijektiv auf die offene Kreisscheibe  $\mathbf{D}$  ab.

- bildet die reelle Achse bijektiv auf  $\mathbb{S}^1 \setminus \{w_0\}$  ab.

Anschaulich gilt für  $x$  auf der reellen Achse:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_0 \frac{x - c}{z - \bar{c}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_0 \frac{x - c}{x - \bar{c}} = w_0.$$



Wenn  $z$  und  $w$  in der oberen Halbebene liegen, ist der Abstand von  $z$  zu  $w$  kürzer als der Abstand von  $z$  zu  $\bar{w}$ .

**Beweis.** Da  $v := \text{Im } w > 0$  ist, gilt für  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} 0 &< |z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 = -2 \text{Re } zw + 2 \text{Re } z\bar{w} \\ &= -2 \text{Re } z(w - \bar{w}) = 4yv \\ \Leftrightarrow 0 &< y \quad \Leftrightarrow z \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

**Beispiele 3.4.19 (Rationale Parametrisierung von  $\mathbb{S}^1$ )**

1. Die Funktion (Cayley-Transformation)

$$\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \ni w \mapsto z := \frac{i - w}{i + w} \in \bar{\mathbf{D}}$$

bildet die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  bijektiv auf die offene Kreisscheibe  $\mathbf{D}$  und die reelle Achse  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$  ab.

w	0	1	-1	i	(0, ∞)	(-∞, 0)	±∞
z	1	i	-i	0	oberer Halbkreis	unterer Halbkreis	-1

2. Man hat eine **rationale Parametrisierung** der Kreislinie

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + i \frac{2u}{1 + u^2} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}.$$

3. Die Umkehrfunktion ist

$$\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \ni x + iy \mapsto u := \frac{y}{1 + x} \in \mathbb{R}.$$

---

**Bemerkung (Tangens und Arcus-Tangens).**

1. Die rationale Parametrisierung des Einheitskreises aus Beispiel 3.4.19 hängt eng mit der trigonometrischen Funktion  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni \varphi \mapsto \tan \varphi \in \mathbb{R}$  und ihrer Umkehrfunktion  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  zusammen.
2. Im Schulunterricht setzt man für  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

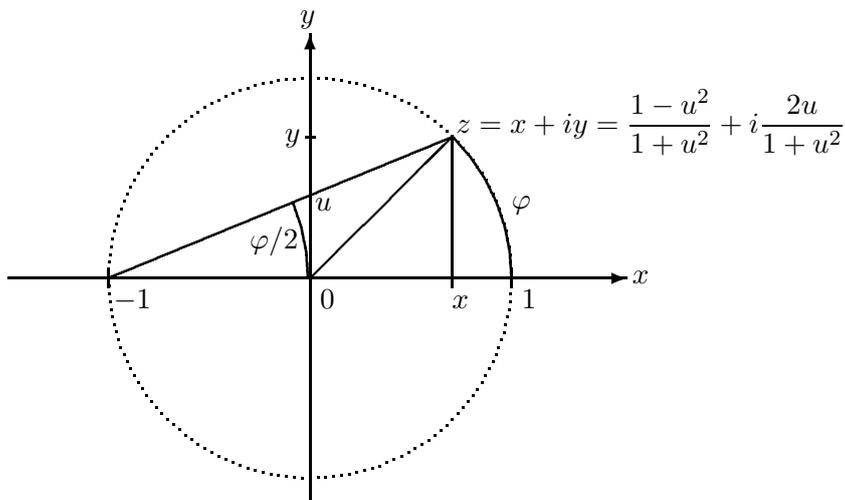
$$\tan \varphi := \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \Rightarrow \quad (\tan \varphi)' = 1 + (\tan \varphi)^2.$$

Die Funktion  $\varphi \mapsto \tan \varphi$  ist streng monoton wachsend. Ihre Bildmenge ist ganz  $\mathbb{R}$ .

3. Die Umkehrfunktion wird mit  $u \mapsto \arctan u$  bezeichnet und hat die Ableitung

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1 + u^2}.$$

---

**Rationale Parametrisierung des Einheitskreises:**


Es sei  $\varphi := \arg z$ . Die Gerade durch  $-1$  und  $z$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkte

$$u = \frac{y}{1+x} = \tan \frac{\varphi}{2}.$$

---

**Bemerkung**

1. Wir definieren zunächst die Funktion  $u \mapsto \arctan u$  als Stammfunktion und  $\varphi \mapsto \tan \varphi$  als Umkehrfunktion.

2. Im folgenden Beispiel 3.4.21 zeigen wir dann, daß die so definierten Funktionen die aus der Schule bekannten Eigenschaften haben. Man vergleiche dazu auch die vorangehende Zeichnung.

**Bezeichnung 3.4.20 (arctan  $u$  und  $\tan \varphi$ )**

1. Wir nennen die folgende Stammfunktion **Arcus-Tangens**:

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \arctan u := \int_0^u \frac{dt}{1+t^2}.$$

Arcus-Tangens ist streng monoton wachsend.

2. Die Umkehrfunktion heißt **Tangens**:  $\varphi \mapsto \tan \varphi$ .

**Beispiele 3.4.21 (Kreisparametrisierung mit  $\tan \frac{\varphi}{2}$ )**

1. Wir berechnen für einen Punkt auf dem oberen Halbkreis mit der Parametrisierung 3.4.19 und dem Parameter  $u \in (0, \infty)$  das Argument  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ .

Nach Feststellung 3.3.28 gilt für das Argument

$$\varphi := \arg \left( \frac{i-u}{i+u} \right) = \int_{\frac{1-u^2}{1+u^2}}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Mit der Substitution  $(0, \infty) \ni t \mapsto \xi \in (-1, 1)$

$$\xi := \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\xi = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt$$

und der Definition der Funktion  $\arctan$  erhält man

$$\varphi := \arg \left( \frac{i-u}{i+u} \right) = 2 \int_0^u \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan u.$$

2. Eine analoge Rechnung zeigt, daß dieselbe Beziehung auch für den unteren Halbkreis gilt (vgl. Korollar 3.3.30).

3. Die Bildmenge der Funktion Arcus-Tangens ist das Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

4. Aus  $u = \tan \frac{\varphi}{2}$  erhalten wir die Parametrisierung des Kreises  $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ :

$$(-\pi, \pi) \ni \varphi \mapsto \frac{1 - (\tan \frac{\varphi}{2})^2}{1 + (\tan \frac{\varphi}{2})^2} + i \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 + (\tan \frac{\varphi}{2})^2}$$

5. Da  $\varphi$  das Argument des Bildpunktes ist, erhalten wir durch Vergleich mit  $\varphi \mapsto \cos \varphi + i \sin \varphi$  die **Halbwinkelformeln**:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1 - \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2} \\ \sin \varphi &= \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 + \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}\end{aligned}\quad \text{für } \varphi \in (-\pi, \pi).$$

6. Wir Berechnen die Bogenlänge auf dem rechten Halbkreis

$$(-1, 1) \ni u \mapsto \frac{i - u}{i + u}.$$

Auf dem rechten Halbkreis ist  $\cos \varphi = x > 0$  und

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y}{x} = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Mit der Substitution  $(-1, 1) \ni t \mapsto s \in (-\infty, \infty)$ :

$$s = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad ds = 2 \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)^2} dt$$

folgt für die Bogenlänge:

$$\arctan \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \int_0^{\frac{2u}{1-u^2}} \frac{ds}{1+s^2} = 2 \int_0^u \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan u = \varphi.$$

**Feststellung 3.4.22 (Umrechnung:  $\sin \varphi, \cos \varphi, \tan \varphi, \tan \frac{\varphi}{2}$ )**

*Wir haben die folgenden Formeln erhalten:*

1.  $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{für } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
2.  $\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1 - \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2} \\ \sin \varphi &= \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 + \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}\end{aligned}\quad \text{für } \varphi \in (-\pi, \pi).$
3.  $\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - (\tan \varphi)^2} \quad \text{für } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
4.  $\arctan \frac{2u}{1 - u^2} = 2 \arctan u \quad \text{für } u \in (-1, 1).$

---

**Bemerkung.** Es bedeute  $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$  eine rationalen *Ausdruck* in den beiden Funktionen  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ .

**Beispiele 3.4.23 (Integration von  $\int R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ )**

1. Wendet man auf Integrale der Form

$$\int R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

die rationale Parametrisierung des Einheitskreises 3.4.19 an:

$$\varphi = 2 \arctan u, \quad d\varphi = \frac{2}{1+u^2}$$

an, so erhält man eine rationale Funktion als Integranden:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_{\tan \varphi_0/2}^{\tan \varphi_1/2} R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du.$$

2. Wir berechnen nochmal spezielle Werte des Arcus-Tangens:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan 1, \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{1}{2} \lim_{\psi \rightarrow \pi} \int_0^{\psi} d\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{du}{1+u^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t. \end{aligned}$$

Die letzte Formel schreibt man als **uneigentliches Integral**:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\varphi = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}.$$

Analog folgt

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2}.$$

Aus der ersten Formel kann man die Leibnitzreihe folgern:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

---

**Bemerkung.** Es bedeute  $R(x, \sqrt{1-x^2})$  eine rationalen *Ausdruck* in den beiden Funktionen  $x$  und  $\sqrt{1-x^2}$

**Beispiele 3.4.24 (Integration von  $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$ )**

Wendet man auf Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$$

die rationale Parametrisierung des Einheitskreises 3.4.19

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}$$

an, so erhält man eine rationale Funktion als Integranden:

$$\int_a^b R(x, \sqrt{1-x^2}) dx = \int_{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}^{\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}} R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du.$$

**Ziel:** Wir werden die bisher betrachteten Funktionen folgendermaßen zusammenfassen:

- **komplexe Exponentialfunktion:**

$$\exp z := e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

- Hauptzweig des **komplexen Logarithmus:**

$$\begin{aligned} \log w &:= \log |w| + i \arg w \\ &= \log |w| + i 2 \arctan \left( \frac{v}{|w| + u} \right) \end{aligned}$$

für  $w = u + iv$  mit  $|w| \neq -u$ .

Beispiel:  $\exp(2\pi i) = 1$  und  $i^i = e^{-\pi/2}$  (L. EULER 1728).

Zuvor betrachten wir das verwandte, aber etwas einfachere Problem der **komplexen Wurzelfunktion**.

### 3.4.4 Einheitswurzeln

#### Beispiele 3.4.25 (Quadratische Gleichungen)

Man findet die Nullstellen einer quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{C}$  durch Bildung der **quadratischen Ergänzung**:

$$z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = w^2 - c.$$

Man berechne die **beiden Wurzeln** aus  $c := 1/4(p^2 - 4q)$ :

$$w_{1,2} := \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Es folgt bekannte Formel für die beiden Nullstellen  $z_1$  und  $z_2$  einer quadratischen Gleichung:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}.$$

### Feststellung 3.4.26 (Quadratwurzel)

Es sei  $c = a + ib \in \mathbb{C}$ . Die Gleichung

$$w^2 = c$$

hat zwei Lösungen:

$$w_{1,2} := \pm \begin{cases} \sqrt{a} & \text{wenn } a > 0, b = 0, \\ \sqrt{|a|} i & \text{wenn } a < 0, b = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)} & \text{wenn } b > 0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)} & \text{wenn } b < 0. \end{cases}$$

**Bemerkung.** 1. Wir nennen die jeweilige +-Wurzel den **Hauptzweig** der Quadratwurzel. Der Hauptzweig bildet die **geschlitzte komplexe Ebene** auf die **rechte Halbebene** ab:

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \{z \mid z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$$

und  $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_- \rightarrow i\mathbb{R}_+$ .

### Beweis (Quadratwurzel).

$$\begin{aligned} w^2 &= (u + iv)^2 = c = a + ib \\ \Leftrightarrow u^2 - v^2 &= a \quad \text{und} \quad 2uv = b \end{aligned}$$

Aus  $u^2 + v^2 = |w|^2 = |c|$  folgt

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2}(|c| + a), \\ v^2 &= \frac{1}{2}(|c| - a). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)}, \\ |v| &= \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun die verschiedenen Fälle für die Vorzeichen von  $b$ , so folgt aus  $2w = b$  die behauptete Formel.

---

### Beispiele 3.4.27 (Dritte Einheitswurzeln)

Die Gleichung

$$z^3 - 1 = 0$$

hat drei Lösungen  $\zeta_0^{(3)}, \zeta_1^{(3)}, \zeta_2^{(3)} \in \mathbb{T}$ . Sie heißen die **dritten Einheitswurzeln**. Da

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

ist, sind dies die Zahlen  $\zeta_0^{(3)} = 1$  und die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung  $z^2 + z + 1 = 0$ :

$$\zeta_1^{(3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{und} \quad \zeta_2^{(3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Da

$$|1 - \zeta_1^{(3)}| = |1 - \zeta_2^{(3)}| = |\zeta_1^{(3)} - \zeta_2^{(3)}| = \sqrt{3},$$

sind die dritten Einheitswurzeln die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Es gilt  $(\zeta_1^{(3)})^2 = \zeta_2^{(3)}$  und  $\zeta_0^{(3)} + \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)} = 0$ .

---

### Beispiele 3.4.28 (Dritte Wurzel)

Aus  $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$  folgt

$$w^3 = \rho^3(\cos 3\psi + i \sin 3\psi).$$

Eine dritte Wurzel zu  $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ist der **Hauptzeig**:

$$\sqrt[3]{c} := z_0 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right).$$

Da der Quotient zweier Wurzeln eine dritte Einheitswurzel ist, gibt es zwei weitere Wurzeln:

$$z_1 := z_0 \zeta_1^{(3)} \quad \text{und} \quad z_2 := z_0 \zeta_2^{(3)}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) &= z^3 - z^2 \cdot z_0(\zeta_0^{(3)} + \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)}) \\ &\quad + z \cdot z_0^2(\zeta_0^{(3)}\zeta_1^{(3)} + \zeta_1^{(3)}\zeta_2^{(3)} + \zeta_2^{(3)}\zeta_0^{(3)}) \\ &\quad + z_0^3(\zeta_0^{(3)}\zeta_1^{(3)}\zeta_2^{(3)}) \\ &= z^3 - c. \end{aligned}$$

---

**Beispiele 3.4.29 (Kubische Gleichungen)**

Eine kubische Gleichung

$$z^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

wird durch die Transformation  $w \mapsto z := w - b/3$  auf eine kubische Gleichung ohne quadratischen Term reduziert:

$$w^3 - w\left(c - \frac{b^2}{3}\right) + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = w^3 + pw + q = 0.$$

Transformiert man nun  $v \mapsto w = v - \frac{p}{3v}$ , so erhält man eine quadratische Gleichung für die Unbekannte  $v^3$ :

$$27(v^3)^2 + 27q(v^3) - p^2 = 0$$

Diese kann man explizit lösen und dann die dritten Wurzeln aus den beiden Lösungen ziehen. Bei der Rücktransformation entstehen formal **sechs** Lösungen, von denen aber je zwei zusammenfallen.

---

**Bemerkung.** Wir wollen  **$n$ -te Wurzeln** aus komplexen Zahlen berechnen. Dazu ersetzen wir die multiplikative Gruppe  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  durch eine isomorphe Gruppe, in der sich Potenzen und Wurzeln besser berechnen lassen:

1. Jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}^*$  läßt sich eindeutig in der folgenden Form schreiben:

$$z = rw \quad \text{mit } r := |z| \in \mathbb{R}_+^*, \quad w = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}.$$

Diese Darstellung liefert einen bijektiven Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}.$$

2. Die Argumentfunktion liefert einen bijektiven Gruppenisomorphismus  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (vgl. Bemerkung 3.4.4).

- 
3. Die Polarkoordinaten (vgl. Satz 3.3.15(2.)) liefern einen bijektiven Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \\ z &\mapsto (|z|, [\arg z]) \end{aligned}$$

mit Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni (r, [\varphi]) \mapsto r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}^*.$$

4. In  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  kann man die  $n$ -ten Wurzeln in jeder Koordinate einzeln bestimmen.
5. In der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{R}_+^*$  existiert  $n$ -te Wurzeln eindeutig (vgl. Feststellung 2.2.13).

In der Gruppe  $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ist die  $n$ -te Wurzel nicht eindeutig. Deshalb betrachten wir zunächst die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**:

$$\{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{T}, \zeta^n = 1\}.$$

### Feststellung 3.4.30 ( $n$ -te Einheitswurzeln)

1. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Gleichung  $z^n = 1$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Lösungen

$$\zeta_k^{(n)} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_{n-1}^{(n)}$  heißen die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**.

2. Da

$$\zeta_k^{(n)} = (\zeta_1^{(n)})^k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

ist, bilden die  $n$ -ten Einheitswurzeln eine **zyklische Untergruppe** der Ordnung  $n$  der Torusgruppe  $\mathbb{T}$ .

$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni [k] \mapsto \zeta_k^{(n)} \in \mathbb{T}$  ist ein Gruppenisomorphismus der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}_n$  in die Torusgruppe.

**Bemerkung.** Die  $n$ -ten Einheitswurzeln bilden die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks auf dem Einheitskreis:

$$|\zeta_{k+1}^{(n)} - \zeta_k^{(n)}| = |(\zeta_1^{(n)})^k| |\zeta_1^{(n)} - 1| = |\zeta_1^{(n)} - 1|.$$

Daher heißt die Gleichung  $z^n = 1$  auch die **Kreisteilungsgleichung**.

### Beweis Einheitswurzeln.

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Da für  $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} (\zeta_k^{(n)})^n &= \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n \\ &= \cos \left( n \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( n \frac{2k\pi}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$

ist, sind die  $\zeta_k^{(n)}$  Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$ .

Gilt umgekehrt für ein  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \in \mathbb{T}$

$$1 = z^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi),$$

so ist (vgl. Lemma 3.4.1)  $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ . D. h. es gibt ein  $l \in \mathbb{Z}$  mit

$$\varphi = \frac{l2\pi}{n}.$$

Es gibt genau ein  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , so daß

$$k \equiv l \pmod{n}.$$

Also ist  $z = \zeta_k^{(n)}$ .

### Feststellung 3.4.31 (*n*-te Wurzel)

Eine *n*-te Wurzel zu  $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ist der **Hauptzweig**:

$$\sqrt[n]{c} := z_0 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

Es gibt insgesamt *n* Wurzeln. Für  $k = 0, \dots, n-1$  sind dies:

$$z_k := z_0 \zeta_k^{(n)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Es gilt

$$z^n - c = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}).$$

### Beweis (*n*-te Wurzel).

Aus  $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$  folgt

$$w^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Ist also  $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  so folgt

$$z_0^n = \sqrt[n]{r}^n \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)^n = c.$$

Da der Quotient zweier *n*-ter Wurzeln eine *n*-te Einheitswurzel ist, haben alle weiteren Einheitswurzeln die Form

$$z_k := z_0 \zeta_k^{(n)} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Die beiden normierten Polynome

$$z^n - c = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}).$$

haben die gleichen Nullstellen. Nach dem Identitätssatz 3.4.36 sind sie gleich.

**Bemerkung.** Wir betrachten Polynome über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

In der Algebra beweist man den Euklidischen Algorithmus:

**Satz 3.4.32 (Polynomdivision)**

Es seien  $P$  und  $Q \neq 0$  Polynome. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome  $\tilde{P}$  und  $R$ , so daß

$$\begin{aligned} \text{Grad}R &< \text{Grad}Q, \\ P &= \tilde{P} \cdot Q + R. \end{aligned}$$

Wenn  $R = 0$ , so heißt  $P$  durch  $Q$  **teilbar**.

**Korollar 3.4.33 (Abspalten einer Nullstelle)**

Ist  $z_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $P$ , dann gibt es eindeutig ein Polynom  $\tilde{P}$ , so daß

$$P(z) = (z - z_0)\tilde{P}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Es ist  $\text{Grad}\tilde{P} = \text{Grad}P - 1$ .

**Bezeichnung 3.4.34 (Vielfachheit einer Nullstelle)**

Es sei  $z_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $P \neq 0$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Ist  $P$  durch  $(z - z_0)^k$  teilbar und nicht durch  $(z - z_0)^{k+1}$  teilbar, so heißt  $k$  die **Vielfachheit** der Nullstelle  $z_0$ .

**Satz 3.4.35 (Anzahl Nullstellen eines Polynoms)**

1. Ein Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.
2. Sind  $z_0, \dots, z_k$  verschiedene Nullstellen von  $P$  mit den Vielfachheiten  $n_0, \dots, n_k$  so gibt es ein eindeutiges Polynom  $\tilde{P}$ , so daß

$$P(z) = (z - z_0)^{n_0} \cdots (z - z_k)^{n_k} \tilde{P}(z).$$

Es ist

$$\text{Grad}\tilde{P} = \text{Grad}P - (n_0 + \cdots + n_k).$$

**Satz 3.4.36 (Identitätssatz für Polynome)**

Stimmen die Polynome

$$\begin{aligned} P(z) &= c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0, \\ \tilde{P}(z) &= \tilde{c}_n z^n + \tilde{c}_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_0 \end{aligned}$$

an  $n + 1$  Stellen überein, so gilt

$$c_k = \tilde{c}_k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

und somit  $P = \tilde{P}$ .

**Bemerkung.** Gibt man die Werte an  $n + 1$  verschiedenen Stellen vor, so gibt es genau ein **Interpolationspolynom** vom Grade  $\leq n$ , das an diesen Stellen die vorgegebenen Werte annimmt.

### 3.4.5 Komplexe Exponentialfunktion

#### Bemerkung 3.4.37 (Komplexe Exponentialfunktion)

1. Die reelle Exponentialfunktion ist ein Gruppenisomorphismus der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{R}_+^*$ :

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathbb{R}_+^*.$$

2. Nach Bemerkung 3.4.4 gibt es den Gruppenhomomorphismus mit Kern  $2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}. \\ y &\mapsto \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

3. Man bilde aus 1. und 2. den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +) &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}, \\ (x, y) &\mapsto (\exp(x), \cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

4. Nach Definition 3.4.8 ist die additive Gruppe  $(\mathbb{C}, +)$  isomorph zu  $(\mathbb{R}^2, +) = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ .

5. Die multiplikative Gruppe  $\mathbb{C}^*$  ist isomorph zu  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{C}^*, \\ (r, \cos \psi + i \sin \psi) &\mapsto w = r \cos \psi + ir \sin \psi. \end{aligned}$$

6. Die Verknüpfung des Gruppenisomorphismus (4.), des Gruppenhomomorphismus (3.) und des Gruppenisomorphismus (5.) ergibt einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}, +) &\rightarrow (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*, \\ z = x + iy &\mapsto \exp x (\cos y + i \sin y), \end{aligned}$$

den man die **komplexe Exponentialfunktion** nennt.

Sein Kern ist  $i2\pi\mathbb{Z}$ .

#### Definition 3.4.38 (Komplexe Exponentialfunktion)

Die *komplexe Exponentialfunktion* ist:

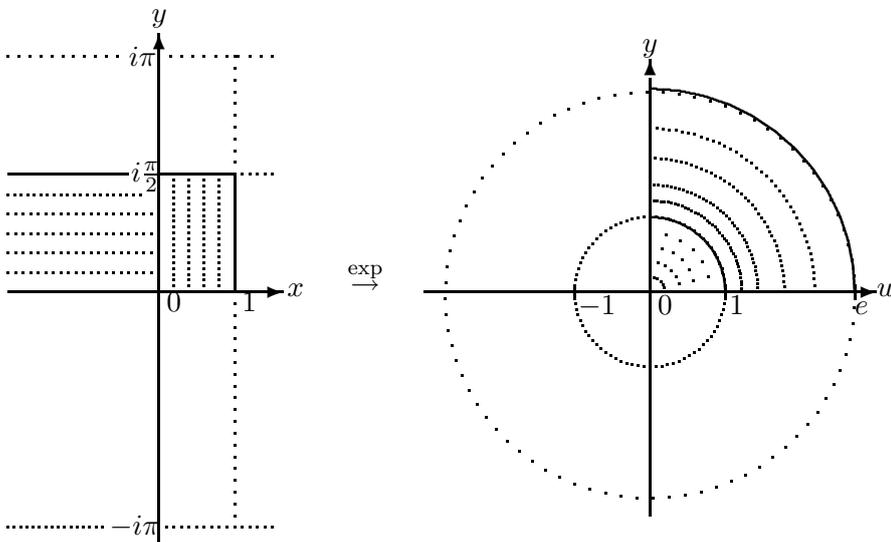
$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^*, \\ z = x + iy &\mapsto \exp z := e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

Man schreibt auch kurz  $e^z := \exp z$ .

**Feststellung 3.4.39 (Rechenregeln für  $\exp z$ )**

Für  $z = x + iy$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

1.  $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ .
2.  $\exp z = 1 \Leftrightarrow z \in i2\pi\mathbb{Z}$ .
3.  $\exp z_1 = \exp z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in i2\pi\mathbb{Z}$ .
4.  $|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x$ .
5.  $|\exp z| = 1 \Leftrightarrow x = \operatorname{Re} z = 0$ .



Wir haben die Bijektionen:

$$\begin{aligned} \exp : \{z \mid \operatorname{Im} z = b\} &\rightarrow \exp(ib)\mathbb{R}_+, \\ \exp : \{z \mid \operatorname{Re} z = a, -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\} &\rightarrow \{w \mid |w| = e^a\}. \end{aligned}$$

**Bezeichnung 3.4.40**

Die Exponentialfunktion bildet also den **Streifen**

$$\{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

bijektiv auf die **geschlitzte komplexe Ebene**

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \{z \mid \operatorname{Re} z \neq -|z|\}$$

ab. Die Umkehrfunktion

$$\log \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt der **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**.

**Bemerkung 3.4.41 (Hauptzweig von  $\log w$ )**

Für den **Hauptzweig des komplexen Logarithmus** gilt:

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- &\rightarrow \mathbb{C}, \\ w = u + iv &\mapsto \log |w| + i \arg w \\ &= \log \sqrt{u^2 + v^2} + i2 \arctan \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \\ &= \begin{cases} \arccos \frac{u}{|w|} & \text{für } \operatorname{Im} w = v > 0, \\ -\arccos \frac{u}{|w|} & \text{für } \operatorname{Im} w = v < 0, \\ \arcsin \frac{v}{|w|} & \text{für } \operatorname{Re} w = u > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

**Beweis (Hauptzweig von  $\log w$ ).**

Nach Gleichung 3.4.19(2.) und (3.) gilt für einen Punkt  $z = x + iy$  des Einheitskreises  $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ :

$$z = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + i \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{mit} \quad u = \frac{y}{1 + x}.$$

Nach Gleichung 3.4.21(1.) und (2.) gilt:

$$\arg z = 2 \arctan u.$$

Für  $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  gilt  $w/|w| \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$  ist folglich

$$\arg w = \arg \frac{w}{|w|} = 2 \arctan \frac{v}{|w| + u}.$$

Die Formeln für die obere und die untere Halbebene folgen aus Feststellung 3.3.26(1.) bzw. (2.), die Formel für die rechte Halbebene folgt aus Bemerkung 3.3.27

**Feststellung 3.4.42 (Regeln für  $\log w$ )**

1. Für  $w_1, w_2$  in der rechten Halbebene gilt  $w_1 \cdot w_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  und

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2.$$

2. Wenn  $w_1, w_2 \in$  in der gleichen Halbebene, entweder der **oberen** oder der **rechten** oder der **unteren** Halbebene liegen, gilt  $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  und

$$\log \frac{w_1}{w_2} = \log w_1 - \log w_2.$$

**Beweis (Regeln für  $\log w$ ).**

1. Nach Bemerkung 3.4.4(1.) ist

$$\arg(w_1 w_2) = \arg w_1 + \arg w_2 \pmod{2\pi}$$

Wenn  $w_1, w_2$  in der rechten Halbebene liegen, ist

$$-\frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$$

und folglich  $\arg(w_1 w_2) = \arg w_1 + \arg w_2$ .

2. Nach Bemerkung 3.4.4(1.) ist

$$\arg \frac{w_1}{w_2} = \arg w_1 - \arg w_2 \pmod{2\pi}$$

Wenn  $w_1, w_2$  in der rechten Halbebene liegen, folgt wie in (1.)  $\arg(w_1/w_2) = \arg w_1 - \arg w_2$ .

Wenn  $w_1, w_2$  beide in der oberen bzw. beide in der unteren Halbebene liegen, folgt die Behauptung auch.

**Beispiele 3.4.43 (Kompl. Logarithmen)**

1.  $\log(\pm i) = \log 1 + i \arg(\pm i) = \pm \frac{\pi}{2}$ .  
 2. Es ist  $\log(-1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{3}{4}\pi$ , aber

$$\log(-1 + i)^2 = \log(-2i) = \log 2 - i \frac{\pi}{2} \neq 2 \log(-1 + i).$$

3. Für  $|w| < 1$  liegen  $1 + w, 1 - w$  in der rechten Halbebene. Also gilt:

$$\log \frac{1+w}{1-w} = \log(1+w) - \log(1-w).$$

4. Für  $t \in \mathbb{R}$  liegt (vgl. 3.4.19(2.) und 3.4.21(1.) und (2.))

$$\frac{t+i}{t-i} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \quad \text{und} \quad \arg \frac{t+i}{t-i} = 2 \arctan t.$$

Also gilt

$$\frac{1}{2i} \log \frac{t+i}{t-i} = \arctan t.$$

**Beispiele 3.4.44 (Formeln von Moivre)**

Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

Zerlegt man die Formel in Real- und Imaginärteil, so erhält man Darstellungen von  $\cos n\varphi$  und  $\sin n\varphi$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Z.B.:

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2 = 2(\cos \varphi)^2 - 1, \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= (\cos \varphi)^3 - 3 \cos \varphi (\sin \varphi)^2 = 4(\cos \varphi)^3 - 3 \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3(\cos \varphi)^2 \cdot \sin \varphi - (\sin \varphi)^3 = 3 \sin \varphi - 4(\sin \varphi)^3.\end{aligned}$$

u.s.w

**Beispiele 3.4.45 (Trigonometrische Summenformeln)**

1. Die Summenformel für die endliche geometrische Summe gilt in jedem Körper:

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{für } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } z = 1. \end{cases}$$

Wir setzen speziell  $z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} = \begin{cases} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} & \text{für } \varphi \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{für } \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Zerlegen wir die Formel in Real- und Imaginärteil:

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} = \begin{cases} \frac{(1 - e^{i(n+1)\varphi})(1 - e^{-i\varphi})}{2(1 - \cos \varphi)} & \text{für } \varphi \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{für } \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Übung:** Mit (vgl 3.4.44)

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 1 - 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2, \\ \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

folgt für  $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos(k\varphi) &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi \cdot \cos \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}, \\ \sum_{k=0}^n \sin(k\varphi) &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi \cdot \sin \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.\end{aligned}$$

### 3.4.6 komplexwertige Funktionen

#### Bezeichnung 3.4.46 (Ableitung und Integral)

Wir definieren **ad hoc** – dies ordnet sich später in eine allgemeine Definition ein – für komplexe Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  **Stetigkeit**, **Ableitung** und **Integral**. Eine komplexe Funktion

$$f := g + ih : I \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

heiße **stetig**, bzw. **differenzierbar** bzw. **integrierbar**, wenn der Realteil  $\operatorname{Re} f = g$  und der Imaginärteil  $\operatorname{Im} f = h$  stetig, bzw. differenzierbar bzw. integrierbar sind. Dann sei

$$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t) := g'(t) + ih'(t).$$

$$\int_I f(t) dt := \int_I g(t) dt + i \int_I h(t) dt.$$

#### Bemerkung 3.4.47 (Regeln: Ableitung)

Es seien  $f_1 = g_1 + ih_1$ ,  $f_2 = g_2 + ih_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar.

1. Dann gilt für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' \quad (\text{komplex linear})$$

2. Es gilt die **Produktregel** und, wenn  $f_2 \neq 0$ , die **Quotientenregel**:

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}.$$

**Beweis (Regeln: Ableitung).** Die Regeln folgen aus den entsprechenden Regeln für reelle Funktionen.

1. Nachrechnen.
2. Die Produktformel folgt durch Nachrechnen.

Zur Quotientenregel berechne man zuerst den Spezialfall:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)' &= \left(\frac{\bar{f}}{|f|^2}\right)' = \left(\frac{g}{|f|^2}\right)' - i \left(\frac{h}{|f|^2}\right)' \\ &= \frac{g'|f|^2 - g(2gg' + 2hh')}{|f|^4} - i \frac{h'|f|^2 - h(2gg' + 2hh')}{|f|^4} \\ &= -\frac{(g'(g^2 - h^2) + h'2gh) + i(h'(g^2 - h^2) - g'2gh)}{|f|^4} \\ &= -\frac{(g' + ih')((g^2 - h^2) - i2gh)}{|f|^4} = -\frac{g' + ih'}{f^2} = -\frac{f'}{f^2}. \end{aligned}$$

Nun wende man die Produktregel an.

**Feststellung 3.4.48 ((exp f(t))' und (log f(t))')**

1. Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar. Dann gilt

$$(\exp f(t))' = \exp(f(t)) \cdot f'(t).$$

2. Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  differenzierbar. Dann gilt

$$(\log f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

**Beweis.** 1. Nach Definition der Ableitung 3.4.46 und Definition der Exponentialfunktion 3.4.38 folgt:

$$\begin{aligned} (\exp f)' &= (e^g \cos h)' + i(e^g \sin h)' \\ &= (g'e^g \cos h - h'e^g \sin h) + i(g'e^g \sin h + h'e^g \cos h) \\ &= (g' + ih')e^g(\cos h + i \sin h) = f' \exp f. \end{aligned}$$

2. Man berechne:

$$\begin{aligned} (\log |f|)' &= \frac{g'g + h'h}{g^2 + h^2} = \operatorname{Re} \frac{f'}{f}, \\ (\arg f)' &= 2 \left( \arctan \frac{h}{|f| + g} \right)' = \frac{h'g - g'h}{g^2 + h^2} = \operatorname{Im} \frac{f'}{f} \end{aligned}$$

Aus der Formel 3.4.42(1.) für den Hauptzeig der Logarithmusfunktion folgt:

$$(\log f)' = \left( \log |f| + i2 \arctan \frac{h}{|f| + g} \right)' = \frac{f'}{f}.$$

**Bemerkung 3.4.49 (Regeln: Integral)**

Es seien  $f_1 = g_1 + ih_1$ ,  $f_2 = g_2 + ih_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar.

1. Dann gilt für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$\int_I (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_I f_1 + c_2 \int_I f_2 \quad (\text{komplex linear})$$

2. Es gilt der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (vgl. Satz 3.2.22)

3. Es gilt die Regel der partiellen Integration (vgl. Satz 3.1.34)

4. Es gilt die Substitutionsformel (vgl. Satz 3.2.23)

**Bemerkung.** Die Beweise folgen aus den entsprechenden Sätzen für reelle Integrale und den Ableitungsregeln 3.4.47 für differenzierbare komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen.

### 3.4.7 Lineare DGLn. 2. Ordnung

#### Beispiele 3.4.50 (Lin. DGL 1. Ord. mit konst. Koeff.)

Gegeben sei die **lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizient**  $\lambda \in \mathbb{C}$  und stetiger rechter Seite  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f' - \lambda f = \gamma.$$

Gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die das **Anfangswertproblem** mit dem Anfangswert  $c_0 \in \mathbb{C}$  für ein festes  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$f(t_0) = c_0$$

löst. **Es gibt eine eindeutige Lösung:**

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := c_0 e^{\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau.$$

**Bemerkung.** Wenn  $\gamma$  nur auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  erklärt ist,  $t_0 \in I$ , so gilt das Ergebnis für  $t \in I$ .

#### Beweis (Lin. DGL 1. Ord. mit konst. Koeff.).

##### 1. Homogene Gleichung.

**Existenz:** Eine Lösung der **homogenen** DGL mit  $\gamma = 0$  ist:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi(t) := c_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Nach den Ableitungsregeln 3.4.48 und 3.4.47(1.) folgt

$$\psi'(t) = \lambda c_0 e^{\lambda(t-t_0)} = \lambda \psi(t).$$

**Eindeutigkeit:** Es sei  $\tilde{\psi}$  eine weitere Lösung des homogenen Anfangswertproblems. Man bilde

$$\tilde{\tilde{\psi}}(t) := e^{-\lambda(t-t_0)} \tilde{\psi}(t).$$

Aus der Produktformel 3.4.47(2.) folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\psi}}'(t) &= -\lambda e^{-\lambda(t-t_0)} \tilde{\psi}(t) + e^{-\lambda(t-t_0)} \tilde{\psi}'(t) \\ &= e^{-\lambda(t-t_0)} (\tilde{\psi}'(t) - \lambda \tilde{\psi}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\tilde{\tilde{\psi}}$  konstant und  $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t_0) e^{\lambda(t-t_0)} = \psi(t)$ .

##### 2. Inhomogene Gleichung.

**Eindeutigkeit:** Die **inhomogne** Gleichung ist eindeutig lösbar, da die homogene Gleichung zum Anfangswert  $c_0 = 0$  nur die Nulllösung hat.

**Existenz:** Wir rechnen nach, daß die angegebene Formel eine Lösung ist:

$$\begin{aligned} f(t) &:= c_0 e^{\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau \\ &= \psi(t) + e^{\lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda\tau} \gamma(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Aus der Linearität der Ableitung 3.4.47(1.), der Produktformel 3.4.47(2.) und dem Hauptsatz 3.4.49(2.) folgt

$$\begin{aligned} f'(t) &= \psi'(t) + \lambda e^{\lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda\tau} \gamma(\tau) d\tau + e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \gamma(t) \\ &= \lambda f(t) + \gamma(t). \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Nach LAGRANGE findet man eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung durch einen Ansatz, der **Variation der Konstanten** heißt:

Gegeben sei die DGL  $Lf = f' - \lambda f = \gamma$ . Die Lösung der homogenen DGL  $\psi(t) := e^{\lambda t}$  hat keine Nullstellen. Man suche eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert  $f(t_0) = 0$  in der Form

$$f(t) := C(t)\psi(t)$$

mit einer zu bestimmenden Funktion  $t \mapsto C(t)$ . Setzt man dies in die DGL ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \gamma &= Lf = C'\psi + C(\psi' - \lambda\psi) = C'\psi \quad \text{und} \quad C(t_0) = 0, \\ \Rightarrow C(t) &:= \int_{t_0}^t (\psi(\tau))^{-1} \gamma(\tau) d\tau, \\ \Rightarrow f(t) &= \psi(t) \int_{t_0}^t (\psi(\tau))^{-1} \gamma(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Man kann die Methode kürzer formulieren:

**Bemerkung 3.4.51 (Variation der Konstanten)**

Gegeben sei die DGL  $Lf = f' - \lambda f = \gamma$  und eine Lösung  $\psi$  der homogenen DGL  $L\psi = 0$ .

Da  $\psi$  keine Nullstellen hat, gibt es eine stetige Funktion  $c : t \mapsto c(t)$ , so daß

$$\gamma = \psi \cdot c.$$

Man bilde die Stammfunktion  $C$  von  $c$ :

$$C : t \mapsto \int_{t_0}^t (\psi(\tau))^{-1} \gamma(\tau) d\tau,$$

und setze

$$f = \psi \cdot C.$$

Dann folgt

$$Lf = \gamma \quad \text{und} \quad f(t_0) = 0.$$

**Beweis.** Nach Definition ist

$$\begin{aligned} f(t) &= \psi(t) \cdot \int_{t_0}^t (\psi(\tau))^{-1} \gamma(\tau) d\tau = \psi(t) \cdot C(t), \\ f'(t) &= \psi'(t) \cdot \int_{t_0}^t (\psi(\tau))^{-1} \gamma(\tau) d\tau + \gamma(t) = \psi'(t) \cdot C(t) + \gamma(t), \\ Lf &= (\psi' - \lambda\psi) \cdot C + \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

**Bemerkung** Setzt man  $\psi(t) = e^{\lambda t}$  in die Formel 3.4.51 ein, so erhält man wieder die Lösungsformel aus 3.4.50

**Bezeichnung 3.4.52 (Räume  $C^k(I, \mathbb{C})$ )**

Man bezeichnet für  $k \in \mathbb{N}$  die komplexe Algebra der  $k$ -mal stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit

$$C^k(I, \mathbb{C}),$$

oder kurz mit  $C^k$ . Die stetigen Funktionen bezeichnet man mit

$$C^0(I, \mathbb{C}) = C(I, \mathbb{C}).$$

Die Ableitung betrachtet man als Abbildung zwischen diesen Räumen und bezeichnet den **Differentiations-Operator** mit

$$\begin{aligned} D : C^{k+1}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow C^k(I, \mathbb{C}), \\ D : f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  bezeichne auch den **Multiplikationsoperator**  $f \mapsto \lambda f$ .

**Bemerkung 3.4.53 (Differentialoperator 1. Ordnung)**

1. Wir haben einen **linearen Differentialoperator**

$$\begin{aligned} L : C^{k+1}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow C^k(I, \mathbb{C}), \\ L : f &\mapsto f' - \lambda f. \end{aligned}$$

Es ist also  $L = D - \lambda$ .

2. Der Kern von  $L$  ist 1-dimensional und besteht aus den Funktionen

$$\text{kern } L := \{t \mapsto ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

3. Für ein festes  $t_0 \in I$  ist die **Punktauswertung**

$$\delta_{t_0} : C^{k+1}(I, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\delta_{t_0} : f \mapsto f(t_0)$$

eine komplexe Linearform, die auf kern  $L$  nicht verschwindet.

**Feststellung 3.4.54 (Bijektion  $(L, \delta_{t_0}) : C^{k+1} \rightarrow C^k \times \mathbb{C}$ )**

*Faßt man die Abbildungen  $L$  und  $\delta_{t_0}$  zu einem Paar zusammen, so erhält man eine bijektive lineare Abbildung:*

$$\begin{aligned} (L, \delta_{t_0}) : C^{k+1}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow C^k(I, \mathbb{C}) \times \mathbb{C} \\ f &\mapsto (Lf, \delta_{t_0}f) = (f' - \lambda f, f(t_0)). \end{aligned}$$

**Bemerkung(Struktur der Lösungsformel).**

Die Lösungsformel 3.4.50 gibt die Umkehrabbildung.

Man erhält die Lösung als Summe der Lösungen

- der homogenen DGL  $Lf = 0$  mit vorgegebenen Anfangswert  $\delta_{t_0}f = c_0$ ,
- der inhomogenen DGL  $Lf = \gamma$  mit verschwindenden Anfangswert  $\delta_{t_0}f = 0$ .

Die Lösungsformel 3.4.50 besteht aus diesen beiden Summanden.

**Bemerkung 3.4.55 (DGL 2. Ord. mit konst. Koeff.)**

1. Ein linearer Differentialoperator  $L$  zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{C}$  hat die Form

$$\begin{aligned} L : C^{k+2}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow C^k(I, \mathbb{C}), \\ L : f &\mapsto f'' + pf' + qf. \end{aligned}$$

Ist  $P$  das quadratische Polynom mit den Koeffizienten  $p, q$

$$P(x) = x^2 + px + q$$

so bezeichne  $P(D)$  den entsprechenden Differentialoperator

$$L = P(D) = D^2 + pD + q : f \mapsto f'' + pf' + qf.$$

2. Die Komposition zweier Differentialoperatoren erster Ordnung

$$L_1 = D - \lambda_1 \quad \text{und} \quad L_2 = D - \lambda_2$$

ergibt einen Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{k+2} &\xrightarrow{L_1} \mathbb{C}^{k+1} \xrightarrow{L_2} \mathbb{C}^k, \\ f &\mapsto (f' - \lambda_1 f)' - \lambda_2 (f' - \lambda_1 f) = f'' - (\lambda_1 + \lambda_2)f + \lambda_1 \lambda_2 f. \end{aligned}$$

Es gilt also  $(D - \lambda_2)(D - \lambda_1) = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1 \lambda_2$ .

3. Die Zerlegung eines quadratischen Polynoms  $P$  in zwei Linearfaktoren

$$P(z) = z^2 + pz + q = (z - \lambda_2)(z - \lambda_1)$$

ergibt eine Faktorisierung des entsprechenden Differentialoperators

$$P(D) = D^2 + pD + q = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1).$$

**Feststellung 3.4.56 (Lin. DGL 2. Ord. mit konst. Koeff.)**

*Es*

*sei  $Lf = f'' + pf' + qf$  ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{C}$ .*

1. Die Anfangswertaufgabe ist eindeutig lösbar:

$$\begin{aligned} f'' + pf' + qf &= \gamma, \\ f(t_0) &= c_0, \\ f'(t_0) &= c_1. \end{aligned}$$

2. Der Lösungsraum  $\ker L$  der homogenen Gleichung ist 2-dimensional:

3. Es seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Nullstellen von  $P(z) := z^2 + pz + q$ . Die folgenden beiden Funktionen sind eine Basis von  $\ker L$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni t &\mapsto e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\lambda_2 t} \quad \text{wenn } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ \mathbb{R} \ni t &\mapsto e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto te^{\lambda_1 t} \quad \text{wenn } \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned}$$

**Anmerkung zum Beweis: (Wronski-Determinante)**

Die lineare Unabhängigkeit zweier differenzierbarer Funktionen  $\psi_1, \psi_2$  kann man mit der sogenannten **Wronski-Determinante**

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{bmatrix}$$

zeigen. Wenn die Wronski-Determinante an einer Stelle  $t_0$  nicht verschwindet, sind die Vektoren

$$(\psi_1(t_0), \psi_1'(t_0)), (\psi_2(t_0), \psi_2'(t_0))$$

im  $\mathbb{C}^2$  linear unabhängig. Also sind  $\psi_1, \psi_2$  linear unabhängig im Vektorraum der Funktionen.

**Korollar 3.4.57 (Fundamentalsystems)**

Eine Basis  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  des Lösungsraumes  $\ker L$  der homogenen DGL heißt ein **Fundamentalsystem**.

Für ein Fundamentalsystem hat die Wronski-Determinante keine Nullstellen:

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

**Beweis (Lin. DGL 2. Ord. mit konst. Koeff).**

Es sei  $P(z) := z^2 + pz + q = (z - \lambda_2)(z - \lambda_1)$ . Dann ist

$$L = P(D) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1).$$

1. Für ein festes  $t_0 \in \mathbb{R}$  ergibt die Hintereinanderausführung der bijektiven linearen Abbildungen (vgl. 3.4.54) :

$$(D - \lambda_1, \delta_{t_0}) \quad \text{und} \quad (D - \lambda_2, \delta_{t_0})$$

eine bijektive lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{k+2}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}^k(I, \mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ f &\mapsto (Lf, \delta_{t_0}(Df - \lambda_1 f), \delta_{t_0} f) \\ &= (Lf, f'(t_0) - \lambda_1 f(t_0), f(t_0)). \end{aligned}$$

Die Anfangswerte  $(f'(t_0) - \lambda_1 f(t_0), f(t_0))$  kann an noch eindeutig auflösen zu

$$f \mapsto (\delta_{t_0} f, \delta_{t_0} Df) = (f(t_0), f'(t_0)).$$

Also ist die folgende lineare Abbildung bijektiv:

$$\begin{aligned} (L, \delta_{t_0}) : \mathbb{C}^{k+2}(I, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}^k(I, \mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ f &\mapsto (Lf, \delta_{t_0} f, \delta_{t_0} Df) \\ &= (Lf, f(t_0), f'(t_0)). \end{aligned}$$

D. h. die Anfangswertaufgabe ist eindeutig lösbar.

2. Aus 1. folgt, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \ker L &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ f &\mapsto (f(t_0), f'(t_0)) \end{aligned}$$

bijektiv ist. Also ist  $\dim(\ker L) = 2$ .

3. Wir zeigen, daß die angegebenen Funktionen im Kern liegen und linear unabhängig sind.

**Fall  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :** Es seien:

$$\begin{aligned}\psi_1 : t &\mapsto e^{\lambda_1 t} && \text{liegt in kern } (D - \lambda_1), \\ \psi_2 : t &\mapsto e^{\lambda_2 t} && \text{liegt in kern } (D - \lambda_2).\end{aligned}$$

Also liegen sie im Kern von

$$L = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1).$$

Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, bildet man die **Wronski-Determinante**:

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{bmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\psi_1(t)\psi_2(t) \neq 0.$$

**Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$ :** Es seien

$$\begin{aligned}\psi_1 : t &\mapsto e^{\lambda_1 t} && \text{liegt in kern } (D - \lambda_1), \\ \psi_2 : t &\mapsto te^{\lambda_1 t} && \text{liegt in kern } (D - \lambda_2)^2.\end{aligned}$$

Man beachte, daß

$$\psi_2' = \psi_1 + \lambda_1\psi_2 \quad \text{und} \quad (D - \lambda_1)\psi_2 = \psi_1$$

ist. Für die **Wronski-Determinante** erhält man:

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{bmatrix} = (\psi_1(t))^2 \neq 0.$$

**Beweis (des Korollars 3.4.57).**

Wenn die Wronski-Determinante an einer Stelle verschwindet:

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) \\ \psi_1'(t_0) & \psi_2'(t_0) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{für ein } t_0 \in \mathbb{R},$$

dann gibt es eine Linearkombination der Spalten, die an dieser Stelle verschwindet:

$$\begin{aligned}a_1\psi_1(t_0) + a_2\psi_2(t_0) &= 0, \\ a_1\psi_1'(t_0) + a_2\psi_2'(t_0) &= 0.\end{aligned}$$

Dann ist  $f := a_1\psi_1 + a_2\psi_2$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $Lf = 0$  mit Anfangswerten  $f(t_0) = 0$ ,  $f'(t_0) = 0$ . Nach Feststellung 3.4.56(1.) ist dann  $f = 0$  im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der  $\psi_1, \psi_2$ .

**Beispiele 3.4.58 (Variation der Konstanten)**

Nach **Lagrange** findet man zu der DGL  $Lf = f'' + pf' + qf = \gamma$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch die Methode der **Variation der Konstanten**:

1. Für ein Fundamentalsystem  $\{\psi_1, \psi_2\}$  von  $L$  gilt nach Korollar 3.4.57 (Wronski-Determinante):

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Zu jedem Paar von Funktionen  $f, \tilde{f}$  gibt es also eindeutige Koeffizienten

$$t \mapsto (C_1(t), C_2(t)),$$

so daß

$$\begin{aligned} f &= C_1\psi_1 + C_2\psi_2, \\ \tilde{f} &= C_1\psi_1' + C_2\psi_2'. \end{aligned}$$

2. Man suche nach LAGRANGE eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung  $Lf = \gamma$  in der Form:

$$\begin{aligned} f &= C_1\psi_1 + C_2\psi_2, \\ f' &= C_1\psi_1' + C_2\psi_2'. \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen  $t \mapsto C_1(t)$  und  $t \mapsto C_2(t)$ . Aus dem Ansatz für  $f$  und  $f'$  folgt

$$\boxed{C_1'\psi_1 + C_2'\psi_2 = 0}.$$

Setzt man die Gleichungen für  $f, f'$  und

$$f'' = C_1\psi_1'' + C_2\psi_2'' + C_1'\psi_1' + C_2'\psi_2'$$

in die DGL ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma = Lf &= L\psi_1 + L\psi_2 + C_1'\psi_1' + C_2'\psi_2', \\ \Rightarrow \quad &\boxed{C_1'\psi_1' + C_2'\psi_2' = \gamma}. \end{aligned}$$

3. Man erhält ein lineares Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} C_1'\psi_1 + C_1'\psi_2 &= 0, \\ C_1'\psi_1' + C_2'\psi_2' &= \gamma, \end{aligned}}$$

dessen Determinante nicht verschwindet. Man berechnet:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{\psi_2\gamma}{\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2'}, \\ C_2' &= -\frac{\psi_1\gamma}{\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2'}. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$Lf = \gamma, \quad f(t_0) = 0, \quad f'(t_0) = 0$$

erhält man mit den Stammfunktionen von  $C'_1$  und  $C'_2$ :

$$f(t) := \psi_1(t) \int_{t_0}^t \frac{\psi_2 \gamma}{\psi'_1 \psi_2 - \psi_1 \psi'_2} d\tau - \psi_2(t) \int_{t_0}^t \frac{\psi_1 \gamma}{\psi'_1 \psi_2 - \psi_1 \psi'_2} d\tau.$$

### Feststellung 3.4.59 (Variation der Konstanten)

Gegeben sei die DGL

$$Lf = f'' + pf' + qf = \gamma$$

mit konstanten Koeffizienten und stetiger Funktion  $\gamma$ . Es sei  $\{\psi_1, \psi_2\}$  eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 &= 0 \\ c_1 \psi'_1 + c_2 \psi'_2 &= \gamma \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösungen  $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ . Diese ist stetig. Es seien  $C_1, C_2$  Stammfunktionen von  $c_1$  bzw.  $c_2$ . Setzt man

$$f := C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2,$$

dann gilt

$$Lf = \gamma.$$

### Beweis (Variation der Konstanten).

Nach Korollar 3.4.57 gilt für die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems  $\{\psi_1, \psi_2\}$ :

$$\det \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi'_1(t) & \psi'_2(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da  $\psi_1, \psi'_1, \psi_2, \psi'_2$  und  $\gamma$  stetig sind, erhält man mit der Kramerschen Regel stetige Funktionen  $c_1$  und  $c_2$ , so daß

$$\begin{aligned} c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 &= 0 \\ c_1 \psi'_1 + c_2 \psi'_2 &= \gamma. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f &:= C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2, \\ f' &= C_1 \psi'_1 + C_2 \psi'_2, \\ f'' &= C_1 \psi''_1 + C_2 \psi''_2, \\ Lf &= f'' + pf' + qf = C_1 \cdot L\psi_1 + C_2 \cdot L\psi_2 + \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

**Beispiele 3.4.60 (Integraldarstellung der Lösung)**

Wir wollen die in 3.4.58(3) gefundene Integralformel für die Lösung der inhomogenen Gleichung genauer untersuchen:

1. Es sei  $\{\psi_1, \psi_2\}$  eine beliebiges **Fundamentalsystem** der DGL  $Lf = f'' + pf' + qf$  Dann sind

$$t \mapsto \varphi_0(t, \tau) := \frac{\psi_2(t)\psi_1'(\tau) - \psi_1(t)\psi_2'(\tau)}{\psi_1'(\tau)\psi_2(\tau) - \psi_1(\tau)\psi_2'(\tau)},$$

$$t \mapsto \varphi_1(t, \tau) := \frac{\psi_1(t)\psi_2(\tau) - \psi_2(t)\psi_1(\tau)}{\psi_1'(\tau)\psi_2(\tau) - \psi_1(\tau)\psi_2'(\tau)}$$

Lösungen der homogenen Gleichung  $L\varphi(\cdot, \tau) = 0$ , mit den Anfangswerten im Punkt  $t = \tau$  (Ableitung nach  $t$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau, \tau) &= 1, & \varphi_1(\tau, \tau) &= 0, \\ \varphi_0'(\tau, \tau) &= 0, & \varphi_1'(\tau, \tau) &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\varphi_0(t, \tau) = \varphi_0(t - \tau, 0), \quad \varphi_1(t, \tau) = \varphi_1(t - \tau, 0).$$

2. Wir bezeichnen mit

$$\Phi_0(t) := \varphi_0(t, 0), \quad \Phi_1(t) := \varphi_1(t, 0)$$

die Lösungen der homogenen DGL zu den Anfangswerten

$$\begin{aligned} \Phi_0(0) &= 1, & \Phi_1(0) &= 0, \\ \Phi_0'(0) &= 0, & \Phi_1'(0) &= 1. \end{aligned}$$

3. Die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$Lf = \gamma, \quad f(t_0) = a_0, \quad f'(t_0) = a_1$$

ist:

$$f(t) := a_0\Phi_0(t - t_0) + a_1\Phi_1(t - t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_1(t - \tau)\gamma(\tau) d\tau.$$

**Beweis (Integraldarstellung der Lösung).**

1. Setzt man für  $k = 0, 1$

$$t \mapsto \tilde{\varphi}_k(t, \tau) := \varphi_k(t - \tau, 0),$$

so gilt ebenfalls  $L\tilde{\varphi}_k(\cdot, \tau) = 0$  und (Ableitung nach  $t$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0(\tau, \tau) &= 1, & \tilde{\varphi}_1(\tau, \tau) &= 0, \\ \tilde{\varphi}_0'(\tau, \tau) &= 0, & \tilde{\varphi}_1'(\tau, \tau) &= 1. \end{aligned}$$

Da die Lösung des Anfangwertproblems eindeutig ist, folgt für  $k = 1, 2$

$$\varphi_k(t, \tau) = \tilde{\varphi}_k(t, \tau) = \varphi_k(t - \tau, 0).$$

2. Es gilt also

$$\Phi_1(t - \tau) := \frac{\psi_1(t)\psi_2(\tau) - \psi_2(t)\psi_1(\tau)}{\psi_1'(\tau)\psi_2(\tau) - \psi_1(\tau)\psi_2'(\tau)}$$

3. Vergleichen wir das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \Phi_1(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\psi_1(t)\psi_2(\tau) - \psi_2(t)\psi_1(\tau)}{\psi_1'(\tau)\psi_2(\tau) - \psi_1(\tau)\psi_2'(\tau)} \gamma(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

mit der Lösungsformel 3.4.58 (3) für die inhomogne Gleichung, so folgt die Behauptung.

*Bemerkung:* Man kann das letztere Integral auch zweimal differenzieren und in die DGL einsetzen.

### Bemerkung.

1. Man nennt

$$\int_{t_0}^t \Phi_1(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau$$

das **Duhamel-Integral**.

2. Man nennt  $E(t) := H(t)\Phi_1(t)$  die **Fundamentallösung** oder *Elementarlösung* des Differentialoperators  $L$ . Dabei ist  $H$  die Heaviside-Funktion.

Das Anfangwertproblems im Punkte  $\mathbf{0}$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$ :

$$Lf = \gamma, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

hat für  $t \geq \mathbf{0}$  die (eindeutige) Lösung

$$f(t) := \int_0^t E(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau.$$

Man schreibt die Lösungsformel symbolisch als als **Faltung** der Fundamentallösung mit der rechten Seite  $\gamma$  der DGL:

$$f(t) := (E \star \gamma)(t) := \int_0^\infty E(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau.$$

Beachte: für  $\tau > t$  ist der Integrand  $E(t - \tau) = 0$ . Wenn  $\gamma = H \cdot \gamma$  ist, kann man das Faltungsintegral auch als

$$f(t) := (E \star \gamma)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} E(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau$$

schreiben.

*Der Sinn dieser Bezeichnungen erschließt sich erst, wenn man darauf die Methoden der Distributionentheorie (verallgemeinerte Funktionen) und die Laplace-Transformation anwendet.*

### Beispiele 3.4.61 (Lösungsformeln mit Eigenwerten)

Gegeben sei der Differentialoperator 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$Lf = f'' + pf' + qf = \gamma.$$

Wir wollen die Fundamentallösung 3.4.60(2) ganz konkret ausrechnen:

Es seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Nullstellen von  $P(z) := z^2 + pz + q$ .

**Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :** Die folgenden beiden Funktionen sind eine Basis von kern  $L$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0 : t &\mapsto \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \Phi_1 : t &\mapsto \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} \psi_0(0) &= 1, & \psi_1(0) &= 0, \\ \psi'_0(0) &= 0, & \psi'_1(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung  $Lf = \gamma$  mit verschwindenden Anfangswerten im Punkte  $t_0$  ist:

$$\begin{aligned} f_0(t) &:= \int_{t_0}^t \Phi_1(t - \tau) \gamma(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \frac{e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gamma(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblem:

$$Lf = \gamma, \quad f(t_0) = a_0, \quad f'(t_0) = a_1$$

ist

$$f(t) := a_0 \Phi_0(t - t_0) + a_1 \Phi_1(t - t_0) + f_0(t).$$

---

**Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$ :** Die folgenden beiden Funktionen sind eine Basis von kern  $L$ :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &: t \mapsto e^{\lambda_1 t}(1 - \lambda_1 t), \\ \Phi_1 &: t \mapsto t \cdot e^{\lambda_1 t}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_0(0) &= 1, & \Phi_1(0) &= 0, \\ \Phi_0'(0) &= 0, & \Phi_1'(0) &= 1.\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung  $Lf = \gamma$  mit verschwindenden Anfangswerten im Punkte  $t_0$  ist:

$$\begin{aligned}f_0(t) &:= \int_{t_0}^t \Phi_1(t - \tau)\gamma(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t (t - \tau)e^{\lambda_1(t - \tau)}\gamma(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$Lf = \gamma, \quad f(t_0) = a_0, \quad f'(t_0) = a_1$$

ist

$$f(t) := a_0\Phi_0(t - t_0) + a_1\Phi_1(t - t_0) + f_0(t).$$


---

### Beispiele 3.4.62 (reelle Koeffizienten)

Es sei die Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{R}$  und die quadratische Gleichung  $z^2 + pz + q = 0$  habe zwei konjugiert komplexe Nullstellen  $\lambda_1 = \alpha + i\omega$  und  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ .

Wenn  $\omega = \text{Im } \lambda_1 \neq 0$ , sind es zwei verschiedene Nullstellen. Aus den Lösungsformeln 3.4.61 folgt für diesen Fall:

1. Die folgenden beiden Funktionen sind eine Basis von kern  $L$ :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &: t \mapsto \frac{\lambda_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} - \bar{\lambda}_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1} = e^{\alpha t} \frac{\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)}{\omega}, \\ \Phi_1 &: t \mapsto \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\bar{\lambda}_1 t}}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1} = e^{\alpha t} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned}\psi_0(0) &= 1, & \psi_1(0) &= 0, \\ \psi_0'(0) &= 0, & \psi_1'(0) &= 1.\end{aligned}$$

2. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$Lf = \gamma, \quad f(t_0) = a_0, \quad f'(t_0) = a_1$$

ist

$$f(t) := a_0 \Phi_0(t - t_0) + a_1 \Phi_1(t - t_0) + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} \gamma(\tau) d\tau.$$

**Bemerkung.** Die DGL  $Lf = p'' + pf' + qf = \gamma$  beschreibt im Fall

$$p > 0, \quad \text{und} \quad p^2 - 4q < 0$$

eine gedämpfte, erzwungene Schwingung mit der Anregung  $\gamma$ .  $p$  ist die **Dämpfung** oder Reibung im System,  $q$  die elastische Kraft z.B. Federkraft.

Das Polynom  $z^2 + pz + q$  hat zwei konjugiert komplexe Nullstellen  $\lambda_1 = \alpha + i\omega$  und  $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\omega$ .

Die Lösungen der homogenen Gleichung heißen **freie Schwingungen**:

$$c_0 \Phi_0 + c_1 \Phi_1.$$

Die freien Schwingungen klingen exponentiell ab mit der Rate:

$$\alpha = -p/2 < 0$$

Der Imaginärteil

$$\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

heißt in der Technik **Kreisfrequenz**. Wenn  $t$  die Zeivariablen ist, dann heißt  $\nu := \frac{\omega}{2\pi}$  die **Frequenz** der Schwingung.

### 3.4.8 Metrische und topologische Begriffe

**Ziel:** Wir wollen die bisher auf den reellen Zahlen verwendeten Begriffe wie

- Beschränktheit und Konvergenz von Folgen, Cauchyfolge,
- Vollständigkeit, Kompaktheit,
- Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion, Grenzwert einer Funktion in einem Punkt,
- Konvergenz von Funktionenfolgen,
- offene und abgeschlossene Intervalle, Zwischenwertsatz(?)

sinngemäß auf die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  übertragen, so daß **soweit möglich**, die bekannten Resultate weitergelten.

---

**Bemerkung.** 1. Die Begriffen, die mit Hilfe des Betrages einer reellen Zahl definiert sind, werden wir völlig analog auf komplexe Zahlen übertragen.

Aus dem Grund haben wir bisher, wenn immer möglich, die Definitionen und Beweise auf den **Betrag** gestützt. Die **Ordnung der reellen Zahlen** wurde benutzt, um Beträge zu vergleichen. Der Betrag einer komplexen Zahl ist anders definiert, hat aber weitgehend die gleichen Eigenschaften.

2. Man beachte, daß die komplexen Zahlen **kein geordneter Körper** sind. Die Begriffe Monotonie einer reellen Folge oder Funktion, Maximum, Minimum, Infimum oder Supremum einer Menge von reellen Zahlen sind auf komplexwertige Funktionen oder Teilmengen von  $\mathbb{C}$  nicht übertragbar.

Das Bild eines Intervalles unter einer stetigen reellen Funktion ist ein Intervall. In der komplexen Ebene gibt es keine naheliegende Entsprechung zu den Intervallen.

---

#### **Bemerkung (Metrik und metrischer Raum)**

Der Begriff **Betrag** ist stark mit der algebraischen Struktur der des Körpers verknüpft.

Im Hinblick auf weitere Verallgemeinerungen auf Situationen, in denen eine andere oder sogar keine algebraische Struktur vorliegt, wollen wir die Definitionen und die folgenden Resultate auf den schwächeren Begriff **Metrik** stützen, der keinerlei algebraische Struktur auf der zu betrachtenden Menge voraussetzt.

Metrik ist ein anderes Wort für die **Abstandsfunktion**, die zwei Punkten ihren Abstand zuordnet.

---

#### **Definition 3.4.63 (Metrik auf $\mathbb{C}$ )**

Der **übliche Abstand** oder die **Distanz** zweier komplexer Zahlen  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  ist

$$d(z, w) = d_{\mathbb{C}}(z, w) := \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Der übliche Abstand auf  $\mathbb{C}$  ist der **euklidische Abstand** in der Ebene.

**Bemerkung.** Wir formulieren vorerst alle folgenden Begriffe mit Hilfe des **Abstand zweier Punkte** und den Eigenschaften der **Metrik** und nehmen keinen Bezug darauf, wie der Abstand berechnet wird.

Diese Definitionen und Sätze gelten dann für jeden **metrischen Raum**, z.B. den Abstand auf der Kreislinie oder der Kugeloberfläche, aber auch für den Abstand von Funktionen (vgl. 2.8.8)

---

**Definition 3.4.64 (Metrik)**

Es sei  $X$  eine Menge. Eine **Metrik** auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$$

mit folgenden Eigenschaften. Für  $x, y, z \in X$  gilt:

- (M1)  $d(x, y) = 0$  genau, wenn  $x = y$ .
- (M2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (**Symmetrie**).
- (M3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (**Dreiecksungl.**).

Man nennt  $d(x, y)$  den **Abstand** oder die **Distanz** der Punkte  $x, y \in X$ . Das Paar  $(X, d)$  heißt **metrischer Raum**. Man bezeichnet den metrischen Raum meist kurz mit  $X$ .

**Bemerkung.** Es reicht  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  zu fordern. Aus (M1)–(M3) folgt dann

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

**Bemerkung.** Häufig entsteht eine Metrik aus einer Norm. Man vgl. hierzu die Norm 2.8.8 auf dem Raum beschränkter Funktionen und ihre Eigenschaften 2.8.9.

**Definition 3.4.65 (Norm)**

Eine Norm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum  $V$  ist eine Funktion

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty),$$

so daß für  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  folgendes gilt:

- (N1)  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
- (N2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (**absolut homogen**).
- (N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (**subadditiv**),

**Bemerkung.** Es reicht  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  zu fordern, denn aus (N1)–(N3) folgt:  $0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|(-1)x\| = 2\|x\|$ .

**Beispiele 3.4.66 (Metriken)**

1. Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Man bildet dann die **zugehörige Metrik**:

$$d(x, y) = d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in V.$$

Die Eigenschaften (M1)–(M3) folgen unmittelbar aus den Normeigenschaften (N1)–(N3).

Später schreibt man kurz  $\|x - y\|$  für die Metrik und verwendet die Bezeichnung  $d(x, y)$  nicht weiter. Wir wollen aber zunächst den Abstand auf einem normierten Raum unter dem Gesichtspunkt einer Metrik behandeln.

Beispiele sind die **euklidischen Normen**:

$$\mathbb{R}^2 \text{ mit der Norm } \|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$\mathbb{R}^3 \text{ mit der Norm } \|(x_1, x_2, x_3)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

2. Bei der Bildung der Metrik  $d$  zu einer Norm  $\|\cdot\|$  wird die Normeigenschaft (N2) nicht voll benutzt. Es reicht eine abelsche Gruppe  $G$  mit einer Funktion  $\|\cdot\| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die die Eigenschaften 3.4.65 **(N1)**, **(N3)** und

$$\text{(N2')} \quad \|x\| = \|-x\| \quad (\text{additive Gruppe})$$

erfüllt, beziehungsweise **(N1)** und

$$\text{(N2'')} \quad \|x\| = \|(x^{-1})\| \quad (\text{multiplikative Gruppe}),$$

$$\text{(N3'')} \quad \|x \cdot y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Beispiel: Torusgruppe mit der **Norm**

$$\|\zeta\|_{\mathbb{T}} = |\arg \zeta| \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{T}.$$

Die Norm  $\|\zeta\|_{\mathbb{T}}$  mißt die Länge des Bogens von 1 bis  $\zeta$  entlang des Einheitskreises. Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$d_{\mathbb{T}}(\zeta_1, \zeta_2) = \|\zeta_1 \zeta_2^{-1}\|_{\mathbb{T}} = |\arg(\zeta_1 \zeta_2^{-1})| \leq |\arg \zeta_1| + |\arg \zeta_2|.$$

3. Das nächste Beispiel zeigt, daß man ohne zusätzliche Voraussetzungen wenig interessante Ergebnisse über metrische Räume erwarten kann.

Man nehme eine **beliebige** Menge  $X$  und versehe sie mit der folgenden Metrik:

$$d_{01}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x, y \in X \text{ und } x = y, \\ 1 & \text{für } x, y \in X \text{ und } x \neq y. \end{cases}$$

Diese Metrik heißt die **diskrete Metrik** und hat folgende Eigenschaften:

- Jede Abbildung von  $(X, d_{01})$  in einen beliebigen metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.

- Eine Folge konvergiert genau dann, wenn Sie für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  konstant ist. Der metrische Raum  $(X, d_{01})$  ist vollständig.

Die diskrete Metrik ist nur gut für Gegenbeispiele.

**Bemerkung.** Mit der Metrik werden weitere Begriffe definiert. Z. B.:

- für Folgen: Konvergenz, Cauchyfolge,
- für Funktionen: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit,
- für Mengen: offene Menge, Vollständigkeit, Kompaktheit.

Einige von ihnen, wie

- Konvergenz, Stetigkeit, offene Menge, Kompaktheit

definieren wir im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen nicht direkt durch die Metrik, sondern führen sie auf den

- Begriff der **Umgebung** eines Punktes

zurück. Wir werden aus diesem Grunde in Sätzen und Beweisen möglichst mit diesen Begriffen und weniger mit Abschätzungen der Metrik arbeiten.

### Definition 3.4.67 (Umgebungen eines Punktes)

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x_0 \in X$  ein Punkt des Raumes.

1. Für  $\varepsilon > 0$  erklärt man die **offene  $\varepsilon$ -Umgebung**

$$U(x_0, \varepsilon) = U(x_0, \varepsilon, d) := \{x \mid x \in X, \quad d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Man sagt auch **offene Kugel mit Radius  $\varepsilon$**  um den Punkt  $x_0$  oder kurz  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

2. Der Begriff der offenen  $\varepsilon$ -Umgebung ist häufig etwas zu einschränkend, deshalb definiert man weiter:

Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt eine **Umgebung** des Punktes  $x_0$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß

$$U(x_0, \varepsilon) \subset U.$$

Es bezeichne  $\mathcal{U}(x_0)$  die Menge aller Umgebungen von  $x_0$ .

---

**Bild:** In der Ebene ist – anschaulich ausgedrückt – eine Menge  $U$  genau dann eine Umgebung eines Punktes  $x_0$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß von  $x_0$  aus in jeder Richtung die Strecke der Länge  $\varepsilon$  ganz in  $U$  liegt.

*Man zeichne in der Ebene eine Menge  $M$  mit einem Punkt  $x_0 \in M$ , derart daß von  $x_0$  aus in jeder Richtung eine Strecke positiver Länge ganz in  $M$  liegt, aber  $M$  keine Umgebung von  $x_0$  ist.*

*Wie ist das auf der Geraden?*

**Beispiel.** In einem diskreten metrischen Raum ist die einpunktige Menge  $U := \{x_0\}$  eine Umgebung von  $x_0$ .

---

**Bemerkung** Wir formulieren einige bekannte Definitionen und Sätze auf  $\mathbb{R}$  mit Umgebungen statt mit *Epsilontik*:

### Beispiele 3.4.68 (Umgebungen in $\mathbb{R}$ )

$\mathbb{R}$  bezeichnet immer die reellen Zahlen mit der Standardmetrik

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  ist das offene Intervall:

$$U(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  ist eine Umgebung von  $x$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \subset U.$$


---

2. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert gegen  $c \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $c$  einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß

$$a_n \in U \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

$\Rightarrow$ : Nach Definition 3.4.67 und Definition 2.1.1 gilt:

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{U}(c) \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U(c, \varepsilon) : x \in U, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in U(c, \varepsilon). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:  $\forall U \in \mathcal{U}(c) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in U$ .

$\Leftarrow$ : Nach Definition 3.4.67 und nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : U(c, \varepsilon) \in \mathcal{U}(c), \\ \forall U \in \mathcal{U}(c) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in U. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - c| < \varepsilon$ .

---

3. die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit kann man folgendermaßen umformulieren:

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder Umgebung  $V$  des Bildpunktes  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, so daß

$$f(U) \subset V.$$

---

$\Rightarrow$ : Zu einer Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß

$$U(f(x_0), \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset V.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Für die Umgebung  $U := U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gilt also

$$f(U) \subset V.$$

$\Leftarrow$ : Es sei  $\varepsilon > 0$ . Zu der Umgebung  $V := U(f(x_0), \varepsilon)$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$ , so daß  $f(U) \subset V$ . Zu  $U$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß  $U(x_0, \delta) \subset U$ . Es gilt also:

$$f(U(x_0, \delta)) \subset f(U) \subset V = U(f(x_0), \varepsilon)$$

und somit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

- 
4. Wenn die Funktion nur auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  erklärt ist, müssen wir dies in der Formulierung berücksichtigen:

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder Umgebung  $V$  des Bildpunktes  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  gibt, so daß

$$f(U \cap M) \subset V.$$

Man nennt  $U \cap M$  eine **relative Umgebung** von  $x_0$  in  $M$  oder im Bezug auf  $M$ .

---

5. Die Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  ist mit der Einschränkung der Metrik von  $\mathbb{R}$  ein *selbständiger* metrischer Raum  $M$ . Dann gilt:

*Ist  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$ , so ist  $\tilde{U} := U \cap M$  eine Umgebung von  $x_0$  im metrischen Raum  $M$ .*

Man könnte also die Formulierung wie in (3) wählen und von einer Umgebung  $\tilde{U}$  von  $x_0$  in  $M$  sprechen.

*Die übliche Formulierung (4.) ist aber kürzer und klarer.*

6. **Bezeichnung.** Für eine reelle Zahl  $x$  ist mit einer Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  immer eine Umgebung im Bezug auf  $\mathbb{R}$  gemeint.

Wenn  $x$  in einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  liegt, sprechen wir von relativen Umgebungen von  $x$  im Bezug  $M$  und bezeichnen die **relativen Umgebungen** mit

$$U \cap M, \quad \text{wobei } U \in \mathcal{U}(x).$$

7. Das *Formulierungsproblem* (5.) tritt nicht auf, wenn die betrachtete Teilmenge ein offenes Intervall  $I = (a, b)$  und  $x_0 \in I$  ist. Dann gilt:

*Ist  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$ , so ist  $\tilde{U} := U \cap I$  ebenfalls eine Umgebung von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$ .*

Wir sprechen in diesem Fall nicht von relativen Umgebungen.

Im Fall eines **offenen** Intervalls  $I$  gibt es zu jedem  $x \in I$  eine Umgebung von  $x$ , die ganz in  $I$  liegt.

8. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann sind äquivalent:

(i)  $I$  ist ein offenes Intervall.

(ii) Zu jedem  $x \in I$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$ , die ganz in  $I$  liegt.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Die Endpunkte von  $I$  liegen nicht in  $I$ .

9. Man kann zeigen:

Es sei  $M \subset \mathbb{R}$ . Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(i) Zu jedem  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$ , die ganz in  $M$  liegt.

(ii) Es gibt höchstens abzählbar viele **disjunkte** offene Intervalle  $I_n$ , so daß

$$M = \bigcup_n I_n.$$

Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit der Eigenschaft (i) heißen **offen**.

Auf Grund von (ii) reicht es i. a., in  $\mathbb{R}$  nur offene Intervalle zu betrachten.

In der komplexen Ebene gibt es kein so einfaches Resultat über die Struktur offener Mengen.

### Definition 3.4.69 (Grenzwert einer Folge)

Es seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(a_n)_n$  in  $X$  heißt konvergent gegen einen Grenzwert  $c \in X$ , wenn folgendes gilt:

Zu jeder Umgebung  $U$  von  $c$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß aus  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq n_0$  stets

$$a_n \in U$$

folgt.

### Bemerkung 3.4.70 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

In einem metrischen Raum ist der Grenzwert  $c$  einer konvergenten Folge  $(a_n)_n$  ist eindeutig bestimmt und wird mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := c$$

bezeichnet.

### Beweis (Eindeutigkeit des Grenzwertes).

**Annahme:** Es seien  $c_1$  und  $c_2$  Grenzwerte der Folge  $(a_n)_n$  und  $c_1 \neq c_2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \delta &:= d(c_1, c_2) > 0, \\ U(c_1, \frac{\delta}{2}) \cap U(c_2, \frac{\delta}{2}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gibt es für  $k = 1, 2$  zu den Umgebungen  $U(c_k, \frac{\delta}{2})$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_k$  gilt:

$$a_n \in U(c_k, \frac{\delta}{2}).$$

Für  $n \geq \max(n_1, n_2)$  ist  $a_n \in U(c_1, \frac{\delta}{2}) \cap U(c_2, \frac{\delta}{2})$ . **Widerspruch.**

### Bemerkung (Hausdorff-Eigenschaft).

In einem metrischen Raum haben, wie der obige Beweis zeigt, zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen. Man nennt dies die **Hausdorff-Eigenschaft**.

### Feststellung 3.4.71 ( $\varepsilon$ -Def. der Folgenkonvergenz)

Es seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $c \in X$  und  $(a_n)_n$  eine Folge in  $X$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  im Sinne der Definition 3.4.69.
2. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  stets

$$d(a_n, c) < \varepsilon.$$

3. Es gibt ein  $C > 0$  mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  stets

$$d(a_n, c) \leq C\varepsilon.$$

**Bemerkung.** Für den Beweis (1.) $\Leftrightarrow$ (2.) vgl. man den Beweis zum Beispiel 3.4.68(2). Für den Beweis (2.) $\Leftrightarrow$ (3.) vgl. man Feststellung 2.1.5.

### Definition 3.4.72 (Stetigkeit einer Abbildung)

Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung.

1.  $f$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in M$ , wenn es zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, so daß

$$f(U \cap M) \subset V.$$

2.  $f$  heißt stetig auf  $M$ , wenn  $f$  in jedem Punkt von  $M$  stetig ist.

### Bemerkung (Zur Definition der Stetigkeit).

In der Definition 3.4.72(1.) ist  $V$  eine Umgebung von  $f(x_0)$  im metrischen Raum  $(Y, d_Y)$  und  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  im metrischen Raum  $(X, d_X)$ .

$U \cap M$  heißt **relative Umgebung** von  $x_0$  bezüglich  $M$ .

**Bemerkung.** Die folgenden Feststellung beweist man analog zur Feststellung ??:

### Feststellung 3.4.73 (Folgenkriterium: Stetigkeit)

Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig im Punkt  $a \in M$ .
2. Zu jeder Folge  $(x_n)_n$  in  $M$  die gegen  $a$  konvergiert, konvergiert die Bildfolge  $(f(x_n))_n$  gegen  $f(a)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

**Beweis (Folgenkrit: Stetigkeit).**

**1 $\Rightarrow$ 2:** Es sei  $(x_n)_n$  in  $M$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Nach Voraussetzung gibt es zu einer Umgebung  $V$  von  $f(a)$  eine Umgebung  $U$  von  $a$ , so daß

$$f(U \cap M) \subset V.$$

Da  $x_n \rightarrow a$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$x_n \in U \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Also ist

$$f(x_n) \in f(U \cap M) \subset V \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

**2 $\Rightarrow$ 1:** Wir führen einen Widerspruchsbeweis:

**Annahme:** Es gibt eine Umgebung  $V$  von  $f(a)$ , so daß für jede Umgebung  $U$  von  $a$  gilt

$$f(U \cap M) \not\subset V.$$

Also existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in U(a, \frac{1}{n}) \cap M$ , so daß

$$f(x_n) \notin V.$$

Nun gilt  $x_n \rightarrow a$ , aber die Bildfolge  $(f(x_n))_n$  konvergiert nicht gegen  $f(a)$ . **Widerspruch.**

**Definition 3.4.74 (offene Mengen)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt **offen**, wenn es zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt, die ganz in  $M$  liegt.

**Bemerkung 3.4.75 (Regeln: offene Mengen)**

1. Nach Definition sind die leere Menge  $\emptyset$  und der ganze Raum  $X$  offen.
2. Eine beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.
3. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

**Beispiel.** In einem metrischen Raum mit der diskreten Metrik ist jede Teilmenge offen.

Die Bezeichnung *offene Kugel* ist richtig gewählt:

**Beispiele 3.4.76 (offene Kugel)**

Die offene Kugel mit Radius  $r > 0$

$$U(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x, x_0) < r\}$$

ist offen. Speziell sind in  $\mathbb{R}$  offene Intervalle offen.

**Beweis (offene Kugel).**

Es sei  $x_1 \in U(x_0, r)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_1, x_0) &< r, \\ \varepsilon := r - d(x_1, x_0) &> 0. \end{aligned}$$

Wenn  $x \in U(x_1, \varepsilon)$ , so ist  $d(x, x_1) < \varepsilon$ . Aus der **Dreiecksungleichung** folgt:

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \varepsilon + (r - \varepsilon) = r.$$

D.h., die Umgebung  $U(x_1, \varepsilon)$  liegt in  $U(x_0, r)$ .

**Bemerkung.** In vielen Schlußweisen benötigt man nicht die volle Schärfe der Dreiecksungleichung, sondern kommt mit dem folgenden Aussage aus:

**Korollar 3.4.77 (offene Umgebung)**

1. Jede Umgebung  $U$  eines Punktes  $x_0$  enthält eine offene Teilmenge  $G$  mit  $x_0 \in G \subset U$ .
2. Eine nichtleere offene Menge ist Umgebung von jedem ihrer Punkte.

**Bemerkung.** Eine Teilmenge  $U \subset X$  ist Umgebung eines Punktes  $x_0$ , wenn es eine offene Menge  $G \subset X$  gibt, so daß

$$x_0 \in G \subset U.$$

Man kann also auch die Reihenfolge der Definitionen vertauschen und alles auf den Begriff offene Menge stützen. In der Topologie wählt man **offene Mengen** als Ausgangsbegriff.

**Definition 3.4.78 (innerer Punkt)** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subset X$

1. Ein Punkt  $x \in M$  heißt **innerer Punkt**, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt, die ganz in  $M$  liegt.
2. Die Menge der inneren Punkte von  $M$  heißt das **Innere** von  $M$  und wird mit  $M^\circ$  bezeichnet.

**Bemerkung.** Eine Teilmenge  $M$  ist genau dann offen, wenn jeder Punkt von  $M$  ein innerer Punkt ist

**Feststellung 3.4.79** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Das Innere einer Teilmenge  $M \subset X$  ist offen.*

**Beweis.** Die Aussage folgt unmittelbar aus Korollar 3.4.77 und der Regel 3.4.75(2.)

**Bemerkung.** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $M \subset X$  ist mit der Einschränkung der Metrik von  $X$  ein metrischer Raum  $(M, d_M)$ .

Man bildet **im Bezug auf**  $(M, d_M)$  die relative Umgebung eines Punktes  $x_0 \in M$ , relativ offene Teilmengen  $N \subset M$ , relativ innerere Punkte von  $N \subset M$  und das relative Innere von  $N \subset M$ .

**Beispiel** Die Metrik auf  $\mathbb{R}$  ist die Einschränkung der Metrik von  $\mathbb{C}$ . Eine offene Teilmenge  $N \subset \mathbb{R}$ , ist relativ offen in  $\mathbb{R}$  im Bezug auf  $\mathbb{C}$ . Zu jedem  $x \in N$  gibt es ein  $\varepsilon_x > 0$ , so daß

$$(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset N.$$

Die Vereinigung der offenen Kreisscheiben

$$G := \bigcup_{x \in N} U(x, \varepsilon_x)$$

ist offen in  $\mathbb{C}$  und es gilt  $N = G \cap \mathbb{R}$ .

**Bemerkung.** Einfacher bildet man die relativen Begriffe folgendermaßen:

**Bemerkung 3.4.80 (relative Begriffe)**

Es seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subset X$

1. Eine relative Umgebung eines Punktes  $x_0 \in M$  ist von der Form  $U \cap M$  mit einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $X$ .
2. Eine relative relativ offene Teilmenge  $N \subset M$  ist von der Form  $N = G \cap M$  mit einer offenen Menge  $G \subset X$ .
3. Es ist  $x_0 \in N$  relativ innerer Punkt von  $N \subset M$ , wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $X$  gibt, so daß  $U \cap M \subset N$ .

**Feststellung 3.4.81 (Charakterisierung: Stetigkeit)**

*Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:*

1.  $f$  ist stetig auf  $X$ .

2. Für jede offenen Teilmenge  $G \subset Y$  ist das Urbild  $f^{-1}(G)$  offen in  $X$ .

**Bemerkung.** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $M \subset X$ .

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$  ist genau dann stetig auf  $M$ , wenn für jede offenen Teilmenge  $G \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(G)$  relativ offen in  $M$  ist.

### Definition 3.4.82 (abgeschlossene Menge)

Es sei  $(X, d)$  ein Metrischer Raum und  $M \subset X$ .

1. Die Teilmenge  $M$  heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement  $X \setminus M$  offen ist.
2. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Berührungspunkt** von  $M$ , wenn  $x$  kein innerer Punkt des Komplements  $X \setminus M$  ist. Mit andere Worten:  $x \in X$  ist Berührungspunkt von  $M$ , wenn für alle Umgebungen  $U$  von  $x$

$$U \cap M \neq \emptyset.$$

3. Die Menge der Berührungspunkte von  $M$  heißt der **Abschluß** von  $M$  und wird mit  $M^-$  bezeichnet.

Man bezeichnet den Abschluß von  $M$  auch mit  $\overline{M}$ , nicht zu Verwechseln mit der Menge der konjugiert komplexen Elemente von  $M$ .

**Bemerkung** Eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält.

**Bemerkung.** Aus den Regeln 3.4.75 für offene Mengen folgen die entsprechenden Regeln für abgeschlossene Mengen.

### Bemerkung 3.4.83 (Regeln: abgeschlossene Mengen)

1. Nach Definition sind die leere Menge  $\emptyset$  und der ganze Raum  $X$  abgeschlossen.
2. Eine beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. Der Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

**Beispiel.** In einem metrischen Raum mit der diskreten Metrik ist jede Teilmenge abgeschlossen.

### Feststellung 3.4.84 (Abschluß abgeschlossen)

Der Abschluß einer Teilmenge  $M$  ist abgeschlossen:

$$(M^-)^- = M^-.$$

**Beweis.** Es sei  $x_0$  ein Berührungspunkt von  $M^-$ .

Zu einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $x_0$  mit  $V \subset U$ . Da  $x_0$  Berührungspunkt von  $M^-$  ist, gibt es ein

$$x_1 \in V \cap M^-.$$

Nach Korollar 3.4.77 ist die offene Menge  $V$  Umgebung von  $x_1$ . Da  $x_1$  Berührungspunkt von  $M$  ist, gibt es ein

$$x_2 \in V \cap M.$$

Also ist  $U \cap M \neq \emptyset$ . Da  $U$  beliebig war, folgt  $x_0 \in M^-$ .

### Feststellung 3.4.85 (Folgenkriterium)

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subset X$ . Für einen Punkt  $a \in X$  sind äquivalent

1.  $a$  ist ein Berührungspunkt von  $M$
2. Es gibt eine Folge  $(x_n)_n$  in  $M$ , die gegen  $a$  konvergiert.

### Korollar 3.4.86 (Folgenkriterium)

Für eine Teilmenge  $M \subset X$  sind äquivalent:

1.  $M$  ist abgeschlossen.
2. Für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $M$ , die in  $X$  konvergiert, ist der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$ .

### Übung. (Charakterisierung der Stetigkeit).

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig
2. Das Urbild  $f^{-1}(A)$  jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset Y$  ist relativ abgeschlossen in  $M$  (vgl. Feststellung 3.4.81).
3. Für alle Teilmengen  $N \subset M$  liegt das Bild des relativen Abschlusses von  $N$  im Abschluß des Bildes von  $N$ :

$$f(N^- \cap M) \subset (f(M))^-.$$

**Bemerkung.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}$ . Den **Grenzwert  $c$  einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$**  in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  hatten wir auf zwei Weisen charakterisiert.

Zunächst muß es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D$  geben, die gegen den Punkt  $a$  konvergiert. Äquivalent sind dann:

**1. Folgendefinition:** Für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $D$  folgt aus

$$x_n \rightarrow a \quad \text{stets} \quad f(x_n) \rightarrow c$$

(vgl. die allgemeine Grenzwertdefinition 2.3.27)

**2.  $\varepsilon$  -  $\delta$ -Definition:** Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x \in D$  aus

$$|x - a| < \delta \quad \text{stets} \quad |f(x) - c| < \varepsilon$$

folgt (vgl. Feststellung 2.3.5)

### Definition 3.4.87 (Grenzwert einer Funktion)

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ , eine Teilmenge  $M \subset X$  und eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$ .

Es sei  $a$  ein Berührungspunkt von  $M$ . Ein Punkt  $c \in Y$  heißt Grenzwert der Abbildung  $f$  im Punkte  $a$ , wenn folgendes gilt:

Zu jeder Umgebung  $V$  von  $c$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $a$ , so daß

$$f(U \cap M) \subset V.$$

Man schreibt kurz

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

oder  $f(x) \rightarrow c$  für  $x \rightarrow a$ .

### Feststellung 3.4.88 (Grenzwert eindeutig)

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ , eine Teilmenge  $M \subset X$  und eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$ .

Wenn  $f$  im Punkte  $a \in M^-$  einen Grenzwert hat, so ist dieser eindeutig bestimmt.

### Beweis Eindeutigkeit des Grenzwertes.

**Annahme:** Es seien  $c_1$  und  $c_2$  Grenzwerte von  $f$  im Punkte  $a \in M^-$ .

Nach der Hausdorff-Eigenschaft gibt es disjunkte Umgebungen  $V_1$  von  $c_1$  und  $V_2$  von  $c_2$  (Man vergleiche den Beweis zur Eindeutigkeit des Grenzwertes von Folgen 3.4.70).

Nach Voraussetzung gibt es für  $k = 1, 2$  Umgebungen  $U_k$  von  $a$ , so daß

$$f(U_k \cap M) \subset V_k.$$

Der Durchschnitt  $U := U_1 \cap U_2$  ist Umgebung von  $a$ . Da  $a \in M^-$  ist, gibt es ein  $x \in U \cap M$ . Man erhält nun den **Widerspruch**:

$$f(x) \in f(U \cap M) \subset f(U_1 \cap M) \cap f(U_2 \cap M) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

### Bemerkung 3.4.89 (äquivalente Def. des Grenzwertes)

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ , eine Teilmenge  $M \subset X$  und eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$ . Für einen Berührungspunkt  $a \in M^-$  sind äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  hat im Punkt  $a$  einen Grenzwert.
2. Für jede Folge  $(x_n)_n$  in  $M$ , die gegen  $a$  konvergiert, konvergiert die Folge  $(f(x_n))_n$ .
3. Es gibt ein  $c \in Y$  mit folgender Eigenschaft:

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß

$$d(f(x), c) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } d(x, a) < \delta.$$

In diesem Fall ist  $c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

### Bemerkung 3.4.90 (Grenzwert und Stetigkeit)

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ , eine Teilmenge  $M \subset X$  und eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$ . Für  $a \in M$  sind äquivalent:

1. Es existiert der Grenzwert von  $f$  im Punkt  $a$ .
2.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
3.  $f$  ist stetig im Punkte  $a$ .

**Bemerkung.** Der Satz 2.3.29 über die Komposition von Grenzwerten gilt allgemeiner in metrischen Räumen:

### Satz 3.4.91 (Komposition von Grenzwerten)

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$ ,  $M \subset X$ ,  $N \subset Y$  und Abbildungen

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Z.$$

1. Es sei  $a \in M^-$  und es existiere  $b := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Dann ist  $b \in N^-$ .

2. Es existiere  $c := \lim_{y \rightarrow b} g(y)$ . Dann hat auch  $g \circ f$  einen Grenzwert im Punkt  $a$  und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

**Bemerkung.** Nach dem Satz von BOLZANO WEIERSTRASS 2.7.5 hat in  $\mathbb{R}$  jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.

Mit dem Folgenkriterium 3.4.86 für die Abgeschlossenheit einer Menge kann man den Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS folgendermaßen formulieren:

**Feststellung 3.4.92 (Kompakte Teilmengen von  $\mathbb{R}$ )**

Für eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent:

1.  $M$  ist abgeschlossen und beschränkt.
2. Jede Folge in  $M$  hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in  $M$  liegt.

**Bemerkung** Nach Definition 3.4.93 heißt eine Teilmenge, die die Bedingung (2.) erfüllt, **kompakt**.

**Definition 3.4.93 (Kompakte metrische Räume)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt **Folgen-kompakt**, wenn jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert in  $M$  liegt.

Man sagt kurz: Jede Folge in  $M$  hat eine in  $M$  konvergente Teilfolge.

**Bemerkung.** Man sagt kurz:  $M$  ist ein **kompakter** metrischer Raum statt **Folgen-kompakter** Raum.

Allgemeiner werden **kompakte Räume** durch eine Eigenschaft der offenen Überdeckungen des Raumes definiert. Nach dem Satz von HEINE-BOREL ist für metrische Räume Kompaktheit äquivalent zur Folgen-Kompaktheit.

**Bemerkung.**

1. Eine Teilmenge eines diskreten metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie nur **endlich viele Punkte** hat, also eine endliche Menge ist..
2. *Kontinuierliche* Räume, die kompakt sind, erlauben vielfach ähnliche Schlüsse und Resultate wie endliche Mengen. Kompakte metrische Räume sind in vieler Hinsicht eine Verallgemeinerung der endlichen Mengen.

Beispiel:

- Eine reelle Funktion auf einer endliche Menge hat ein Maximum (vgl. Feststellung 1.3.21).
- Eine stetige reelle Funktion auf einem kompakten metrischen Raum hat ein Maximum (vgl. den Satz vom Maximum 2.6.3).

### Feststellung 3.4.94 (abg. Teilmenge eines kpt. Raumes)

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

1. Eine kompakte Teilmenge  $M \subset X$  ist abgeschlossen.
2. Ist  $M \subset X$  kompakt, so ist jede abgeschlossene Teilmenge  $N \subset M$  kompakt.

### Satz 3.4.95 (stetige Bild einer kpt. Menge)

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  und  $f : M \rightarrow Y$  stetig.

Ist  $M \subset X$  kompakt, so ist auch das Bild  $f(M) \subset Y$  kompakt.

### Satz 3.4.96 (Satz vom Maximum)

1. Eine kompakte Teilmenge der reellen Zahlen hat ein Maximum in  $\mathbb{R}$ .
2. Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subset X$  kompakt. Eine stetige Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein Maximum.

**Bemerkung.** Eine stetige reelle Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist beschränkt.

**Bemerkung.** Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine injektive, stetige Funktion auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $J := f(I)$  ein Intervall und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist wieder stetig (vgl. Korollar 2.5.15 und Satz 2.5.17)

Wenn  $I$  Vereinigung zweier Intervalle ist, ist die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion i.a. nicht stetig.

**Beispiel.**  $f : [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow [0, 2]$  mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{für } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Der nächste Satz zeigt, daß so ein Beispiel auf  $[0, 1] \cup [2, 3]$  nicht existiert.

**Bemerkung.** Für eine stetige bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen ist i. a. die Umkehrabbildung nicht stetig.

Wenn der Definitionsbereich aber kompakt ist, ist die Umkehrabbildung einer stetigen Bijektion automatisch stetig:

**Satz 3.4.97 (Stetigkeit der Umkehrabbildung)**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  kompakt und  $f : M \rightarrow Y$  stetig.

Ist  $f$  injektiv, so ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$  stetig.

**Beweis (Stetigkeit der Umkehrabbildung).**

Es sei  $f : M \rightarrow N$  bijektiv und stetig.

Wenn  $M \subset X$  kompakt ist, so ist nach Feststellung 3.4.94(1.)  $M$  abgeschlossen in  $X$ .

Wenn  $A \subset M$  abgeschlossen ist, so ist nach Feststellung 3.4.94(2.)  $A$  kompakt.

Dann ist nach Satz 3.4.95 das Bild  $f(A)$  kompakt und nach Feststellung 3.4.94(1.) ist  $f(A)$  abgeschlossen in  $Y$ .

Also ist das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset M$  unter der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  abgeschlossen. Dies besagt, daß  $f^{-1} : N \rightarrow M$  stetig ist (vgl. Feststellung 3.4.81).

**Übung.** Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(K, d_K)$  metrische Räume,  $K$  kompakt. Dann gilt:

1. Wenn  $M \subset X \times K$  abgeschlossen ist, dann ist die Projektion  $p_1(M)$  auf die erste Komponente abgeschlossen:

$$p_1(M) := \{x \mid x \in X, \exists y \in K : (x, y) \in M\}$$

Gilt dies auch für die zweite Komponente? Man gebe ein Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , für die  $p_1(M)$  offen ist. (Hinweis: Graph von  $1/x$ ).

2. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow K$  ist genau dann stetig, wenn ihr Graph  $\Gamma(f) \subset X \times K$  abgeschlossen ist.

Man gebe ein Beispiel einer unstetigen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit abgeschlossenen Graphen (Man experimentiere mit  $1/x$ ).

3. Es seien  $(Z, d_Z)$  ein metrischer Raum,  $g : X \times K \rightarrow Z$  stetig und  $z_0 \in Z$ . Die Gleichung

$$g(x, y) = z_0$$

sei für alle  $x \in X$  eindeutig lösbar.

Dann ist die dadurch eindeutig bestimmte Abbildung

$$f : X \rightarrow K \quad \text{mit} \quad g(x, f(x)) = z_0$$

stetig.

---

**Bemerkung.** Wir kennen bisher folgende Beispiele zur Konstruktion kompakter Mengen

**endliche** diskrete Mengen,

**abgeschlossene, beschränkte Teilmengen** von  $\mathbb{R}$ ,

**abgeschlossene Teilmengen** und **endliche Vereinigungen** kompakter Mengen,

**stetige Bilder** kompakter Mengen,

Der wichtigste Prozess zur Erzeugung neuer kompakter Räume ist das **Produkt metrischer Räume**. So entstehen aus abgeschlossenen, beschränkten Intervallen das abg. **Rechteck**

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

und der abgeschlossene **Quader**

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3.$$


---

### Definition 3.4.98 (Produkt metrischer Räume)

Das Produkt  $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$  zweier metrischer Räume  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  ist die Menge  $X \times Y$  mit der folgenden Metrik:

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

### Bemerkung 3.4.99 (Produkt von Umgebungen)

Im Produktraum  $(X, d_X) \times (Y, d_Y)$  sind die  $\varepsilon$ -Umgebungen eines Punktes  $(x_0, y_0)$  das Produkt der  $\varepsilon$ -Umgebungen der Komponenten:

$$U((x_0, y_0), \varepsilon) = U(x_0, \varepsilon) \times U(y_0, \varepsilon)$$

**Bemerkung.** Offene Mengen im Produktraum lassen sich im allgemeinen nicht als Produkt  $G_1 \times G_2$  zweier offener Mengen  $G_1$  und  $G_2$  schreiben, sondern nur als Vereinigung solcher Produkte.

---

### Bezeichnung 3.4.100 (endliche Produkte)

Das Produkt  $\prod_{\nu=1}^n (X_\nu, d_\nu)$  endlich vieler metrischer Räume  $(X_\nu, d_\nu)$ , ( $\nu = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ ) ist die Menge

$$\prod_{\nu=1}^n X_\nu = X_1 \times \cdots \times X_n$$

mit der Metrik  $d = d_{\max}$  :

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}.$$

Diese Bildung ist assoziativ:

$$\begin{aligned} ((X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n)) \times (X_{n+1}, d_{n+1}) \\ = (X_1, d_1) \times \dots \times (X_{n+1}, d_{n+1}). \end{aligned}$$

Es reicht daher meistens, zwei Faktoren zu untersuchen.

**Bemerkung.** Die oben definierte Metrik auf dem Produkt zweier metrischer Räume erzeugt in vielen Fällen nicht den durch die anschauliche Geometrie gegebenen Abstand.

Man kann auf dem Produkt mit anderen Formeln Metriken erzeugen. Z. B.

$$\begin{aligned} d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} \\ d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \end{aligned}$$

Diese Metriken erzeugen für einen Punkt im Produktraum dasselbe Umgebungssystem wie  $d_{X \times Y}$ . Man sagt, sie sind **äquivalent**.

Wir zeigen dies für die Metrik  $d_2$ .

### Bezeichnung 3.4.101 (äquivalente Metriken)

Es seien  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf einer Menge  $X$ .

$d_1$  und  $d_2$  heißen **äquivalent**, wenn die identische Abbildung von  $X$  in beiden Richtungen

$$\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

stetig ist.

**Bemerkung.** Zwei Metriken auf der gleichen Menge sind genau dann äquivalent, wenn sie das gleiche Umgebungssystem erzeugen.

In allen Aussagen, die nur vom Umgebungssystem abhängen, kann man eine Metrik durch eine äquivalente ersetzen.

**Beispiel.** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Die folgenden Funktionen sind **äquivalente Metriken**, die Werte in  $[0, 1]$  haben:

$$\begin{aligned} X \times X \ni (x_1, x_2) &\mapsto \max\{d(x_1, x_2), 1\}, \\ X \times X \ni (x_1, x_2) &\mapsto \frac{d(x_1, x_2)}{1 + d(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

In einem beliebigen metrischen Raum kann man also aus der Beschränktheit der Metrik auf einer Menge nichts schließen!

**Beschränktheit** einer Menge ist nur in normierten Vektorräumen ein sinnvoller Begriff (vgl. auch die Charakterisierung 3.4.108 kompakter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ).

### Feststellung 3.4.102 ( $d_2$ äquivalente Metrik)

Es seien  $(X_\nu, d_\nu)$ ,  $(\nu = 1, \dots, n)$  endlich viele metrische Räume und  $x := (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y := (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{\nu=1}^n X_\nu$ .

Es bezeichne  $d := d_{\max}$  die Metrik 3.4.100 auf dem Produktraum.

1. Eine weitere Metrik auf  $\prod_{\nu=1}^n X_\nu$  ist:

$$d_2(x, y) := \left( \sum_{\nu=1}^n d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Es gilt  $d \leq d_2 \leq \sqrt{n} d$ . Für die  $\varepsilon$ -Umgebungen gilt:

$$U\left(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, d\right) \subset U(x, \varepsilon, d_2) \subset U(x, \varepsilon, d).$$

$d$  und  $d_2$  erzeugen das gleiche Umgebungssystem von  $x$ .

### Beweis ( $d_2$ äquivalente Metrik).

1. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt, daß  $d_2$  eine Metrik ist.
2. Die Abschätzungen zwischen  $d$  und  $d_2$  sind offensichtlich. Hieraus folgen die Inklusionen der jeweiligen  $\varepsilon$ -Umgebungen.

Eine Teilmenge  $U$  ist Umgebung eines Punktes  $x$  im Bezug auf eine der beiden Metriken, wenn sie eine entsprechende  $\varepsilon$ -Umgebung enthält.

Aus der obigen Inklusion der  $\varepsilon$ -Umgebungen folgt, daß eine Umgebung bezüglich der einen Metrik auch Umgebung bezüglich der anderen Metrik ist.

### Korollar 3.4.103 (Produktraum $\mathbb{R}^n$ )

Der  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik ist das  $n$ -fache Produkt des metrischen Raumes  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung.** Das Produkt metrischer Räume ist so definiert, daß eine Abbildung (vgl. Bezeichnung ?? für Tupel von Abbildungen)

$$f = (f_X, f_Y) : Z \mapsto X \times Y$$

in einen Produktraum genau dann stetig ist, wenn ihre **Komponenten**

$$f_X : Z \rightarrow Y \quad \text{und} \quad f_Y : Z \rightarrow Y$$

stetig sind.

Man kann diese Eigenschaft auch zur **Charakterisierung des Produktes** verwenden.

Genauso kann man die Grenzwerte von Folgen und Funktionen **komponentenweise** bilden.

### Satz 3.4.104 (komponentenweise Stetigkeit)

Es seien  $(X; d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und  $(Z, d_Z)$  metrische Räume.

Eine Abbildung

$$f = (f_X, f_Y) : Z \mapsto X \times Y$$

in den Produktraum ist genau dann stetig im Punkt  $z \in Z$ , wenn ihre Komponenten

$$f_X : Z \rightarrow Y \quad \text{und} \quad f_Y : Z \rightarrow Y$$

im Punkt  $z$  stetig sind.

### Beweis (komponentenweise Stetigkeit).

$\Rightarrow$ : Es sei  $z \in Z$  und  $(x, y) := f(z)$ . Wenn  $U_X \in \mathcal{U}(x)$  und  $U_Y \in \mathcal{U}(y)$ , dann ist  $U_X \times U_Y \in \mathcal{U}(f(z))$ . Da  $f$  im Punkt  $z$  stetig ist, gilt:

$$f^{-1}(U_X \times U_Y) \in \mathcal{U}(z).$$

Es gilt:

$$f^{-1}(U_X \times U_Y) = f_X^{-1}(U_X) \cap f_Y^{-1}(U_Y).$$

Also ist die Obermenge  $f_X^{-1}(U_X) \in \mathcal{U}(z)$ , d.h.  $f_X$  ist stetig.

$\Leftarrow$ : Es sei  $(x, y) := f(z)$ . Jede Umgebung von  $(x, y) \in X \times Y$  enthält eine Umgebung der Form  $U_X \times U_Y$  mit  $U_X \in \mathcal{U}(x)$  und  $U_Y \in \mathcal{U}(y)$ .

Da  $f_X$  und  $f_Y$  im Punkt  $z$  stetig sind, ist

$$f_X^{-1}(U_X) \cap f_Y^{-1}(U_Y) \in \mathcal{U}(z).$$

Also ist  $f^{-1}(U_X \times U_Y) \in \mathcal{U}(z)$  und  $f$  stetig im Punkt  $z$ .

**Satz 3.4.105 (komponentenweise Konvergenz)**

Es seien  $(X; d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume.

Eine Folge  $((x_n, y_n))_n$  in  $X \times Y$  konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Komponenten

$$(x_n)_n \quad \text{und} \quad (y_n)_n$$

konvergieren.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

**Beweis (komponentenweise Konvergenz).**

$\Rightarrow$ . Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$ .

Wenn  $U_X \in \mathcal{U}(a)$  und  $U_Y \in \mathcal{U}(b)$ , dann ist  $U_X \times U_Y$  eine Umgebung von  $(a, b)$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$(x_n, y_n) \in U_X \times U_Y \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Dann ist  $x_n \in U_X$ ,  $y_n \in U_Y$ . Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

$\Leftarrow$ . Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

Jede Umgebung von  $(a, b) \in X \times Y$  enthält eine Umgebung der Form  $U_X \times U_Y$  mit  $U_X \in \mathcal{U}(a)$  und  $U_Y \in \mathcal{U}(b)$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$x_n \in U_X \quad \text{und} \quad y_n \in U_Y \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Dann ist  $(x_n, y_n) \in U_X \times U_Y$ . Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$ .

**Korollar 3.4.106 (komponentenweise Grenzwerte)**

Es seien  $(X; d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  metrische Räume und  $M \subset Z$ .

Eine Abbildung in den Produktraum

$$f = (f_X, f_Y) : M \mapsto X \times Y$$

hat genau dann einen Grenzwert im Punkte  $z_0 \in M^-$ , wenn die Komponenten

$$f_X : M \rightarrow X \quad \text{und} \quad f_Y : M \rightarrow Y$$

im Punkt  $z_0$  Grenzwerte haben. Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \left( \lim_{z \rightarrow z_0} f_X(z), \lim_{z \rightarrow z_0} f_Y(z) \right).$$

**Satz 3.4.107 (Produkt kompakter Räume)**

Das Produkt von endlich vielen kompakten metrischen Räumen ist kompakt.

Umgekehrt gilt:

Wenn die Faktoren verschieden von der leeren Menge sind, und ihr Produkt kompakt ist, so sind alle Faktoren kompakt.

**Bemerkung.** Man kann auch das Produkt von **abzählbar** vielen metrischen Räumen bilden. Das Produkt ist ein metrischer Raum. Es gilt, wenn alle Faktoren kompakt sind, ist auch das Produkt kompakt.

Ein entsprechendes Resultat gilt für beliebige Produkte kompakter *topologischer Räume* (Satz von TYCHONOFF bzw. TIKHONOV).

**Beweis (Produkt kompakter Räume).**

Es reicht das Resultat für zwei Faktoren zu zeigen, dann folgt es induktiv für endlich viele Faktoren.

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  kompakte metrische Räume.

Wir müssen zu einer Folge  $(x_n, y_n)_n$  in  $X \times Y$  eine konvergente Teilfolge finden.

Da  $X$  kompakt ist, hat die Folge  $(x_n)_n$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ .

Da  $Y$  kompakt ist, hat die Folge  $(y_{n_k})_k$  eine konvergente Teilfolge  $(y_{n_{k_l}})_l$ .

Dann ist  $(x_{n_{k_l}})_l$  eine konvergente Teilfolge.

Nach Satz 3.4.105 konvergiert die Teilfolge  $((x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}))_l$  in  $X \times Y$ .

**Satz 3.4.108 (kompakte Mengen im  $\mathbb{R}^n$ )**

Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Bemerkung.** 1. Die Beschränktheit einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  bezieht sich auf die euklidische Norm des  $\mathbb{R}^n$ :

$$\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$$

2. Nach Satz 3.4.112 gilt der Satz für jeden endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  und jede Norm auf  $V$ .

3. Da es zu einer Metrik  $d$  immer äquivalente beschränkte Metriken gibt, ist es nicht sinnvoll, Beschränktheit für beliebige Metriken zu erklären.

**Korollar 3.4.109 (kompakte Mengen im  $\mathbb{C}^n$ )**

Eine Teilmenge des  $\mathbb{C}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Beweis (kompakte Mengen im  $\mathbb{R}^n$ ).**

Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS 2.7.5 sind abgeschlossene beschränkte Intervalle kompakt in  $\mathbb{R}$ . Nach Satz 3.4.107 sind folglich die Quader

$$Q := \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu]$$

kompakt im Produktraum  $\mathbb{R}^n$  (vgl. 3.4.103).

Eine Beschränkte Menge  $M$  liegt in einem solchen Quader:

$$r := \sup_{x \in M} \|x\| < \infty \quad \Rightarrow \quad M \subset [-r, r]^n.$$

Wenn  $M$  zusätzlich abgeschlossen ist, ist  $M$  also kompakt.

Die Umkehrung ergibt sich aus dem Satz vom Maximum 3.4.96 und aus Feststellung 3.4.94

**Beweis (des korollars).** Als reeller Vektorraum ist  $\mathbb{C}^n$  isometrisch zu  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Bezeichnung 3.4.110 (Äquivalenz von Normen)**

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem Vektorraum  $V$  heißen äquivalent, wenn es Konstanten  $c > 0$  und  $C > 0$  gibt, so daß

$$c \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C \|\cdot\|_1.$$

**Bemerkung.** Wenn zwei Normen äquivalent sind, so sind die zugehörigen Metriken äquivalent (vgl. Bezeichnung 3.4.101) und auch uniform äquivalent (vgl. Bezeichnung 3.4.116).

Äquivalente Normen haben dieselben beschränkten Mengen.

**Beispiele 3.4.111** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  gilt für die Normen

$$\|x\|_1 := \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|, \quad \|x\|_2 := \left( \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq \nu \leq n} |x_\nu|$$

die Abschätzung

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty.$$

**Satz 3.4.112 (Normen auf endlichdim. Vektorraum)**

*Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  sind je zwei Normen äquivalent.*

*Die Aussage gilt entsprechend für endlichdimensionale komplexe Vektorräume.*

**Bemerkung.** 1. Wenn  $V$  ein reeller Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{R}} V = n$  ist, so ist  $V \cong \mathbb{R}^n$ . Es reicht, die Behauptung für den  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  zu zeigen.

2. Wenn  $V$  ein komplexer Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{C}} V = n$  ist, so ist  $V \cong \mathbb{C}^n$ . Als reeller Vektorraum ist  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ .

**Korollar 3.4.113 (Kpt. Teilmengen in  $n$ -dim. Vektorr.)** *Eine Teilmenge eines normierten, endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraumes ist genau dann **kompakt**, wenn sie **abgeschlossen** und **beschränkt** ist.*

### Beweis Normen auf endlichdim. Vektorraum.

Wir zeigen, daß auf dem  $\mathbb{R}^n$  jede Norm  $\|\cdot\|$  äquivalent zu euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  ist.

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\|x\| \leq \sum_{\nu=1}^n |x_{\nu}| \|e_{\nu}\| \leq \left( \sum_{\nu=1}^n \|e_{\nu}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\nu=1}^n \|x_{\nu}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C \|x\|_2.$$

$\|\cdot\|$  ist stetig auf dem euklidischen  $\mathbb{R}^n$ , da  $\|x - y\| \leq C \|x - y\|_2$ .

Die Einheitssphäre  $\mathbb{S}^n$  ist in dem euklidischen  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die stetige Funktion  $\|\cdot\|$  hat auf  $\mathbb{S}^n$  ein Minimum in einem Punkt  $x_0$  mit  $\|x_0\|_2 = 1$ :

$$c := \min\{\|x\| \mid x \in \mathbb{S}^n\} = \|x_0\| > 0.$$

Da Normen absolut-homogen sind, folgt für  $x \neq 0$ :

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \cdot \|x\|_2 \geq c \cdot \|x\|_2.$$

### Bemerkung. (topologische und uniforme Begriffe)

1. **Metrische Begriffe** sind die nur mit Hilfe des Abstandes definierten Begriffe. Zum Beispiel:

- für Folgen: Konvergenz, Cauchyfolge.
- für Funktionen: Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit,
- für Mengen: offene Menge, Vollständigkeit, Kompaktheit.

Diese zerfallen in zwei Klassen. Wir demonstrieren dies an einem Beispiel. *Genauer findet man dies in einem Buch über Topologie*

2. Der übliche Abstand auf  $\mathbb{C}$  ist der **euklidische Abstand** in der Ebene. Diese Metrik beruht auf dem Isomorphismus der reellen Vektorräume  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

---

3. Auf  $\mathbb{C}^*$  bietet sich eine andere Metrik an. Die multiplikative Gruppe  $\mathbb{C}^*$  ist Produkt zweier eindimensionaler Gruppen:

$$\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{R}, +) \times \mathbb{T} \quad \text{wobei } z \cong (\log |z|, \frac{z}{|z|}).$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{T}$  ist ein unendlich langer **Zylinder** (*Schlauch*). Bezeichnet man die Länge des kürzeren Bogens auf  $\mathbb{T}$  zwischen zwei Punkten  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mit  $d_{\mathbb{T}}(\zeta_1, \zeta_2)$  (vgl. Beispiel 3.4.66(2.)), so berechnet man den Abstand auf dem Zylinder (passend aufschneiden und flach legen):

$$d_{\mathbb{C}^*}(z, w) := \left( (\log |z| - \log |w|)^2 + d_{\mathbb{T}}\left(\frac{z}{|z|}, \frac{w}{|w|}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$(\mathbb{C}^*, d_{\mathbb{C}^*}) \cong (\mathbb{R}, +) \times \mathbb{T}$  ist ein **isometrischer** Gruppenisomorphismus.

---

4. Auf  $\mathbb{C}^*$  haben wir zwei Metriken:  $d_{\mathbb{C}}$  und  $d_{\mathbb{C}^*}$ . Wir wollen an diesem Beispiel zeigen, was mit **topologischen** und **uniformen** Begriffen gemeint ist – genauer und abstrakter definiert man dies später in der Topologie. Die Frage ist, ob und wie die in (1.) aufgezählten Begriffe von der Wahl **der Metrik abhängen**.

10. Diese beiden Metriken  $d_{\mathbb{C}}$  und  $d_{\mathbb{C}^*}$  erzeugen für einen Punkt aus  $\mathbb{C}^*$  die gleichen **Umgebungen**. Sie sind also äquivalent im Sinne der Definition 3.4.101.

Man nennt Begriffe, die man auf den Umgebungsbegriff zurückführen kann, **topologische Begriffe** und äquivalente Metriken auch **topologisch äquivalent**.

Zu den topologischen Begriffen gehören also

- Konvergenz, Stetigkeit, offene Menge, Kompaktheit

Ganz anders verhalten sich die übrigen Begriffe aus (1.)

---

6.  $\mathbb{C}$  mit der Metrik  $d_{\mathbb{C}}$  ist **vollständig**.

7. Die Teilmenge  $\mathbb{C}^*$  ist in der Metrik  $d_{\mathbb{C}}$  **nicht vollständig**, da ihr der Grenzpunkt 0 fehlt. Dagegen ist  $\mathbb{C}^*$  in der Metrik  $d_{\mathbb{C}^*}$  **vollständig**, da  $\mathbb{C}^*$  isometrisch zu dem vollständigen Raum  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$  ist.

8. Die Eigenschaft **Cauchy-Folge** hängt also stark von der Wahl der Metrik ab.

Z. B. ist eine **Nullfolge** in  $\mathbb{C}$ , die in  $\mathbb{C}^*$  liegt, in der Metrik  $d_{\mathbb{C}}$  eine **Cauchyfolge** – hat aber in  $\mathbb{C}^*$  keinen Grenzwert. In der Metrik  $d_{\mathbb{C}^*}$  ist dieselbe Folge **unbeschränkt**, also sicher keine Cauchyfolge.

9. Die Funktion  $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto \log |z| \in \mathbb{R}$  ist stetig. Bezüglich der euklidischen Metrik  $d_{\mathbb{C}}$  ist sie **nicht gleichmäßig stetig**, bezüglich der Metrik  $d_{\mathbb{C}^*}$  ist sie sogar **kontrahierend**.

10. Die Begriffe

- Cauchyfolge, Vollständigkeit, gleichmäßige Stetigkeit

können – aber müssen nicht – für (topologisch) äquivalente Metriken ganz unterschiedlich sein. Wir werden zum Beispiel sehen, daß sie für alle Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  zusammenfallen.

Das Gemeinsame an diesen Begriffen ist, daß sie auf einem **Größenvergleich** von Umgebungen verschiedener Punkte beruhen. Am leichtesten sieht man das an der **gleichmäßigen Stetigkeit**.

Man faßt diese auf einer Gleichmäßigkeit beruhenden Begriffe als **uniforme** Begriffe zusammen. Wir werden den Größenvergleich zunächst direkt durch eine Metrik vornehmen und anschließend eine passende **uniforme Äquivalenz** von Metriken erklären.

**Bemerkung.** Wir beginnen mit der **gleichmäßigen Stetigkeit** (vgl. Definition 2.6.6)

#### Definition 3.4.114

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$ .

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$  heißt **gleichmäßig stetig** wenn folgendes gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x_1, x_2 \in M$  aus  $d_X(x_1, x_2) < \delta$  stets  $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  folgt.

In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in M : \\ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Die Feststellung 2.1.5 gilt sinngemäß für die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

#### Bemerkung.

1. Ein Vergleich der Definitionen 3.4.114 der gleichmäßigen Stetigkeit und der Stetigkeit 3.4.72 zeigt, daß gleichmäßig stetige Abbildungen stetig sind.
2. Um den Unterschied herauszuarbeiten, kann man die gleichmäßige Stetigkeit auch so formulieren:

**Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x \in M$  gilt:**

$$f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$$

Dagegen bedeutet die Stetigkeit von  $f$ :

**Zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß**

$$f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$$

**Bezeichnung (Lipschitz-stetige Abbildung).**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$ .

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$  heißt **Lipschitz-stetig** (vgl. Definition 2.4.1), wenn es eine Konstante  $L \in \mathbb{R}_+$  so gibt, daß

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) \quad \text{für } x_1, x_2 \in X.$$

Das Beispiel der uniform äquivalenten Metriken

$$d_Y \quad \text{und} \quad \max\{d_Y, 1\}$$

zeigt, daß die Lipschitz-Stetigkeit nicht erhalten bleibt, wenn eine der Metriken durch eine uniform äquivalente ersetzt wird.

**Bezeichnung (Isometrie).**

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow Y$  heißt **Isometrie**, wenn

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad \text{für } x_1, x_2 \in X.$$

**Bemerkung 3.4.115 (Komposition glm. stetiger Abb.)**

Gegeben seien metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  und Abbildungen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Wenn  $f$  und  $g$  gleichmäßig stetig sind, dann ist auch ihre Komposition  $g \circ f$  gleichmäßig stetig.

**Bezeichnung 3.4.116 (uniform äquivalente Metriken)**

Es seien  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf einer Menge  $X$ .

$d_1$  und  $d_2$  heißen **uniform äquivalent**, wenn die identische Abbildung von  $X$  in beiden Richtungen

$$\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

**gleichmäßig stetig** ist.

**Bemerkung.** Da die Komposition gleichmäßig stetiger Abbildungen wieder gleichmäßig stetig ist, bleibt eine Abbildung gleichmäßig stetig, wenn man die Metriken auf dem Definitionsbereich oder dem Wertebereich durch uniform äquivalente Metriken ersetzt.

**Bemerkung 3.4.117 (uniforme Äquivalenz)**

Es seien  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf einer Menge  $X$ .

1.  $d_1$  und  $d_2$  sind **genau dann** uniform äquivalent, wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : \begin{cases} d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon, \\ d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x, y) < \varepsilon. \end{cases}$$

2. Häufig kann man sogar Lipschitz-Stetigkeit von  $id_X$  nachweisen. **Hinreichend** für uniforme Äquivalenz ist:

Es gibt Konstanten  $c > 0$ ,  $C > 0$ , so daß

$$c d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y) \quad \text{für } x, y \in M$$

gilt.

**Satz 3.4.118 (stetige Abb. auf kpt. Raum glm. stetig)**

Eine **stetige** Abbildung

$$f : K \rightarrow X$$

von einem **kompakten** metrischen Raum  $(K, d_K)$  in einen metrischen Raum  $(X, d_X)$  ist **gleichmäßig stetig**.

**Übung.** Mit den Bezeichnungen von Satz 3.4.118 gilt:

1.  $f$  injektiv, stetig  $\Rightarrow f$  und  $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$  glm.stetig.
2. Wenn  $d_1$  eine weitere Metrik auf  $K$  ist, so daß die identische Abbildung

$$id : (K, d_K) \rightarrow (K, d_1)$$

stetig ist, dann sind  $d_K$  und  $d_1$  uniform äquivalent.

Der Beweis des Satzes folgt dem Beweisgang in Beispiel 2.7.7.

**Beweis (stetige Abb. auf kpt. Raum glm. stetig).**

**Annahme:**  $f : K \rightarrow X$  nicht gleichmäßig stetig.

Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n$  in  $K$  so, daß

$$d_K(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d_X(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Da  $K$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  und

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K.$$

Da  $d_K(x_{n_k}, y_{n_k}) = \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ , ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

Da  $f$  stetig ist, folgt nun ein Widerspruch:

$$0 = d_X(f(c), f(c)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_X(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

**Bemerkung.** Zur Definition von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$  vergleiche man ??.

#### Definition 3.4.119 (Cauchy-Folge)

Eine Folge  $(x_n)_n$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn folgendes gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  aus

$$m, n \geq n_0 \quad \text{stets} \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{folgt.}$$

In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** 1. Das folgende Lemma zeigt, daß die Eigenschaft **Cauchy-Folge** sich nicht ändert, wenn man die Metrik durch eine uniform äquivalente ersetzt.

2. Das folgende Lemma ist der Schlüssel zu einem wichtigen Fortsetzungssatz für gleichmäßig stetige Abbildungen. (vgl. hierzu den Fortsetzungssatz 2.4.4 für Lipschitz-stetige Funktionen).

#### Lemma 3.4.120 (Bild von Cauchy-Folgen)

Eine gleichmäßig stetige Abbildung bildet Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen ab.

#### Definition 3.4.121 (vollständiger metrischer Raum)

Eine metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  einen Grenzwert in  $X$  hat.

**Satz 3.4.122 (Vollständigkeit des Produktraumes)**

Das Produkt endlich vieler vollständiger, metrischer Räume ist vollständig.

**Bemerkung.** Man kann auch das Produkt von **abzählbar** vielen metrischen Räumen bilden. Das Produkt ist ein metrischer Raum. Es gilt, wenn alle Faktoren vollständig sind, ist auch das Produkt vollständig.

**Korollar 3.4.123 ( $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  vollständig)**

1. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{R}^n$  vollständig.
2.  $\mathbb{C}$  ist vollständig.
3.  $\mathbb{C}^n$  ist vollständig
4. Ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer normierter Vektorraum ist vollständig.

**Beweis (Vollständigkeit des Produktraumes).**

Es seien  $(X_\nu, d_\nu)$ ,  $(\nu = 1, \dots, n)$  vollständige, metrische Räume und  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $\prod_{\nu=1}^n X_\nu$ . Der Produktraum trage die Metrik  $d_{\max}$ . Da die Projektionen

$$p_\mu : \prod_{\nu=1}^n X_\nu \rightarrow X_\mu$$

auf die Komponenten kontrahierend sind, bilden die Komponenten

$$x_{\mu,n} := p_\mu(x_n)$$

für  $\mu = 1, \dots, n$  eine Cauchy-Folge in  $(X_\mu, d_\mu)$ .

Da die Faktoren  $X_\mu$  vollständig sind, existieren die Grenzwerte

$$c_\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\mu,n} \in X_\mu.$$

Nach Satz 3.4.105 konvergiert die Folge  $(x_n)_n$  gegen  $c := (c_1, \dots, c_n)$ .

**Satz 3.4.124 (Fortsetzung glm.-stetiger Funktn.)**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $M \subset X$  und  $f : M \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig.

Wenn  $Y$  vollständig ist, dann hat  $f$  genau eine **stetige** Fortsetzung  $\tilde{f} : M^- \rightarrow Y$  auf den Abschluß von  $M$ .

$\tilde{f}$  ist ebenfalls gleichmäßig-stetig.

---

**Beweis (Fortsetzung glm.-stetiger Abbildungen).**

**Bildung der Fortsetzung:** Zu  $x \in M^-$  gibt es eine Folge  $(x_n)_n$  in  $M$ , die gegen  $x$  konvergiert.

Da  $(x_n)_n$  ein Cauchyfolge in  $M$  ist, ist nach Lemma 3.4.120  $(f(x_n))_n$  eine Cauchyfolge in  $Y$ . Da  $Y$  vollständig ist, existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

Nach dem Reißverschlußprinzip 2.3.17 konvergiert für jede Folge  $(\xi_n)_n$  in  $M$  mit Grenzwert  $x$  die Bildfolge  $f(\xi_n) \rightarrow y$ .

Da  $f$  stetig ist, ist  $y = f(x)$  für  $x \in M$ .

Wir definieren die Fortsetzung  $\tilde{f} : M^- \rightarrow Y$  durch

$$\tilde{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{wobei } (x_n)_n \text{ in } M \text{ und } x_n \rightarrow x.$$

**Eindeutigkeit:** Wenn wir gezeigt haben, daß  $\tilde{f}$  stetig ist, so ist es durch diese Vorschrift eindeutig bestimmt.

---

**Geichmäßige Stetigkeit der Fortsetzung:** Da  $f : M \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig ist, gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß

$$d_Y(f(u), f(v)) < \varepsilon \quad \text{für } u, v \in M \text{ mit } d_X(u, v) < \delta.$$

Es sei nun  $d(x, \xi) < \delta$ .

Zu  $x, \xi \in M^-$  wähle Folgen  $(x_n)_n, (\xi_n)_n$  in  $M$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $\xi_n \rightarrow \xi$ .

Dann konvergiert  $d_X(x_n, \xi_n) \rightarrow d_X(x, \xi)$ .

Da  $d(x, \xi) < \delta$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$d_X(x_n, \xi_n) < \delta \quad \text{für } n \geq n_0$$

und folglich  $d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ .

Hieraus folgt:

$$d(f(x), f(\xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(\xi_n)) \leq \varepsilon.$$

Also ist  $\tilde{f}$  gleichmäßig stetig.

---

**Bezeichnung 3.4.125 (Räume von Abbildungen)**

Für eine Menge  $M$ , einen metrischen Raum  $(Y, d_Y)$  bezeichne

$\mathcal{F}(M, Y)$  die Menge aller Abbildungen von  $M$  in  $Y$ .

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von  $\mathcal{F}(M, Y)$ :

Für eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $(X, d_X)$  sei

$\mathcal{C}(M, Y)$  die Menge der **stetigen** Abbildungen.

Ist  $V$  ein normierter Vektorraum, so sei

$\mathcal{B}(M, V)$  der Vektorraum der **beschränkten** Abbildungen von  $M$  in  $V$

$\mathcal{C}_b(M, V)$  der Vektorraum der **stetigen, beschränkten** Abbildungen.

**Bemerkung.** Für eine Folge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{F}(M, X)$  betrachten wir die

**punktweise** Konvergenz gegen einen Grenzwert  $f : M \rightarrow X$  (vgl. Definition 2.8.3).

**gleichmäßige** Konvergenz gegen einen Grenzwert  $f : M \rightarrow X$ . (vgl. Definition 2.8.5)

### Satz 3.4.126 (glm. Stetigkeit der Grenzabbildung)

Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{F}(X, Y)$ , die gleichmäßig auf  $X$  gegen  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  konvergiert.

1. Sind alle  $f_n$  in einem Punkt  $x_0 \in M$  stetig, so ist auch die Grenzabbildung  $f$  in  $x_0$  stetig.
2. Sind alle  $f_n$  gleichmäßig stetig auf  $X$ , so ist auch die Grenzabbildung  $f$  gleichmäßig stetig.

### Beweis (glm. Stetigkeit der Grenzabbildung).

1. Für den Beweis der Stetigkeit vgl. den Beweis von Satz 2.8.6
2. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Da die Folge  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f$  konvergiert, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in X$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

ist. Da  $f_{n_0}$  gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x_1, x_2 \in M$  aus

$$d_X(x, x_2) < \delta \quad \text{stets} \quad d_Y(f_{n_0}(x_1), f_{n_0}(x_2)) < \varepsilon$$

folgt. Dann gilt für  $x_1, x_2 \in M$  mit  $d_X(x_1, x_2) < \delta$ :

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_1), f(x_2)) &\leq d_Y(f(x_1), f_{n_0}(x_1)) \\ &\quad + d_Y(f_{n_0}(x_1), f_{n_0}(x_2)) + d_Y(f_{n_0}(x_2), f(x_2)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

**Satz 3.4.127 (Cauchy-Kriterium für glm. Konv.)**

Es sei  $M$  eine Menge und  $(Y, d_Y)$  ein **vollständiger** metrischer Raum.

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  in  $\mathcal{F}(M, Y)$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $M$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 \forall x \in X : d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

**Beweis.**

$\Rightarrow$ : Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiere gleichmäßig gegen  $f$ . Es gibt also zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0 \text{ und } x \in M.$$

Dann gilt für alle  $n, m \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f_m(x)) &\leq d_Y(f_n(x), f(x)) + d_Y(f(x), f_m(x)) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ : Wenn die Cauchybedingung des Satzes erfüllt ist, dann ist die Folge der Funktionswerte  $(f_n(x))_n$  eine Cauchyfolge in  $Y$ . Da  $Y$  vollständig ist, gibt es die Grenzfunktion

$$f \in \mathcal{F}(M, Y) \quad \text{mit} \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle ein passendes  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_0 \text{ und } x \in M.$$

Dann folgt für  $n \geq n_0$  und alle  $x \in M$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Die  $f_n$  konvergieren gleichmäßig auf  $M$  gegen  $f$ .

**Bemerkung.** In Definition 2.8.8 hatten wir die sup-Norm einer beschränkten reellen Funktion eingeführt und gezeigt:

- eine Funktionenfolge in  $\mathcal{B}(M)$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $M$ , wenn sie in der sup-Norm konvergiert (vgl. ??).
- Funktionenfolgen, die in der sup-Norm Cauchy-Folgen sind, konvergieren

- Also ist  $(\mathcal{B}(M), \|\cdot\|_{\text{sup}})$  eine vollständig normierte Algebra.
- Da die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist (vgl. Satz 2.8.6), ist der Raum  $\mathcal{C}_b(M)$  der stetigen, beschränkten Funktionen eine abgeschlossene Unter algebra von  $\mathcal{B}(M)$ .

**Definition 3.4.128** ((Norm  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  auf  $\mathcal{B}(M, V)$ ))

Es seien  $M$  eine Menge und  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Man definiert die **Norm** einer beschränkten Abbildung

$$f : M \rightarrow V$$

als

$$\|f\| := \sup_{x \in M} \|f(x)\|.$$

**Feststellung 3.4.129** (Eigenschaften der sup-Norm)

Es seien  $M$  eine Menge und  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für  $f, g \in \mathcal{B}(M, V)$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt:

1.  $\|f\| \geq 0$ , und  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$ ,
2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ,
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,

D. h.  $\mathcal{B}(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}}$  ist ein normierter Raum.

Wenn  $(V, \|\cdot\|)$  eine **normierte Algebra** ist, so gilt

4.  $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ .

D. h.  $\mathcal{B}(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}}$  ist eine normierte Algebra.

**Bezeichnung.** Ein normierter Vektorraum, der vollständig ist, heißt ein **Banach-Raum**.

STEFAN BANACH, 1892-1945

**Bemerkung.** Aus Satz 3.4.127 bzw. Satz 3.4.126 erhält man:

**Satz 3.4.130** ( $\mathcal{B}(M, V)$  vollständig normiert)

Es seien  $M$  eine Menge und  $(V, \|\cdot\|)$  ein **vollständiger** normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum (**Banach-Raum**).

Dann ist  $\mathcal{B}(M, V)$  mit der sup-Norm vollständig.

**Korollar 3.4.131** ( $C_b(X, V)$  vollständig normiert)

Es seien  $X$  ein metrischer Raum und  $(V, \|\cdot\|)$  ein **Banach-Raum**.

Der Raum  $C_b(M, V)$  der beschränkten, stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $V$  mit der sup-Norm ist vollständig.

**Bemerkung. (lokal gleichmäßige Konvergenz).**

1. Für Folgen von Abbildungen  $(f_n)_n$  ist die punktweise Konvergenz i. a. nicht ausreichend. Die gleichmäßige Konvergenz ist häufig eine zu starke Forderung, die man nicht erfüllen kann.

2. Ein guter Kompromis ist die **lokal gleichmäßige Konvergenz** und die **lokal gleichmäßige Cauchy-Bedingung**.

3. In vielen praktischen Fällen ist die **lokal gleichmäßige Konvergenz** und die **lokal gleichmäßige Cauchy-Bedingung** die Konvergenz bzw. Cauchy-Bedingung in einer gewissen Metrik auf dem Raum der Abbildungen. Man rechnet i.a. nicht mit dieser Metrik. Man muß nur wissen, daß es sie gibt, um die **Resultate über metrische Räume** anzuwenden.

4. Diese Metrik ist etwas unhandlich und es gibt für sie keine *natürlichen* Formeln. Wir werden eine Formel angeben. Die Metrik ist dadurch bis auf uniforme Äquivalenz festgelegt

**Bezeichnung 3.4.132** (lokal glm. Konvergenz)

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $(f_n)_n$  eine Folge von Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

1. Die Folge  $(f_n)_n$  heißt **lokal gleichmäßig konvergent** gegen eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$  die Folge der Einschränkungen  $(f_n|_K)_n$  gleichmäßig auf  $K$  gegen  $f|_K$  konvergiert.
2. Die Folge  $(f_n)_n$  heißt **lokal gleichmäßige Cauchy-Folge**, wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$  die Folge der Einschränkungen  $(f_n|_K)_n$  das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz auf  $K$  erfüllt (vgl. Satz 3.4.127).

**Satz 3.4.133** (Stetigkeit des Grenzwertes)

Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{F}(X, Y)$ , die lokal gleichmäßig auf  $X$  gegen  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  konvergiert.

Sind alle  $f_n$  in einem Punkt  $x_0 \in M$  stetig, so ist auch die Grenzabbildung  $f$  in  $x_0$  stetig.

**Bezeichnung 3.4.134 (offen-kompakte Ausschöpfung)**

Es sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(K_n)_n$  kompakter Teilmengen von  $X$  heißt eine **offen-kompakte** Ausschöpfung, wenn

1. alle  $K_n$  kompakt sind,
2. die Folge  $(K_n)_n$  eine **Ausschöpfung** ist:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

3.  $K_n$  im Inneren von  $K_{n+1}$  liegt:

$$K_n \subset K_{n+1}^\circ \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

Man schreibt kurz  $K_n \Subset K_{n+1}$ .

**Beispiele 3.4.135 (offen-kompakte Ausschöpfung)****Feststellung 3.4.136 (offen-kompakte Ausschöpfung)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $(K_n)_n$  eine offen-kompakte Ausschöpfung von  $X$ .

Dann gibt es zu jeder kompakten Teilmenge  $M \subset X$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$M \subset K_{n_0}.$$

**Satz 3.4.137 (Metrik zur lokal glm. Konv)**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $(K_n)_n$  eine offen-kompakte Ausschöpfung von  $X$ .

1. Dann ist

$$d(f, g) := \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \min\{d_{\text{sup}}(f|_{K_n}, g|_{K_n}), 1\} \right\}$$

eine Metrik auf  $\mathbb{F}(X, Y)$ .

2. Eine Folge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{F}(X, Y)$  ist genau dann lokal gleichmäßig konvergent gegen eine  $f \in \mathbb{F}(X, Y)$ , wenn

$$d(f_n, f) \rightarrow 0.$$

3. Eine Folge  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{F}(X, Y)$  ist genau dann eine lokal gleichmäßige Cauchy-Folge, wenn sie eine Cauchy-Folge in der Metrik  $d$  ist.

**Bezeichnung 3.4.138 (dichte Teilmenge)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn der Abschluß

$$M^- = X.$$

**Bezeichnung.** Wenn  $N \subset M \subset X$ , dann heißt  $N$  **dicht in  $M$** , wenn der relative Abschluß  $N^- \cap M$  gleich  $M$  ist:

$$N^- \cap M = M.$$

**Beispiele 3.4.139 (dichte Teilmengen)**

1. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind dicht in  $\mathbb{R}$  (vgl. Satz 2.3.32)
2. der Körper  $\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{C}$ .
3. Die Gruppe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist durch den Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Q} \ni t \mapsto \exp(2\pi it)$  dicht in die Torusgruppe  $\mathbb{T}$  eingebettet.

**Definition 3.4.140 (Vervollständigung)**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $j : X \rightarrow Y$  eine **isometrische** Abbildung.

Der Raum  $Y$  – genauer: das Paar  $(Y, j)$  – heißt **Vervollständigung** von  $X$ , wenn

$Y$  **vollständig**, und das Bild  $j(X)$  **dicht** in  $Y$  ist.

**Bemerkung.** Es sei  $(Y, j : X \hookrightarrow Y)$  Vervollständigung von  $X$ . Nach Satz 3.4.124 hat jede gleichmäßig stetige Abbildung

$$f : X \rightarrow Z$$

in einen vollständig metrischen Raum  $Z$  eine eindeutig bestimmte (gleichmäßig) stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad \tilde{f} \circ j = f.$$

Offensichtlich gilt:  $f$  isometrisch  $\Rightarrow \tilde{f}$  isometrisch.

**Korollar 3.4.141 (Eindeutigkeit der Vervollständigung)**

Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y_1, d_1)$ ,  $(Y_2, d_2)$  metrische Räume und  $j_1 : X \rightarrow Y_1$ ,  $j_2 : X \rightarrow Y_2$  isometrische Abbildungen.

Wenn  $(Y_1, j_1)$  und  $(Y_2, j_2)$  **Vervollständigungen** von  $X$  sind, dann gibt es genau eine isometrische, bijektive Abbildung

$$j_{1,2} : Y_1 \rightarrow Y_2,$$

so daß  $j_2 = j_{1,2} \circ j_1$  gilt.

Dann gilt  $j_1 = j_{1,2}^{-1} \circ j_2$

**Bemerkung.** Die Vervollständigung ist bis auf eine Isometrie eindeutig bestimmt. Im allgemeinen fixiert man eine Vervollständigung  $(X^\sim, j)$  von  $X$  und schreibt  $j$  kurz als Inklusion:

$$X \subset X^\sim.$$

**Bemerkung.**

Wenn man die reellen Zahlen bereits zu Verfügung hat, kann man jedem metrischen Raum  $X$  **leicht** isometrisch in den vollständigen metrischen Raum  $\mathcal{B}(X)$  einbetten.

Diese Konstruktion beruht darauf, daß ein Punkt eines metrischen Raumes eindeutig bestimmt ist, wenn man seinen Abstand zu allen anderen Punkten kennt.

- Nur bei der Konstruktion der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als Vervollständigung der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sollte man eine anderen Weg benutzen, der die Existenz von  $\mathbb{R}$  nicht bereits voraussetzt!

Anschließend betrachten wir die **Cantorsche** Beschreibung der Vervollständigung als Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen.

**Beispiele 3.4.142 (Konstruktion einer Vervollständigung)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $X \neq \emptyset$ .

1. Zu  $a \in X$  bilde man die Abstandsfunktion:

$$d_a := d(a, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$d_a - d_b \in \mathcal{B}(X) \quad \text{und} \quad \|d_a - d_b\|_{\text{sup}} = d(a, b).$$

Der Abstand der Funktionen  $d_a$  und  $d_b$  ist gleich dem Abstand der Punkte  $a$  und  $b$ .

2. Es sei  $\mathcal{F}(X)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller reellen Funktionen auf  $X$ . Man fixiere einen Punkt  $a_0 \in X$  und bilde den affinen Unterraum

$$V := d_{a_0} + \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}(X).$$

- 
3. Für alle  $a \in X$  ist  $d_a \in V$ . Der affine Raum  $V$  hängt nicht von der Wahl von  $a_0 \in X$  ab.
4. Für  $f, g \in V$  setze man als Abstand

$$d_{\text{sup}}(f, g) := \|f - g\|_{\text{sup}}.$$

$V$  ist vollständig, da  $V$  isometrisch zu dem vollständigen, metrischen Raum  $\mathcal{B}(X)$  ist.

5. Die Abbildung

$$j : X \rightarrow V \quad \text{mit} \quad j : a \mapsto d_a \in V$$

ist isometrisch.

6. Man setze  $X^\sim := j(X)^\sim$ . Dann ist  $(X^\sim, j)$  eine Vervollständigung von  $X$ .

**Satz 3.4.143 (Existenz der Vervollständigung)**

*Jeder metrische Raum hat eine Vervollständigung.*

---

**Bemerkung.** Nach einer auf G. CANTOR zurückgehenden Idee fasse man die Punkte  $x^\sim \in X^\sim$  der Vervollständigung als **Äquivalenzklasse aller Cauchyfolgen** in  $X$  auffassen, die gegen  $x^\sim$  konvergieren.

**Bemerkung 3.4.144 (Klassen von Cauchy-Folgen)**

Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum mit einer Vervollständigung  $X \subset Y$ .

Auf der Menge  $CF(X)$  aller Cauchy-Folgen in  $X$  erkläre man die **Äquivalenzrelation**

$$(x_n) \sim (y_n)_n \quad :\Leftrightarrow \quad d(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

Es sei  $X^\sim := CF(X)/\sim$  die Menge der Äquivalenzklassen. Die Abbildung

$$CF(X) \ni (x_n)_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in Y$$

erzeugt eine Bijektion von  $X^\sim \rightarrow Y$ .

**Beweis (Klassen von Cauchy-Folgen).**

Offensichtlich sind zwei Cauchy-Folgen genau dann äquivalent, wenn sie in der Vervollständigung den gleichen Grenzwert haben.

**Bemerkung (Konstruktion der Vervollständigung).**

Man kann auch die Menge  $X^\sim$  der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen mit folgender Metrik versehen:

$$d_\sim(x^\sim, y^\sim) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{wobei} \quad (x_n)_n \in x^\sim, (y_n)_n \in y^\sim.$$

Dann zeige man, daß  $(X^\sim, d_\sim)$  vollständig ist.

Anschließend identifiziert man die Punkte von  $X$  mit den Äquivalenzklassen der konstanten Folgen.

*Diese nützliche Konstruktion der Vervollständigung ist etwas aufwendiger. Wir haben diese Konstruktion umgangen, indem wir zunächst in Beispiel 3.4.142 eine andere Vervollständigung angeben haben, bei der man weniger zu rechnen hat.*

**Bemerkung (Klassen von Cauchy-Folgen).**

Die Beschreibung der Vervollständigung  $X^\sim$  als Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in  $X$  ist anschaulich und gut geeignet, um die **Vererbung von Eigenschaften** von  $X$  auf die Vervollständigung zu untersuchen:

- Fortsetzung gleichmäßig stetiger Abbildungen von  $X$  auf  $X^\sim$  durch

$$\tilde{f}(x^\sim) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{wobei} \quad (x_n)_n \in x^\sim.$$

- Ein Spezialfall ist die Fortsetzung algebraischer Verknüpfungen:
  - Vervollständigung von normierten Räumen, Algebren
  - Vervollständigung von metrisierbaren Gruppen

**Bemerkung (Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$ ).**

Bei der Vervollständigung der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  zu den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , kann man nicht sogleich die Metrik auf  $CF(\mathbb{Q})/\sim$  angeben, da diese Metrik ihre Werte in  $\mathbb{R}$  hat und  $\mathbb{R}$  erst konstruiert werden soll.

Nach G. CANTOR geht man folgendermaßen vor:

**Cantors Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$ :**

- Die Menge  $N$  der Nullfolgen ist ein maximales Ideal im Ring  $CF(\mathbb{Q})$ . Also ist der Quotient  $CF(\mathbb{Q})/\sim = CF(\mathbb{Q})/N$  ein Körper.
- Eine Cauchy-Folge  $(r_n)_n$  in  $\mathbb{Q}$  heiße **positiv**, wenn es ein  $c > 0$  in  $\mathbb{Q}$  gibt, so daß fast alle  $r_n > c$  sind.

- Die Menge  $P$  der Äquivalenzklassen positiver Cauchy-Folgen erfüllt die Axiome 1.1.5 **(O1)**–**(O3)** eines geordneten Körpers.
- Das Archimedische Axiom 2.1.9 **(A)** gilt.
- Das Intervallschachtelungsprinzip 2.2.6 **(I)** ist erfüllt.
- Man erklärt den Betrag und die Metrik.
- Cauchy-Folgen sind konvergent (vgl. Satz ??)
- $\mathbb{Q}$  ist dicht. Der so konstruierte Körper ist  $\mathbb{R}$  (vgl. Satz 2.3.32).

### 3.4.9 Fundamentalsatz der Algebra

#### Bemerkung: (Fundamentalsatz der Algebra)

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt

*Jedes nicht konstante, komplexe Polynom hat im Körper  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle.*

Für diesen Satz, der die Mathematiker seit dem Ende des 16. Jahrhundert herausgefordert hat, sind im Laufe der Jahrhunderte eine große Zahl von Beweisen – über 100 – gefunden worden.

Zunächst wurden der Satz für Polynome mit reellen Koeffizienten postuliert, wobei man jedoch die Notwendigkeit sah, *imaginäre* Nullstellen zuzulassen.

VIETA 1540-1603, GIRARD 1595-1632, DESCARTES 1596-1650, EULER 1707-1783, LAGRANGE 1736-1813, LAPLACE 1749-1827

Daß man diese *imaginären* Nullstellen immer in den komplexen Zahlen finden kann, wurde wohl erst am Ende des 18. Jahrhunderts völlig klar.

EULER 1707-1783, GAUSS, 1777-1857, ARGAND 1768-1822, CAUCHY 1789-1857

Alle bekannten Beweise kommen nicht mit rein algebraischen Methoden aus, sondern benutzen neben algebraischen Argumenten irgendwie Hilfsmittel der Analysis, wie

- Zwischenwertsatz für die Existenz reeller Nullstellen,
- stetige reelle Funktionen auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe der Ebene haben ein Minimum

Wir werden der Beweisidee von Argand (1814) folgen. Das dabei verwendete Minimum-Prinzip für Polynome formulieren wir etwas ausführlicher, als für den Beweis unbedingt nötig.

#### Lemma 3.4.145 (Wachstum eines Polynoms)

Zu einem Polynom

$$P(z) := z^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$$

mit  $\text{Grad } P = n \geq 1$  gibt es ein  $r_0 > 0$ , so daß

$$|P(z)| > \frac{1}{2}|z|^n > |P(0)| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, |z| \geq r_0.$$

**Beweis.** Man setze

$$a := \max_{0 \leq \nu \leq n-1} |a_\nu| \geq 0,$$

$$r_0 := 1 + 2a.$$

Für  $|z| > 1$  gilt dann

$$P(z) \geq |z|^n - a \sum_{\nu=0}^{n-1} |z|^\nu = |z|^n - a \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \geq |z|^n - \frac{a|z|^n}{|z| - 1}.$$

Für  $|z| > 1 + 2a$  ist also

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{(1 + 2a)^n}{2} \geq \frac{1 + n \cdot 2a}{2} > a \geq |a_0| = |P(0)|.$$

### Lemma 3.4.146 (Minimum–Maximum-Prinzip)

Es sei  $P$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ .

1. Zu jedem  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $P(z_0) \neq 0$  gibt es eine Richtung  $\zeta_0 \in \mathbb{S}^1$  und ein  $\rho > 0$  so daß

$$|P(z_0 + t\zeta_0)| < |P(z_0)| \quad \text{für } 0 < t < \rho.$$

2. Zu jedem  $z_0 \in \mathbb{C}$  gibt es eine Richtung  $\zeta_1 \in \mathbb{S}^1$  und ein  $\rho > 0$  so daß

$$|P(z_0 + t\zeta_1)| > |P(z_0)| \quad \text{für } 0 < t < \rho.$$

**Bemerkung zum Beweis.** Wenn  $P(z_0) \neq 0$  entwickle man das Polynom  $P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$  um den Punkt  $z_0$ :

$$P(z_0 + w) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu (z_0 + w)^\nu = P(z_0) \left(1 + \sum_{\nu=1}^n b_\nu w^\nu\right) = P(z_0)Q(w).$$

und zeige die entsprechende Aussage für  $Q$  im Punkte  $w_0 = 0$ .

**Beweis (Minimum–Maximum-Prinzip).**

**Minimum-Prinzip:** Man entwickle  $P$  um den Punkt  $z_0$ :

$$\begin{aligned} P(z_0 + w) &= P(z_0) \left( 1 + b_k w^k + \sum_{\nu=k+1}^n b_\nu w^\nu \right) \\ &= P(z_0) \left( 1 + b_k w^k + w^k \sum_{\nu=k+1}^n b_\nu w^{\nu-k} \right) = P(z_0) \cdot Q(w). \end{aligned}$$

Dabei sei  $k \geq 1$  die kleinste Potenz, für die  $b_k \neq 0$  ist.

Setzt man

$$\varphi_0 := \frac{\pi - \arg b_k}{k} \quad \text{und} \quad \zeta_0 = e^{i\varphi_0},$$

dann ist  $\zeta_0^k = -|b_k|/b_k$  (**k-te Wurzel**) und

$$b_k \zeta_0^k = -|b_k|.$$

Nun wähle man  $\rho > 0$  so klein, daß

$$\rho^k |b_k| \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=k+1}^n |b_\nu| \rho^{\nu-k} \leq \frac{|b_k|}{2}.$$

Für  $0 < t < \rho$  folgt dann (man beachte, daß  $b_k \zeta_0^k = -|b_k|$ ):

$$\begin{aligned} |Q(t\zeta_0)| &= \left| 1 + b_k \zeta_0^k t^k + (t\zeta_0)^k \sum_{\nu=k+1}^n b_\nu (t\zeta_0)^{\nu-k} \right| \\ &\leq |1 + b_k \zeta_0^k t^k| + |t^k \zeta_0^k| \cdot \left| \sum_{\nu=k+1}^n b_\nu (t\zeta_0)^{\nu-k} \right| \\ &\leq |1 + t^k b_k \zeta_0^k| + t^k \sum_{\nu=k+1}^n |b_\nu| \rho^{\nu-k} \\ &\leq (1 - t^k |b_k| + t^k \frac{|b_k|}{2}) < 1. \end{aligned}$$

**Maximum-Prinzip:** Wenn  $P(z_0) = 0$  ist nichts zu zeigen.

Anderenfalls setze man wieder  $P(z + w) = P(z_0)Q(w)$  und wähle

$$\varphi_1 := \frac{2\pi - \arg b_k}{k} \quad \text{und} \quad \zeta_1 = e^{i\varphi_0},$$

dann gilt

$$b_k \zeta_1^k = |b_k|.$$

Die Aussage folgt nun mit einer analogen Abschätzung.

**Bemerkung.** Stellt man sich den Graphen der Funktion

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto |P(z)|$$

als **Zeltdach** über der Ebene vor, so würde bei einem Regen das Wasser überall, außer in den Nullstellen, abfließen und sich in den Nullstellen sammeln.

Dieses Zeltdach hat sonst keine Senken, in den sich ein Pfütze bilden kann.

### Satz 3.4.147 (Minimum–Maximum-Prinzip)

Es sei  $P$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ .

1. Zu jedem  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $P(z_0) \neq 0$  gibt es in jeder Umgebung  $U$  von  $z_0$  ein  $z_1 \in U$ , so daß

$$|P(z_1)| < |P(z_0)|.$$

2. Zu jedem  $z_0 \in \mathbb{C}$  gibt es in jeder Umgebung  $U$  von  $z_0$  ein  $z_2 \in U$ , so daß

$$|P(z_2)| > |P(z_0)|.$$

**Bemerkung.** Das Minimum–Maximum-Prinzip gilt allgemeiner für **analytische Funktionen**. Diese Funktionen lassen sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickeln. Man kann die gleiche Beweisidee verwenden.

### Satz 3.4.148 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom vom Grade  $n \geq 1$  mit komplexen Koeffizienten hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle.

**Bemerkung.** Der folgende Beweis geht auf R. ARGAND zurück. Dieser Beweis benutzt die folgenden Hilfsmittel:

- Den Satz von Bolzano-Weierstraß für  $\mathbb{C}$ .
- Eine stetige reelle Funktion auf einer kompakten Teilmenge hat ein Minimum.
- Der Betrag eines Polynoms hat eine Minimalstelle auf  $\mathbb{C}$
- Die Existenz  $k$ -ter Wurzeln.
- Eine Minimalstelle des Betrags eines Polynoms ist eine Nullstelle.

---

**Beweis (Fundamentalsatz der Algebra).**

Wenn  $P(0) = 0$  sind wir fertig.

Anderenfalls gibt es nach Lemma 3.4.145 ein  $r_0 > 0$ , so daß

$$|P(z)| > |P(0)| \quad \text{für } |z| > r_0.$$

Die stetige Funktion  $\mathbb{C} \ni z \mapsto |P(z)|$  hat nach Satz 3.4.96 auf der kompakten Kreisscheibe

$$\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_0\}$$

ein Minimum in einem Punkt  $z_0$ . Dort gilt

$$|P(z_0)| \leq |P(0)|.$$

Also ist  $|P(z_0)| \leq |P(z)|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Aus dem Minimum-Prinzip 3.4.147 folgt nun  $P(z_0) = 0$ .

---

**Bemerkung.** Da jedes komplexe Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle hat, folgt nun die Zerlegung eines jeden komplexen Polynoms in Linearfaktoren (vgl. Satz 3.4.35):

$$P(z) = \prod_{\kappa=1}^k (z - z_\kappa)^{n_\kappa}.$$

**Satz 3.4.149 ( $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen)**

*Es gibt keinen echten endlichen Erweiterungskörper von  $\mathbb{C}$ .*

---

**Beweis.** Es sei  $\mathbf{K}$  ein Erweiterungskörper von  $\mathbb{C}$  und  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{K} = n \in \mathbb{N}$ .

Es sei  $w \in \mathbf{K} \setminus \mathbb{R}$ . Die Potenzen  $\{1 = w^0, w^1, \dots, w^n\}$  sind linear abhängig. Es gibt ein komplexes Polynom  $P$  mit  $P(w) = 0$ .

Es sei (vgl. Satz 3.4.35)

$$P(z) = \prod_{\kappa=1}^k (z - z_\kappa)^{n_\kappa}$$

die Zerlegung in Linearfaktoren. Da  $P(w) = 0$  ist, verschwindet einer der Faktoren

$$w - z_\kappa.$$

Also ist  $w \in \mathbb{C}$ .

---

**Feststellung 3.4.150 (Zerlegung reeller Polynome)**

Es sei  $P$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ . Es seien  $x_1, \dots, x_k$  die reellen Nullstellen und  $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m$  die Paare konjugiert komplexer Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Das Polynom  $P$  zerfällt über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren

$$P(z) = \prod_{\kappa=1}^k (z - x_\kappa)^{m_\kappa} \cdot \prod_{\mu=1}^m (z - z_\mu)^{n_\mu} (z - \bar{z}_\mu)^{n_\mu}$$

Über  $\mathbb{R}$  hat  $P$  die Darstellung

$$P(Z) = \prod_{\kappa=1}^k (z - x_\kappa)^{m_\kappa} \cdot \prod_{\mu=1}^m (z^2 + p_\mu z + q_\mu)^{n_\mu}$$

Dabei sind die Koeffizienten der quadratischen Faktoren

$$p_\mu := 2 \operatorname{Re} z_\mu \quad \text{und} \quad q_\mu := z_\mu \bar{z}_\mu$$

reell. Die Darstellung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

**Bemerkung.** 1. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, daß  $\mathbb{C}$  der einzige **endliche** Erweiterungskörper von  $\mathbb{R}$  ist.

2. Die rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten bilden einen **unendlich-dimensionalen** Erweiterungskörper von  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.4.151 (Einzigkeit von  $\mathbb{C}$ )**

Es sei  $\mathbf{K}$  ein echter Erweiterungskörper der reellen Zahlen, so daß

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{K} = n \in \mathbb{N}$$

ist. Dann ist  $n = 2$  und  $\mathbf{K}$  ist isomorph zu  $\mathbb{C}$ .

**Beweis.** Es sei  $w \in \mathbf{K} \setminus \mathbb{R}$ . Die Potenzen  $\{1 = w^0, w^1, \dots, w^n\}$  sind linear abhängig. Es gibt ein reelles Polynom  $P$  mit  $P(w) = 0$ .

Das Polynom  $P$  hat die reelle Zerlegung 3.4.150

$$P(z) = \prod_{\kappa=1}^k (z - x_\kappa)^{m_\kappa} \cdot \prod_{\mu=1}^m (z^2 + p_\mu z + q_\mu)^{n_\mu}$$

Da  $P(w) = 0$  ist, verschwindet einer der Faktoren

$$w - x_\kappa \quad \text{oder} \quad w^2 + p_\mu w + q_\mu$$

Da  $w \notin \mathbb{R}$  gibt es  $p, q \in \mathbb{R}$  mit

$$w^2 + pw + q = 0 \quad \text{und} \quad p^2 - 4q < 0.$$

Für das Element

$$j := \frac{2w + p}{\sqrt{4q - p^2}} \quad \text{gilt} \quad j^2 = -1.$$

Dann ist  $\mathbb{C} \cong \text{lin}_{\mathbb{R}}\{1, j\} \subset \mathbf{K}$ . Also ist  $\mathbf{K}$  ein endlicher Erweiterungskörper von  $\mathbb{C}$  und somit  $\mathbf{K} \cong \mathbb{C}$  (vgl. Satz 3.4.149).

**Bemerkung.** In die Beweisen zu Satz 3.4.149 und Satz 3.4.151 wurde die Voraussetzung, daß  $\mathbf{K}$  ein Körper ist, nicht voll benutzt. Allgemeiner gilt:

**Feststellung 3.4.152 (nullteilerfreie komm. Algebren)**

*Eine reelle, nullteilerfreie, kommutative, endlichdimensionale Algebra  $A$  ist isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .*

**Beweis.** Nach dem folgenden Feststellung gilt für jede nullteilerfreie endlichdimensionale Algebra  $A$ :

- $A$  hat eine Eins und jedes von Null verschieden Element ist invertierbar.

Da  $A$  kommutativ ist, ist  $A$  ein endlicher Erweiterungskörper von  $\mathbb{R}$  und somit  $A = \mathbb{R}$  oder  $A = \mathbb{C}$  (vgl. Satz 3.4.151).

**Feststellung 3.4.153 (nullteilerfreie Algebra)**

*Es sei  $A$  eine reelle, nulteilerfreie, endlichdimensionale Algebra. Dann hat  $A$  eine Eins und jedes von Null verschieden Element ist invertierbar.  $A$  ist eine Divisionsalgebra.*

**Bemerkung.** Die Quaternionen  $\mathbf{H}$  bilden eine 4-dimensionale nullteilerfreie, nichtkommutative reelle Algebra mit Eins. Man sagt,  $\mathbf{H}$  ist ein Schiefkörper.

Man kann die Algebra  $\mathbf{H}$  als Unteralgebra der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen darstellen:

$$\mathbf{H} := \left\{ \begin{bmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die einzigen Divisionsalgebren über  $\mathbb{R}$  sind  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbf{H}$ .

**Beweis.** Für  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ , betrachte man die Multiplikationsoperatoren

$$\begin{aligned} L_a : A &\rightarrow A & \text{mit} & \quad L_a : x \rightarrow ax, \\ R_a : A &\rightarrow A & \text{mit} & \quad R_a : x \rightarrow xa. \end{aligned}$$

$L_a$  und  $R_a$  sind linear. Da  $A$  nullteilerfrei ist, sind  $L_a$  und  $R_a$  injektiv. Da  $A$  endlichdimensional ist, sind  $L_a$  und  $R_a$  bijektiv.

Es gibt genau ein Element  $e \in A$  mit  $L_a e = a$ . Wir zeigen, daß  $e$  das Einselement ist. Für ein beliebiges  $x \in A$  ist gilt:

$$\begin{aligned} L_a(ex) = a(ex) = (ae)x = ax = L_a(x) &\Rightarrow ex = x, \\ R_a(xe) = (xe)a = x(ea) = xa = R_a(x) &\Rightarrow xe = x. \end{aligned}$$

Wenn  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ , so sind  $L_x$  und  $R_x$  bijektiv: Es gibt  $y, z \in A$  mit

$$L_x y = e \quad \text{und} \quad R_x z = e.$$

Dann ist  $y = z = x^{-1}$ .

## Literatur

- [BRÖCKER] BRÖCKER, Theodor: *Analysis 1 (2. Auflage) 1995* Spektrum, Akad. Verl.
- [DIEUDONNÉ] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981
- [FORSTER] FORSTER, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983
- [KABALLO] KABALLO, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin
- [KÖNIGSBERGER] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [LANDAU] LANDAU, Edmund: *Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen)* Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.
- [VAN DER WAERDEN] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra (Band I) 7. Auflage*: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.